Über die reellen Nullstellen des Derivierten eines Polynoms mit reellen Koeffizienten.[1]

Von JULIUS V. SZ. NAGY in Szeged.

1. E. LAGUERRE[2]) hat den folgenden Satz gefunden:

Teilt man das Intervall zwischen zwei benachbarten Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen in n gleiche Teile, so kann das Derivierte $P'(x)$ im Innern der äußersten Teilintervalle nicht verschwinden.

Eine Verschärfung[3]) dieses Satzes ist der folgende Satz:

Sind $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ die Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen, so hat das Derivierte $P(x)$ im Innern der Intervalle

$$\left(a_k,\ a_k+\frac{a_{k+1}-a_k}{n-k+1}\right) \text{ und } \left(a_{k+1}-\frac{a_{k+1}-a_k}{k+1},\ a_{k+1}\right) \qquad (a_k \neq a_{k+1})$$

keine Nullstelle.

P. MONTEL[4]) hat den Laguerreschen Satz auf folgende Weise verallgemeinert:

Sind α und $\beta\,(>\alpha)$ zwei reelle Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, deren Intervall (α, β)

---

[1]) Die Resultate dieser Arbeit wurden am 15. April 1935 vor der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgetragen.

[2]) E. CESÀRO, Solution de la Question 1338, *Nouvelles Annales de Math.* (3), **4** (1885), S. 328—330; E. CESÀRO—G. KOWALEWSKI, *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung* (Leipzig, 1904), S. 431.

[3]) JULIUS V. SZ. NAGY, Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung,* **27** (1918), S. 37—43, insb. S. 40—41.

[4]) P. MONTEL, Sur les zéros des derivées des fonctions analytiques, *Bulletin de la Soc. Math. France,* **58** (1930), S. 105—126, insb. S. 119—120.

im Innern keinen Realteil der übrigen Nullstellen von $P(x)$ enthält, so hat das Derivierte $P'(x)$ keine Nullstelle im Innern der Intervalle

$$\left(\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right) \quad und \quad \left(\beta-\frac{\beta-\alpha}{n},\ \beta\right).$$

Es gilt auch die folgende Verschärfung[5]) dieses Satzes:

Sind die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten nach der Größe ihrer Realteile geordnet und sind die Nullstellen α_k und $\alpha_{k+1}\,(>\alpha_k)$ reell, so kann das Derivierte $P'(x)$ im Innern der Intervalle

$$\left(\alpha_k,\ \alpha_k+\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{n-k+1}\right) \quad und \quad \left(\alpha_{k+1}-\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{k+1},\ \alpha_{k+1}\right)$$

nicht verschwinden.

2. Wir werden hier die folgenden Verschärfungen dieser Sätze beweisen:

I. *Sind α und $\beta\,(>\alpha)$ zwei reelle Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten und liegt keine Nullstelle von $P(x)$ im Innern des Kreises K vom Durchmesser (α, β), so liegt keine Nullstelle von $P'(x)$ im Innern der Intervalle*

$$\left(\alpha,\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right) \quad und \quad \left(\beta-\frac{\beta-\alpha}{n},\ \beta\right).$$

II. *Ist α bzw. $\beta\,(>\alpha)$ eine m_1- bzw. m_2-fache reelle Nullstelle eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, liegt ferner keine Nullstelle von $P(x)$ im Innern des Kreises K vom Durchmesser (α, β) und bedeutet endlich h bzw. k die Anzahl derjenigen Nullstellen von $P(x)$, deren Realteile größer als α bzw. kleiner als β sind, so liegt keine Nullstelle von $P'(x)$ im Innern der Intervalle*

$$\left(\alpha,\ \alpha_1=\alpha+m_1\frac{\beta-\alpha}{m_1+h}\right) \quad und \quad \left(\beta_1=\beta-m_2\frac{\beta-\alpha}{m_2+k},\ \beta\right).$$

Wir beweisen nur den Satz II, weil er den Satz I in sich enthält.

