Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf „arithmetische".

Von TH. SKOLEM in Bergen.

Vor einigen Jahren hat K. GÖDEL bewiesen[1]), daß jede „rekursive" Relation „arithmetisch" ist. Dabei versteht er unter einer „rekursiven" Relation eine Gleichung, deren beide Seiten mit Hilfe von Funktionen aufgebaut sind, die allein unter Anwendung von primitiven Rekursionen und Einsetzungen gebildet sind. Eine primitive Rekursion ist die rekursive Definition einer Funktion φ durch das Schema[2])

$$\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$$
$$\varphi(k+1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(k, \varphi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n),$$

worin ψ und μ früher bekannte Funktionen sind. Andererseits ist unter einer „arithmetischen" Relation eine zu verstehen, die auf Grund der fünf logischen Operationen (Konjunktion, Disjunktion, Negation, Anwendung der All- und Seinszeichen) aus Gleichungen aufgebaut ist, deren Seiten durch Addition und Multiplikation gebildet sind. Dieser Satz von GÖDEL soll hier verallgemeinert werden.

Ich benutze im folgenden ein Prinzip, mit dessen Hilfe es möglich ist endliche Mengen von (nichtnegativen ganzen) Zahlen und auch endliche Mengen von Zahlenpaaren, Zahlentripeln u. s. w. gewissermaßen als Zahlen aufzufassen, d. h. das Prinzip gibt eine eineindeutige Beziehung zwischen den Zahlen selbst und den daraus gebildeten endlichen Mengen und Relationen. Ist N eine

---

[1]) K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I., *Monatshefte für Math. u. Phys.*, **38** (1931), S. 173—198, insb. S. 191—193.

[2]) L. c., S. 179.

endliche Menge von Zahlen — ihre Elemente mögen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ heißen —, so bilde ich die Zahl

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_m}$$

und sage, daß n der Menge N entspricht. Augenscheinlich ist dies Entsprechen gegenseitig eindeutig, da bekanntlich jede Zahl in einer und nur einer Art als Summe von Potenzen von 2 darstellbar ist. Der Beziehung $a \in N$ entspricht die Beziehung zwischen a und n, die dadurch ausgedrückt wird, daß a der Exponent einer der Potenzen von 2 ist, die in der Darstellung von n als Summe von Potenzen von 2 auftreten. Um dies genauer und einfacher auszudrücken, führe ich eine Funktion $\varepsilon(x, y)$ ein, welche nur die Werte 0 und 1 haben soll, so daß ich jede ganze nichtnegative Zahl n in der Form

$$n = \varepsilon(0, n) . 2^0 + \varepsilon(1, n) . 2^1 + \ldots + \varepsilon(r, n) . 2^r + \ldots$$

schreiben kann, wo die Summation rechts z. B. bis $r = n$ fortgesetzt wird. Dann ist $\varepsilon(r, n)$ stets und nur dann $= 1$, wenn r Element der Menge N ist, welche n entspricht, oder m. a. W. die Gleichung $\varepsilon(r, n) = 1$ ist die Übersetzung der Beziehung $r \in N$.

Hat man eine endliche Menge N von geordneten Zahlenpaaren (x, y), so entspricht dieser in ein-eindeutiger Weise eine Zahl n, wie folgt. Zuerst gibt die Gleichung

$$(1) \qquad \binom{x+y+1}{2} + \binom{x}{1} = z$$

ein ein-eindeutiges Entsprechen zwischen den Zahlenpaaren (x, y), wo x und y nichtnegativ sind, einerseits und den einzelnen nichtnegativen Zahlen z andererseits. Der Menge N von Paaren (x, y) entspricht dann zufolge (1) eine Menge M von einzelnen Zahlen z, und dieser entspricht wieder eine Zahl n in dem Sinne, daß $\varepsilon(z, n) = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem $z \in M$ ist oder nicht. Oder m. a. W. der Menge N von Paaren (x, y) entspricht die Zahl

$$n = \sum_z 2^z,$$

wo die Summation in bezug auf z über alle z ausgedehnt wird, die durch (1) geliefert werden, indem (x, y) die Menge N durchläuft. Der Beziehung $(x, y) \in N$ entspricht also die Gleichung

$$\varepsilon\left(\binom{x+y+1}{2} + \binom{x}{1}, n\right) = 1.$$

Ebenso entspricht jeder endlichen Menge N von geordneten Tripeln

(x, y, z) eine eindeutig bestimmte Zahl n derart, daß $(x, y, z) \in N$ mit

$$\varepsilon\left(\binom{x+y+z+2}{3}+\binom{x+y+1}{2}+\binom{x}{1}, n\right)=1$$

gleichbedeutend ist[3]) u. s. w.

