Über lakunäre trigonometrische Reihen.

Von S. SIDON in Budapest.

Frühere Arbeiten[1]) enthalten den

Satz I. *Ist $n_1, \ldots, n_k \ldots$ eine Folge positiver ganzer Zahlen von der Beschaffenheit, daß die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{n_k}\right)^{\frac{p}{2}}$, wo $p > 2$ eine gerade ganze Zahl bedeutet, beschränkt ist, so gehört jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ zur Klasse L_p.*

Für ein ungerades ganzes $p > 1$ gilt

Satz II. *Besitzt die Folge positiver ganzer Zahlen $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ die Eigenschaft, daß wenn $p_1 + p_2 = p$, stets $\sum_{k=1}^{p_1} n_{i_k} \neq \sum_{l=1}^{p_2} n_{j_l}$, so gehört jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare, einseitig beschränkte Funktion[2]) $f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos n_i x + b_i \sin n_i x)$ zur Klasse L_p.*

Dieser Satz ergibt sich durch Kombination der Ungleichungen

$$1) \qquad \frac{\left[\int_a^b [\varphi(x)]^{t_1} dx\right]^l}{\int_a^b [\varphi(x)]^{lt_2} dx} > \frac{\left[\int_a^b [\varphi(x)]^{t_2} dx\right]^l}{\int_a^b [\varphi(x)]^{lt_1} dx},$$

---

[1]) Meine Noten: I. Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **163** (1930), S. 251—252; II. Ein Satz über Fouriersche Reihen mit Lücken, *Math. Zeitschrift*, **34** (1932), S. 481—484; III. Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen, *diese Acta*, **7** (1934—35), S. 85—94; IV. Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse L_p für $p > 1$, *diese Acta*, **7** (1934—35), S. 175—176.

[2]) Beim Beweise des Satzes II setzen wir $f(x)$ nach unten beschränkt voraus.

wo $\varphi(x)$ eine im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetige, nichtnegative Funktion, $t_2 > t_1 > 0$, $l > 1$ ist[3]) und

$$2)\qquad \left|\int_0^{2\pi} [T_k(x)]^p\, dx\right| < C\left[\int_0^{2\pi} [T_k(x)]^{p-1}\, dx\right]^{\frac{p}{p-1}},$$

wo $T_k(x)$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom von der Form $a + \sum_{i=1}^{k} (a_i \cos n_i x + b_i \sin n_i x)$ bedeutet und die positive Konstante C von $T_k(x)$ unabhängig ist,

wenn $\varphi(x) = T_k(x) = S_{n_k}(x) - m$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $t_1 = 1$, $l = \frac{p}{p-1}$,

für t_2 der Reihe nach $\frac{p}{p-1}, \left(\frac{p}{p-1}\right)^2, \ldots, \left(\frac{p}{p-1}\right)^h, p-1$, wo $\left(\frac{p}{p-1}\right)^h < p-1 < \left(\frac{p}{p-1}\right)^{h+1}$, gesetzt wird; hierbei bedeutet $S_n(x)$ das n-te arithmetische Mittel der Fourier-Reihe von $f(x)$, m das Minimum von $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Satz I und II lassen sich unmittelbar auf fastperiodische Fourier-Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x)$, wo $\lambda_n > 0$, übertragen.[4])

(Eingegangen am 12. Juni 1935.)

---

[3]) Diese Ungleichung läßt sich ebenso beweisen, wie der Spezialfall $l = 2$ loc. cit. [1]), II.

[4]) Im Beweise treten dann an Stelle der arithmetischen Mittel der Fourier-Reihe von $f(x)$ ihre Bochnerschen Summierungspolynome. Für den Fall $l = 4$ ist die in Rede stehende Verallgemeinerung für Satz I schon in meiner Note: Verallgemeinerung der in meiner Arbeit „Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen" bewiesenen Sätze, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **166** (1932), S. 62—63 enthalten. Ein Spezialfall des dort ausgesprochenen Satzes wurde auch von den Herren Bochner und Jessen gefunden: Distribution Functions and Positive Definite Functions, *Annals of Math.*, **35** (1934), S. 252—257.