Ist x eine im Innern des Intervalles (α, β) liegende Nullstelle von $P'(x)$, so läßt sich die Gleichung

---

5) Julius v. Sz. Nagy, Egy polinom deriváltja zéróhelyeinek helyzetéről (Über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms), *Matematikai és Fizikai Lapok*, **38** (1931), S. 41—60, insb. S. 54—55.

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{m_1}{x-\alpha} + \frac{m_2}{x-\beta} + \ldots = 0$$

in der Form

$$(1) \qquad \frac{m_1}{x-\alpha} + \ldots = \frac{m_2}{\beta - x} + \ldots$$

schreiben, wo eine Nullstelle von $P(x)$ an der linken bzw. an der rechten Seite der Gleichung vorkommt, je nachdem ihr Realteil kleiner bzw. größer als x ist. Hat das Polynom auch solche Nullstellen, deren Realteile gleich x sind, so können die entsprechenden Glieder von (1) nach Belieben entweder an der linken, oder an der rechten Seite der Gleichung stehen.

Der Realteil eines Gliedes von (1), dessen Zähler Eins ist, bedeutet den reziproken Wert des Durchmessers vom Kreise K_γ, der durch den Punkt x und durch die betreffende Nullstelle γ von $P(x)$ hindurchgeht und dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt.

Ist nämlich $\gamma - x = re^{i\varphi}$, so ist

$$(2) \qquad \frac{1}{\gamma - x} = \frac{\cos\varphi}{r} - i\frac{\sin\varphi}{r}.$$

Daraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

Der Kreis K_γ schneidet den Kreis K, weil der Punkt x im Innern von K, der Punkt γ aber außerhalb des Inneren von K liegt. Die Kreisfläche K_γ enthält den Punkt α oder den Punkt β, je nachdem $\Re(x-\gamma)$ bzw. $\Re(\gamma - x)$ positiv ist. Der Durchmesser D_γ des Kreises K_γ ist also im Falle $\Re(x-\gamma) > 0$ nicht kleiner als $x-\alpha$, im Falle $\Re(\gamma - x) > 0$ nicht kleiner als $\beta - x$.

Betrachtet man also die Realteile der Glieder von (1), so kann man aus der Gleichung (1) die Ungleichungen

$$(3) \qquad \frac{m_1}{x-\alpha} \leqq \frac{h}{\beta - x} \quad \text{und} \quad \frac{m_2}{\beta - x} \leqq \frac{k}{x-\alpha}$$

folgern, die sich auch in der Form

$$(4) \quad x - \alpha \geqq m_1 \frac{\beta - \alpha}{m_1 + h} = \alpha_1 - \alpha \quad \text{und} \quad \beta - x \geqq m_2 \frac{\beta - \alpha}{m_2 + k} = \beta - \beta_1$$

schreiben lassen. Durch diese Ungleichungen ist der Satz II bewiesen.

Hat das Polynom $P(x)$ h_1 bzw. k_1 solche Nullstellen, deren Realteile größer als α_1 bzw. kleiner als β_1 sind, so kann man aus der Gleichung (1) auch die Ungleichungen

$$(5)\qquad \frac{m_1}{x-\alpha} \leqq \frac{h_1}{\beta-x} \quad \text{und} \quad \frac{m_2}{\beta-x} \leqq \frac{k_1}{x-\alpha}$$

folgern, weil $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ ist.

Daraus folgt der folgende Zusatz des Satzes II:

Zusatz zu II. *Hat das Polynom $P(x)$ h_1 bzw. k_1 solche Nullstellen, deren Realteile größer als α_1 bzw. kleiner als β_1 sind und besteht mindestens eine der Ungleichungen $h_1 < h$ und $k_1 < k$, so hat das Polynom $P'(x)$ keine Nullstelle im Innern der Intervalle* $\left(\alpha, \alpha_2 = \alpha + m_1 \frac{\beta-\alpha}{m_1+h_1}\right)$ *und* $\left(\beta_2 = \beta - m_2 \frac{\beta-\alpha}{m_2+k_1}, \beta\right)$. *Bezeichnet h_2 bzw. k_2 die entsprechende Zahl in bezug auf den Punkt α_2 bzw. β_2, wie h_1 bzw. k_1 in bezug auf α_1 bzw. β_1 und besteht mindestens eine der Ungleichungen $h_2 < h_1$ und $k_2 < k_1$, so enthält das Innere des Intervalles* $\left(\alpha, \alpha_3 = \alpha + m_1 \frac{\beta-\alpha}{m_1+h_2}\right)$ *oder* $\left(\beta_3 = \beta - m_2 \frac{\beta-\alpha}{m_2+k_2}, \beta\right)$ *keine Nullstelle von $P'(x)$.* (Dieses Verfahren läßt sich auch fortsetzen.)

3. Es gilt auch der folgende Satz:

III. *Ist $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, für welches α eine m_1-fache und $\beta (> \alpha)$ eine m_2-fache reelle Nullstelle ist, hat ferner $P(x)$ höchstens $h = m_2 + 2p$ bzw. $k = m_1 + 2q$ solche Nullstellen, deren Realteile größer als α bzw. kleiner als β sind, und liegt endlich keine Nullstelle von $P(x)$ im Innern des Kreiszweieckes Z, das aus den Kreisflächen K_1 und K_2 mit den Durchmessern*

$$\left(\alpha, \beta_1 = \beta - m_2 \frac{\beta-\alpha}{m_1+m_2+2q}\right) \quad \text{und} \quad \left(\alpha_1 = \alpha + m_1 \frac{\beta-\alpha}{m_1+m_2+2p}, \beta\right)$$

besteht, so hat das Polynom $P'(x)$ keine Nullstelle im Innern der Intervalle (α, α_1) und (β_1, β).

Wir nehmen zum Beweis an, daß es ein Polynom $P_0(x)$ gibt, für welches die Bedingungen des Satzes III erfüllt sind, der Satz aber nicht besteht. $P_0'(x)$ hat also eine Nullstelle x_0 im Innern des Intervalles (α, α_1) oder (β_1, β). Wir nehmen an, daß x_0 im Intervall (α, α_1) liegt.

Während des Beweises verstehen wir unter einem Polynom $P(x)$ ein Polynom von den im Satze III genannten Eigenschaften, aber mit der einzigen Ausnahme, daß seine Multiplizität im Punkte β auch größer als m_2 sein kann.

Bezeichnet S_0 bzw. S die Summe der rechten Seite (die Summe der reellen Teile der Glieder) von (1) im Punkte x_0 in Bezug auf $P_0(x)$ bzw. $P(x)$, so besteht die Ungleichung

$$\frac{m_1}{x_0-\alpha} \leqq S_0. \tag{6}$$

Bezeichnen δ und $\bar{\delta}$ die Ecken des Kreiszweieckes Z, so werden wir durch die Veränderung der Nullstellen der Polynome $P(x)$ zeigen, daß die Ungleichung

$$\frac{m_1}{x_0-\alpha} \leqq S \leqq \Re\left[\frac{p}{\delta-x_0}+\frac{p}{\bar{\delta}-x_0}\right]+\frac{m_2}{\beta-x_0}= \tag{7}$$
$$=\frac{p}{\delta-x_0}+\frac{p}{\bar{\delta}-x_0}+\frac{m_2}{\beta-x_0}$$

für jedes Polynom $P(x)$ besteht.

Es ist klar, daß die Summe S vergrößert wird, wenn man diejenigen Nullstellen von $P_0(x)$, deren Realteile größer als x_0 sind, um den Punkt x_0 nach der positiven Richtung der reellen Achse so lange dreht, bis sie auf den Rand von Z oder auf die reelle Achse gelangen. Durch dieses Verfahren erhalten wir aus $P_0(x)$ ein Polynom $P_1(x)$ und aus S_0 eine Summe S_1.