Es ist leicht zu verstehen, wie man dies oft mit Vorteil benutzen kann, um Aussagen, worin Allzeichen oder Seinszeichen auftreten, die sich auf Klassen (von Zahlen) oder Relationen (zwischen Zahlen) beziehen, in Aussagen zu verwandeln, worin nur Allzeichen und Seinszeichen für Individuen (Zahlen) vorkommen. Das wird nämlich stets möglich sein, wenn der elementare Aussagenkern eine solche Form hat, daß wenn die Existenz einer Klasse oder einer Relation behauptet wird, dies bedeutet, daß es eine endliche Klasse oder Relation gibt von gewisser Art; oder wenn die Allgemeingültigkeit für Klassen oder Relationen behauptet wird, das bedeutet, daß die Klasse oder Relation so und so beschaffen ist, wenn sie endlich ist. Daß eine Klasse (Menge einzelner Zahlen) oder Relation (Menge geordneter n-Tupel ganzer Zahlen) endlich ist, kann am einfachsten dadurch ausgedrückt werden, daß jede Zahl darin kleiner als eine gewisse Zahl ist.

Ich gebe zur Erläuterung ein Beispiel. Die folgende Aussage soll betrachtet werden: Zu jeder endlichen Menge M_1 und jeder endlichen Menge M_2 von ganzen Zahlen gibt es eine endliche Menge M_3 derart, daß $m_3 \in M_3$ stets und nur dann, wenn es ein $m_1 \in M_1$ und ein $m_2 \in M_2$ gibt, so daß $m_1 + m_2 = m_3$ ist. Augenscheinlich ist diese Aussage wahr. M_3 ist die Menge aller Summen $m_1 + m_2$, wo $m_1 \in M_1$ und $m_2 \in M_2$. In logischen Symbolen kann sie so geschrieben werden, wenn ich den Variationsbereich der Mengensymbole auf die endlichen Mengen beschränke:

$$(2)\quad (M_1, M_2)(EM_3)(m_3)\{(Em_1, m_2)((m_1 \in M_1) \,\&\, \&\,(m_2 \in M_2) \,\&\, (m_3 = m_1 + m_2)) \rightleftarrows (m_3 \in M_3)\}.$$

Will man die Aussage so schreiben, daß der Variationsbereich der Mengen der Bereich aller Zahlenmengen ist, so muß das Prädikat $\mathcal{E}(M)$, d. h. M ist endlich, besonders eingeführt werden. Dann nimmt sie die folgende Gestalt an:

---

3) Im folgenden schreibe ich statt $\varepsilon\left(\binom{x+y+1}{2}+\binom{x}{1}, n\right)=1$, $\varepsilon\left(\binom{x+y+z+2}{3}+\binom{x+y+1}{2}+\binom{x}{1}, n\right)=1$, u. s. w., kürzer $\varepsilon(x, y, n)=1$, $\varepsilon(x, y, z, n)=1$, u. s. w.

$$(M_1, M_2)\,[\mathcal{S}(M_1) \,\&\, \mathcal{S}(M_2) \rightarrow (EM_3)(\mathcal{S}(M_3) \,\&$$
$$\&\,(m_3)\{(Em_1, m_2)((m_1 \in M_1) \,\&\, (m_2 \in M_2) \,\&\, (m_3 = m_1 + m_2)) \rightleftarrows (m_3 \in M_3)\})].$$

Hier kann man $\mathcal{S}(M)$ durch die Aussage $(Ey)(x)((x \in M) \rightarrow (x < y))$ ersetzen. Dann bekommt man eine Aussage, worin teils einige Individuenvariablen vorkommen, und teils einige Mengenvariablen, wobei für die letzteren also die Gesamtheit aller Zahlenmengen der Variationsbereich ist. Nach dem eben erklärten Prinzip ist es aber klar, daß (2) mit der folgenden Aussage

$$(3)\quad (z_1, z_2)(Ez_3)(m_3)\,[(Em_1, m_2)((\varepsilon(m_1, z_1) = 1) \,\&$$
$$\&\,(\varepsilon(m_2, z_2) = 1) \,\&\, (m_3 = m_1 + m_2)) \rightleftarrows (\varepsilon(m_3, z_3) = 1)]$$

gleichwertig ist, und in (3) kommen ausschließlich Zahlenvariablen vor.