Die Summe S_1 wird weiter vergrößert, wenn man die von x_0 rechts abliegenden reellen Nullstellen von $P_1(x)$ in den Punkt β zusammenzieht und dann jede Nullstelle γ, für welche $\alpha<\Re(\gamma)\leqq x_0$ ist, ausläßt, indem man das Polynom durch $x-\gamma$ dividiert. Hat das so erhaltene Polynom $P_2(x)$ $2p'-1+m_2$ solche Nullstellen, deren Realteile größer als α sind, so vergrößern wir die Multiplizität von β um Eins. Das so erhaltene Polynom bzw. die zugehörige Summe S wird mit $P_3(x)$ bzw. mit S_3 bezeichnet.

Die Ecken δ und $\bar{\delta}$ teilen den Rand von Z in zwei Stücke und zwar R_1 und R_2, von denen R_1 bzw. R_2 ein Bogen des Kreises K_1 bzw. K_2 ist. Nähert sich nun ein Punkt γ vom Punkte β ausgehend auf R_2 dem Punkte δ ($\bar{\delta}$), so nimmt der Durchmesser D_γ des Kreises K_γ, der durch die Punkte x_0 und γ hindurchgeht und dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt, monoton ab. Wäre nämlich diese Veränderung von D_γ nicht monoton, so gäbe es auf dem Teilbogen (β, δ) von R_2 zwei verschiedene Punkte γ_1 und γ_2, so daß $K_{\gamma_1}=K_{\gamma_2}$ wäre. Dann wäre aber der Kreis K_2

von K_{γ_1} in vier Punkten getroffen. Dies ist aber unmöglich, weil x_0 außerhalb von K_2 liegt und deshalb K_{γ_1} von K_2 verschieden ist. Die Veränderung von D_γ während der vorigen Bewegung von γ ist eine Abnahme, weil x_0 außerhalb der Kreisfläche K_2 liegt und deshalb $D_\gamma < \beta - x_0 = D_\beta$ ist.

Ist γ_0 derjenige Punkt des Teilbogens (α, δ) von R_1, dessen Realteil gleich x_0 ist, und nähert sich ein Punkt γ auf R_1 von γ_0 $(\overline{\gamma_0})$ ausgehend dem Punkte δ $(\bar{\delta})$, so nimmt der Wert $\Re\left(\frac{1}{\gamma - x_0}\right)$ monoton zu, wie man dies leicht einsehen kann.

Daraus folgt, daß die Summe S_3 zunimmt, wenn man die auf R_1 und R_2 liegenden konjugiert imaginären p_1 Nullstellenpaare und $p' - p_1$ Paare von den in β zusammenfallenden $2(p' - p_1) + m_2$ Nullstellen von $P_3(x)$ in das Punktpaar $\delta, \bar{\delta}$ bringt. Das so erhaltene Polynom $P_4(x)$ hat in α, β bzw. δ und $\bar{\delta}$ eine m_1-fache, m_2-fache bzw. je eine p'-fache Nullstelle.

Damit ist die Ungleichung (7) bewiesen, weil $p' \leqq p$ ist.

Ist nun

$$(8) \qquad P^*(x) = (x-\alpha)^{m_1}(x-\beta)^{m_2}[(x-\delta)(x-\bar{\delta})]^p,$$

und ist x_0^* die im Innern des Intervalles (α, β) liegende kleinste Nullstelle von $P^{*\prime}(x)$, so besteht die Gleichung

$$(9) \qquad \frac{m_1}{x_0^* - \alpha} = \frac{p}{\delta - x_0^*} + \frac{p}{\bar{\delta} - x_0^*} + \frac{m_2}{\beta - x_0^*}.$$

Aus dem Vergleich dieser Gleichung mit der Ungleichung (7) folgt, daß $x_0 \geqq x_0^*$ ist.

Bedeutet c eine positive Zahl und sind

$$(10) \qquad n = m_1 + m_2 + 2p, \quad \alpha = -m_1 c, \quad \beta = m_2 c,$$

so sind

$$(11) \qquad \begin{gathered} \delta = ic\sqrt{2\frac{p}{n}m_1 m_2}, \quad \bar{\delta} = -ic\sqrt{2\frac{p}{n}m_1 m_2}, \\ \alpha_1 = \frac{-2p}{n}cm_1, \quad \beta_1 = \frac{2p}{n}cm_2 \end{gathered}$$

und

$$(12) \qquad P^*(x) = (x+m_1 c)^{m_1}(x-m_2 c)^{m_2}\left(x^2 + 2c^2\frac{p}{n}m_1 m_2\right)^p.$$

Das Derivierte dieses Polynoms $P^*(x)$ hat im Innern des Intervalles (α, β) die drei Nullstellen

$$(13) \qquad x_0^* = -\frac{2p}{n} c m_1 = \alpha_1, \quad x_1^* = 0 \quad \text{und} \quad x_2^* = \frac{2p}{n} c m_2 = \beta_1.$$

Daraus folgt, daß x_0 — gegen unserer Annahme — kein innerer Punkt des Intervalles (α, α_1) ist.

Ähnlicherweise kann man beweisen, daß $P_0(x)$ auch im Innern des Intervalles (β_1, β) keine Nullstelle haben kann. Damit ist der Satz III bewiesen. Auch dieser Satz läßt sich durch einen entsprechenden Zusatz ergänzen.

4. Von uns stammt der folgende Satz[6]):

Teilt man das Intervall zwischen der größten und kleinsten Nullstelle eines Polynomes $P(x)$ n-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen in n gleiche Teile, so hat das Derivierte $P'(x)$ in den äußersten Teilintervalle mindestens je eine Nullstelle.

Für Polynome mit reellen Koeffizienten gilt der Satz:

IV. *Sind α und $\beta\,(>\alpha)$ reelle Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten und liegt keine andere Nullstelle von $P(x)$ außerhalb der Kreisfläche vom Durchmesser*

$$\left(\alpha_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}, \beta\right) \quad bzw. \quad \left(\alpha, \beta_1 = \beta - \frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

so enthält das abgeschlossene Intervall (α, α_1) bzw. (β_1, β) mindestens eine Nullstelle von $P'(x)$.

Dieser Satz ist eine Folgerung des folgenden allgemeineren Satzes:

V. *Sind α und $\beta\,(>\alpha)$ reelle Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ mit reellen Koeffizienten und hat der Punkt α_2 des Intervalles (α, β) die folgenden drei Eigenschaften: 1. das Polynom $P(x)$ hat mindestens h solche Nullstellen, deren Realteile größer als α_2 sind, und diese Nullstellen liegen alle im Innern oder am Rande des Kreises K_2 vom Durchmesser (α_2, β); 2. $P(x)$ hat höchstens k solche Nullstellen, deren Realteile kleiner als α_2 sind, und keine von diesen Nullstellen liegt im Innern des Kreises K_1 vom Durchmesser (α, α_2); 3. $\alpha_2 \geqq \alpha + k\dfrac{\beta-\alpha}{h+k}$; so enthält das Intervall (α, α_2) außerhalb des Endpunktes α mindestens eine Nullstelle des Polynoms $P'(x)$.*

Man kann im Falle der Erfüllung von entsprechenden Be-

---

[6]) J. v. Sz. Nagy, Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung,* **27** (1918), S. 37–43.

dingungen auch für die im Innern des Intervalles (α, β) liegende größte Nullstelle von $P'(x)$ einen Satz aussprechen.

Die Funktion

$$F(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\ldots \tag{14}$$

nimmt in einem, dem Punkte α genügend nahe liegenden Punkte x_1 des Intervalles (α, β) offenbar einen positiven Wert an. Der Wert von $F(x)$ im Punkte α_2 ist die Summe der Realteile der Glieder an der rechten Seite von (14). Ist γ eine Nullstelle von $P(x)$ und bedeutet D_γ die Länge des Durchmessers vom Kreise K_γ, der durch die Punkte α_2 und γ hindurchgeht und dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt, so ist der Wert von $\Re\left(\frac{1}{\alpha_2-\gamma}\right)$ entweder $\frac{1}{D_\gamma}$, oder 0, oder $-\frac{1}{D_\gamma}$, je nachdem $\Re(\alpha_2-\gamma)$ positiv, Null oder negativ ist.