Für die Reduktion rekursiver Definitionen auf explizite, welche ich hier durchführe, ist es besonders wichtig zu bemerken, daß die Funktion $\varepsilon(x, y)$ eine rekursive ist, und zwar ist $\varepsilon(x, y)$ durch primitive Rekursionen definierbar. Zuerst kann man die folgende Definition aufstellen, indem gleichzeitig eine Hilfsfunktion $\lambda(n)$ eingeführt wird, und sonst auch die Funktionen 2^x, $\iota(x, y)$, $\operatorname{sg} x$, $\left[\frac{n}{2}\right]$ und $\dot{-}$ benutzt werden, die man bei R. Péter[4]) findet:

$$(4)\quad \begin{aligned} &\lambda(0) = 0,\ \lambda(n+1) = \lambda\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + 1 \\ &\varepsilon(r, 0) = 0,\ \varepsilon(r, n+1) = \iota(r, \lambda(n)) + \\ &\qquad + \varepsilon(r, n+1 \dot{-} 2^{\lambda(n)})\operatorname{sg}(\lambda(n) \dot{-} r). \end{aligned}$$

Man erkennt, daß $\lambda(n)$ nichts anderes ist als $\left[\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right]$. Offenbar sind λ und ε durch Wertverlaufsrekursionen definiert; nach Péter lassen sich aber diese auf primitive Rekursionen zurückführen. Die Beziehungen $\varepsilon(x, y) = 0$ und $\varepsilon(x, y) = 1$ sind deshalb „arithmetisch".

Es wird nun aus dem folgenden hervorgehen, daß alle Beziehungen, welche mittels Rekursionen mit lauter freien Zahlenvariablen konstruierbar sind, „arithmetisch" sind, und oft gilt das auch dann, wenn gebundene Variablen in den Rekursionen auftreten. Ich zeige das dadurch, daß ich zu jeder rekursiven Beziehung

---

[4]) R. Péter, Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen,* **110** (1934), S. 612—632.

eine äquivalente Beziehung finde, die auf Grund früherer arithmetischer Beziehungen und Gleichungen $\varepsilon(x, y) = 1$ unter Anwendung der fünf logischen Operationen aufgebaut ist.

Zuerst will ich die primitiven Rekursionen behandeln, trotzdem diese schon durch den Gödelschen Satz vollständig erledigt sind. Es seien also $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $\chi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ schon bekannte Funktionen, und es sei schon bekannt, daß die Gleichungen $y = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $y = \chi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ „arithmetische" Aussagen sind. Es wird eine Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ rekursiv definiert durch das Schema

$$(5)\qquad \begin{aligned} \varphi(0, x_2, \ldots, x_n) &= \psi(x_2, \ldots, x_n) \\ \varphi(k+1, x_2, \ldots, x_n) &= \chi(k, \varphi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Wir können dann für jede ganze positive Zahl ν die endlichen Mengen M von $(n+1)$-tupeln $(x_1, \ldots, x_n, y)$ betrachten, für welche die Konjunktion $A(\nu, M)$ der folgenden Aussagen

1) $(x_1, \ldots, x_n, y)\,[((x_1, \ldots, x_n, y) \in M) \rightarrow$
$\rightarrow (x_1 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu)]$

2) $(x_2, \ldots, x_n)\,[(x_2 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (\psi(x_2, \ldots, x_n) \leqq \nu) \rightarrow$
$\rightarrow ((0, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_2, \ldots, x_n)) \in M)]$

3) $(x_1, \ldots, x_n, y, z)\,[((x_1, \ldots, x_n, y) \in M) \,\&\, (z = \chi(x_1, y, x_2, \ldots, x_n)) \,\&$
$\& \,(x_1 + 1 \leqq \nu) \,\&\, (z \leqq \nu) \rightarrow ((x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n, z) \in M)]$

gilt. Dann kann ich zweierlei beweisen:

I. Ist $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, so gibt es eine Zahl μ derart, daß für alle $\nu \geqq \mu$ das $(n+1)$-tupel $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M$ ist für alle M, für welche $A(\nu, M)$ wahr ist, oder m. a. W. es gilt

$$(y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \rightarrow (E\mu)\,(\nu, M)\,[(\nu \geqq \mu) \,\&\, A(\nu, M) \rightarrow \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)].$$

II. Ist $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M$, so oft $A(\nu, M)$ stattfindet für irgendein ν, so ist $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, oder m. a. W. man hat

$$(M)\,(A(\nu, M) \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)) \rightarrow (y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

B e w e i s v o n I. Die Behauptung ist wahr für $x_1 = 0$ und beliebige Werte von $x_2, \ldots, x_n$. Denn ist $y = \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)$, so ist $y = \psi(x_2, \ldots, x_n)$, und ist z. B. $\mu = \max(\psi(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$, so folgt nach 2), daß $(0, x_2, \ldots, x_n, y) \in M$ ist, so oft $\nu \geqq \mu$ ist, und $A(\nu, M)$ gilt. Die Behauptung sei wahr für $x_1, \ldots, x_n$. Dann gibt es also eine Zahl μ derart, daß wenn $\nu \geqq \mu$ ist, und $A(\nu, M)$ gilt, $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M$ ist, wenn $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Nun sei

$z=\varphi(x_1+1, x_2, \ldots, x_n)$ und $\mu'=\max(\mu, z, x_1+1)$. Dann erkennt man, wenn man (5) und 3) ansieht, daß so oft $(\nu \geqq \mu') \& A(\nu, M)$ gilt, $(x_1+1, x_2, \ldots, x_n, z) \in M$ ist. Hierdurch ist I bewiesen.

Beweis von II. Es sei M_ν die endliche Menge von $(n+1)$-tupeln $(x_1, \ldots, x_n, y)$, wo $y=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, die man erhält, wenn man für $x_1, \ldots, x_n$ alle solchen Zahlen $\geqq 0$ und $\leqq \nu$ einsetzt, daß auch $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqq \nu$ bleibt. Dann gilt $A(\nu, M_\nu)$. Gibt es ein ν derart, daß immer $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M$ ist, wenn $A(\nu, M)$ stattfindet, so ist deshalb $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M_\nu$ und folglich $y=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Hierdurch ist II bewiesen.

Aus I und II folgt offenbar, daß die Gleichung $y=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, wenn φ durch (5) definiert wird, mit der Aussage

$$(E\mu)(\nu, M)[(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, M) \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)]$$

gleichbedeutend ist. Diese ist wiederum mit

$$(6) \qquad (E\mu)(\nu, u)[(\nu \geqq \mu) \& A^*(\nu, u) \rightarrow (\varepsilon(x_1, \ldots, x_n, y, u)=1)]$$

gleichwertig, wobei $A^*(\nu, u)$ aus $A(\nu, M)$ erhalten wird dadurch, daß man M durch u ersetzt und zugleich $\varepsilon(t_1, \ldots, t_m, u)=1$ statt $(t_1, \ldots, t_m) \in M$ schreibt. Da die Aussagen $\varepsilon(t_1, \ldots, t_m, u)=1$ „arithmetisch" sind, und die Gleichungen $y=\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $z=\chi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ als „arithmetisch" vorausgesetzt wurden, so ist $A^*(\nu, u)$ „arithmetisch" und also auch (6).

Hiernach soll die Rekursion behandelt werden, die von R. PÉTER angegeben ist[5]) zur Vereinfachung des Ackermannschen Beispiels einer Funktion, die nicht mittels primitiver Rekursionen definierbar ist. Die Pétersche Funktion $\varphi(m, n)$ wird so definiert:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \varphi(0, n) &= 2n+1 \\ \varphi(m+1, 0) &= \varphi(m, 1) \\ \varphi(m+1, n+1) &= \varphi(m, \varphi(m+1, n)). \end{aligned}$$

Es sollen die endlichen Tripelmengen T betrachtet werden, für welche die Aussage $A(\nu, T)$ gilt, welche die Konjunktion der folgenden vier Aussagen ist:

1) $(x, y, z)[((x, y, z) \in T) \rightarrow (x \leqq \nu) \& (y \leqq \nu) \& (z \leqq \nu)]$
2) $(x)[(2x+1 \leqq \nu) \rightarrow ((0, x, 2x+1) \in T)]$
3) $(x, y)[(x+1 \leqq \nu) \& ((x, 1, y) \in T) \rightarrow ((x+1, 0, y) \in T)]$
4) $(x, y, z, u)[(y+1 \leqq \nu) \& ((x+1, y, z) \in T) \& ((x, z, u) \in T) \rightarrow$
$\rightarrow ((x+1, y+1, u) \in T)]$.

[5]) R. PÉTER, Konstruktion nicht-rekursiver Funktionen, *Math. Annalen*, 111 (1935), S. 42—60.

Dann kann ich wieder zweierlei beweisen:

I. Man hat

$$(z = \varphi(x, y)) \to (E\mu)(\nu, T)[(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T) \to ((x, y, z) \in T)].$$

II. Es gilt

$$(T)[A(\nu, T) \to ((x, y, z) \in T)] \to (z = \varphi(x, y)).$$

Beweis von I. Die Richtigkeit für $x = 0$ und beliebiges y erkennt man sofort; denn setzt man z. B. $\mu = 2y + 1$, so hat man

$$(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T) \to ((0, y, 2y + 1) \in T)$$

für alle ν und T zufolge 2). Ich nehme an, daß I schon bewiesen ist für x und beliebiges y. Dann soll zuerst gezeigt werden, daß I für $(x + 1, 0)$ gilt. Nach der Annahme gibt es also ein μ derart, daß $(x, 1, \varphi(x, 1)) \in T$ ist, wenn $A(\nu, T)$ gilt, und $\nu \geqq \mu$ ist. Ist $\mu' = \max(\mu, x + 1)$, so erkennt man beim Anblick von 3), daß

$$(x + 1, 0, \varphi(x + 1, 0)) \in T$$

sein wird, so oft $\nu \geqq \mu'$ ist und $A(\nu, T)$ gilt. Jetzt nehme ich an, daß I schon bewiesen ist für $x + 1$ und alle y kleiner als ein gewisses $y + 1$. Nach der Annahme gibt es dann eine Zahl μ_1, so daß

$$(x + 1, y, \varphi(x + 1, y)) \in T$$

aus $(\nu \geqq \mu_1) \& A(\nu, T)$ folgt. Weiter gibt es ein μ_2, so daß

$$(x, \varphi(x + 1, y), \varphi(x + 1, y + 1)) \in T$$

aus $(\nu \geqq \mu_2) \& A(\nu, T)$ folgt. Setzt man nun $\mu = \max(\mu_1, \mu_2, y + 1)$, so folgt aus $(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T)$ die Wahrheit der Konjunktion

$$(y + 1 \leqq \nu) \& ((x + 1, y, \varphi(x + 1, y)) \in T) \&$$
$$\& ((x, \varphi(x + 1, y), \varphi(x + 1, y + 1)) \in T).$$

Beim Anblick von 4), die ja wahr ist, wenn $A(\nu, T)$ gilt, erkennt man, daß

$$(x + 1, y + 1, \varphi(x + 1, y + 1)) \in T$$

aus $(\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T)$ folgt. Also gilt I auch für $x + 1$ und alle y und gilt also allgemein.

Beweis von II. Es sei T_ν die endliche Menge von Tripeln (x, y, z), wo $z = \varphi(x, y)$, und x, y, z alle $\leqq \nu$ sind. Dann gilt $A(\nu, T_\nu)$. Gibt es ein ν derart, daß für alle T immer $(x, y, z) \in T$ ist, wenn $A(\nu, T)$ gilt, so ist $(x, y, z) \in T_\nu$, woraus folgt, daß $z = \varphi(x, y)$ ist.