Aus den Annahmen des Satzes V folgt also, daß

$$F(\alpha_2)=\frac{P'(\alpha_2)}{P(\alpha_2)}\leqq\frac{k}{\alpha_2-\alpha}-\frac{h}{\beta-\alpha_2}\leqq 0$$

ist.

Die Funktion $F(x)$ nimmt also im Punkte x_1 bzw. α_2 einen positiven bzw. einen nichtpositiven Wert an. Sie hat nach den Annahmen des Satzes V im Intervall (x_1, α_2) keinen Pol. Daraus folgt, daß $F(x)$ und damit auch $P'(x)$ mindestens eine Nullstelle hat, für welche $\alpha < x \leqq \alpha_2$ ist.

Damit ist der Satz V bewiesen. Der Satz IV folgt aus V einfach.

5. Wir werden jetzt die folgende Verallgemeinerung des Satzes II beweisen:

VI. *Wir bezeichnen mit $\alpha=a+iA$ bzw. $\beta=b+iB$ $(a<b)$ eine m_1- bzw. m_2-fache Nullstelle eines Polynoms $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, mit h bzw. k die Anzahl der Nullstellen von $P(x)$, deren Realteile größer als a bzw. kleiner als b sind. Hat $P(x)$ keine Nullstelle im Innern des Kreises K vom Durchmesser (a, b) und bestehen die Ungleichungen*

$$|A|\leqq m_1\frac{b-a}{m_1+h}=d_a \quad \textit{und} \quad |B|\leqq m_2\frac{b-a}{m_2+k}=d_b,$$

so verschwindet das Derivierte $P'(x)$ mindestens einmal auf der Strecke

$$\left(a_1 = a + d_a = a + m_1 \frac{b-a}{m_1+h},\ b_1 = b - d_b = b - m_2 \frac{b-a}{m_2+k}\right).$$

Ist $\alpha = a$ oder $\beta = b$, so kann $P'(x)$ im Innern der Strecke (a, a_1) bzw. (b_1, b) nicht verschwinden.

Ist

$$F(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{m_1}{x-\alpha} + \frac{m_2}{x-\beta} + \dots, \tag{15}$$

so beweisen wir die Richtigkeit der Ungleichungen

$$F(a_1) \geqq 0 \quad \text{und} \quad F(b_1) \leqq 0. \tag{16}$$

Im Falle $A \neq 0$ ist

$$\frac{m_1}{a_1-\alpha} + \frac{m_1}{a_1-\bar{\alpha}} = \frac{2m_1(a_1-a)}{(a_1-a)^2+A^2} \geqq \frac{2m_1(a_1-a)}{(a_1-a)^2+(a_1-a)^2} = \frac{m_1}{a_1-a}.$$

Aus der Lage der Nullstellen von $P(x)$ in beiden Fällen $A \neq 0$ und $A = 0$ folgt also die Ungleichung

$$F(a_1) \geqq \frac{m_1}{a_1-a} - \frac{h}{b-a_1} = 0,$$

weil höchstens h Glieder der rechten Seite von (15) negative Realteile haben können und weil der absolute Betrag dieser Realteile höchstens $\frac{1}{b-a_1}$ ist.

Auf ähnliche Weise kann man einsehen, daß die Ungleichung

$$F(b_1) \leqq \frac{k}{b_1-a} - \frac{m_2}{b-b_1} = 0$$

in beiden Fällen $B \neq 0$ und $B = 0$ besteht. Damit sind die Ungleichungen (16) bewiesen. Daraus folgt, daß $P'(x)$ auf der Strecke (a_1, b_1) mindestens einmal verschwindet.

Ist a_2 bzw. b_2 ein innerer Punkt des Intervalles (a, a_1) bzw. (b_1, b), so kann man im Falle $A = 0$ bzw. $B = 0$ die Ungleichung

$$F(a_2) \geqq \frac{m_1}{a_2-a} - \frac{h}{b-a_2} > \frac{m_1}{a_1-a} - \frac{h}{b-a_1} = 0$$

bzw.

$$F(b_2) \leqq \frac{k}{b_2-a} - \frac{m}{b-b_2} < \frac{k}{b_1-a} - \frac{m}{b-b_1} = 0$$

leicht einsehen. Das Derivierte $P'(x)$ hat also im Falle $A = 0$ bzw. $B = 0$ keine Nullstelle im Innern des Intervalles (a, a_1) bzw. (b_1, b).

Damit ist der Satz VI vollständig bewiesen.

Aus diesem Satz folgt diese Verallgemeinerung des Laguerreschen Satzes:

VII. *Sind $\alpha = a + iA$ und $\beta = b + iB$ zwei solche Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, für welche die Ungleichungen*

$$a < b, \ |A| \leqq \frac{b-a}{n} \quad \text{und} \quad |B| \leqq \frac{b-a}{n}$$

bestehen, und liegt keine Nullstelle von $P(x)$ im Innern des Kreises mit dem Durchmesser (a, b), so verschwindet das Derivierte $P'(x)$ mindestens einmal auf der Strecke

$$\left(a_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ b_1 = b - \frac{b-a}{n}\right).$$

Im Falle $A = 0$ bzw. $B = 0$ kann $P'(x)$ im Innern der Strecke (a, a_1) bzw. (b_1, b) nicht verschwinden.

Aus dem Beweis des Satzes VI folgt der Satz:

VIII. *Sind $\alpha = a + iA$, $\beta = b + iB$, $\gamma = c + iC$ und $\delta = d + iD$ $(a < b \leqq c < d)$ solche Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, für welches der Satz VI in den Intervallen (a, b) und (c, d) anwendbar ist, und hat das Polynom im abgeschlossenen Intervall (b, c) entweder keine Nullstelle, oder mindestens zwei Nullstellen, so hat das Derivierte $P'(x)$ mindestens drei Nullstellen im Intervall (a, d). Dieser Satz besteht auch dann, wenn β und γ dieselbe Nullstelle von $P(x)$ bedeutet.*

Mit entsprechender Bezeichnung sind nämlich

$$F(a_1) \geqq 0, \ F(b_1) \leqq 0, \ F(c_1) \geqq 0 \ \text{und} \ F(d_1) \leqq 0.$$

Daraus folgt, daß $P'(x)$ auf den Strecken (a_1, b_1) und (c_1, d_1) mindestens je eine Nullstelle hat. Hat also das Polynom $P(x)$ auf der Strecke (b, c) mindestens zwei Nullstellen, so enthält das Intervall (a, d) mindestens drei Nullstellen von $P'(x)$. Hat das Polynom $P(x)$ keine Nullstelle im abgeschlossenen Intervall (b, c), so ist die Funktion $F(x)$ im Innern des Intervalles (a, d) eine stetige Funktion. Ist a_2 bzw. d_2 ein dem Punkte a_1 bzw. d_1 genügend nahe liegender Punkt der Strecke (a, a_1) bzw. (d_1, d), so ist $F(a_2) > 0$ und $F(d_2) < 0$. Daraus folgt, daß die stetige Funktionen $F(x)$ und $P'(x)$ im Intervall (a_2, d_2) mindestens drei Nullstellen haben. Damit ist der Satz VIII bewiesen.

Man kann auf Grund dieses Satzes verschiedene Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten und von folgenden drei Eigenschaften herstellen: 1. das Polynom $P(x)$ kann beliebig viele nichtreelle Nullstellen haben, 2. das Derivierte $P'(x)$ hat lauter reelle Nullstellen, die alle voneinander verschieden sind, 3. die Realteile von je zwei nicht konjugiert imaginären Nullstellen des Polynoms $P(x)$ sind durch mindestens eine Nullstelle von $P'(x)$ getrennt.

(Eingegangen am 23. April 1935.)