Aus I und II folgt, daß $z = \varphi(x, y)$, wenn φ durch (7) definiert wird, mit der Aussage

$$(E\mu)(\nu, T)[\nu \geqq \mu) \& A(\nu, T) \rightarrow ((x, y, z) \in T)]$$

gleichbedeutend ist. Diese kann wieder durch die Aussage

$$(8) \qquad (E\mu)(\nu, v)[(\nu \geqq \mu) \& A^*(\nu, v) \rightarrow (\varepsilon(x, y, z, v) = 1)]$$

ersetzt werden, wo A^* aus A erhalten wird, wenn darin T durch v und jede Beziehung $(t_1, t_2, t_3) \in T$ durch $\varepsilon(t_1, t_2, t_3, v) = 1$ ersetzt wird. Hierdurch ist bewiesen, daß $z = \varphi(x, y)$ eine „aritmetische" Beziehung ist.

In ähnlicher Weise wäre es leicht weitere Beispiele zu behandeln; man sieht leicht ein, daß das Beweisverfahren auf alle Rekursionen mit lauter freien Variablen angewandt werden kann. Indessen möchte ich versuchen, eine allgemeine Formulierung zu geben. Das enthält eine gewisse Schwierigkeit, weil die erwähnten Rekursionen sehr verschiedene Strukturen haben können. Ich zeige deshalb zuerst, wie man diese Rekursionen auf eine gewisse Art von Rekursionen zurückführen kann, worin gebundene Variablen auftreten, aber so, daß bloss Seinszeichen vorkommen und zwar im definiens. Wie diese Zurückführung zu verstehen ist und gemacht werden kann, zeige ich zuerst durch einige Beispiele.

Betrachtet man das Schema der primitiven Rekursionen

$$\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$$
$$\varphi(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n) = \chi(x_1, \varphi(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n),$$

so erkennt man leicht, daß diese Rekursion gleichwertig ist mit der rekursiven Definition der Aussagenfunktion $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ durch das Schema

$$(y = \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)) \rightleftarrows (y = \psi(x_2, \ldots, x_n))$$
$$(9) \qquad (y = \varphi(x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n)) \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows (Ez)\big((y = \chi(x_1, z, x_2, \ldots, x_n)) \& (z = \varphi(x_1, \ldots, x_2))\big).$$

Ebenso ist die Definition der Péterschen Funktion $\varphi(m, n)$ gleichwertig mit der Definition der Aussagenfunktion $z = \varphi(x, y)$ durch das Schema

$$(z = \varphi(0, y)) \rightleftarrows (z = 2y + 1)$$
$$(10) \qquad (z = \varphi(x + 1, 0)) \rightleftarrows (z = \varphi(x, 1))$$
$$(z = \varphi(x + 1, y + 1)) \rightleftarrows (Eu)\big((z = \varphi(x, u)) \& (u = \varphi(x + 1, y))\big).$$

Betrachtet man die weitläufigere Rekursion

$$\varphi(0, y) = \alpha(y)$$
$$\varphi(x + 1, 0) = \beta\big(x, \varphi(x, a_1), \varphi(x, \varphi(x, a_2))\big)$$
$$\varphi(x + 1, y + 1) = \gamma(x, \varphi(x, \delta_1(y)), \varphi(\delta_2(x), \varphi(x, b)), \varphi(x + 1, y)),$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2$ früher bekannte Funktionen, a_1, a_2 und b Konstanten, und $\delta_2(t) \leqq t$ für alle t, so ist diese mit der rekursiven Definition der Aussagenfunktion $z = \varphi(x, y)$ mittels des Schemas

$$(z = \varphi(0, y)) \rightleftarrows (z = \alpha(y))$$

$$\begin{aligned} &(z = \varphi(x+1, 0)) \rightleftarrows (Eu, v, w) \left[(z = \beta(x, u, w)) \mathbin{\&} \right. \\ (11) \qquad &\qquad \mathbin{\&} (u = \varphi(x, a_1)) \mathbin{\&} (v = \varphi(x, a)) \mathbin{\&} \left.(w = \varphi(x, v))\right] \\ &(z = \varphi(x+1, y+1)) \rightleftarrows (Et, u, v, w) \left[(z = \gamma(x, t, v, w)) \mathbin{\&} \right. \\ &\qquad \mathbin{\&} \big(t = \varphi(x, \delta_1(y))\big) \mathbin{\&} (u = \varphi(x, b)) \mathbin{\&} (v = \varphi(\delta_2(x), u)) \mathbin{\&} \\ &\qquad\qquad \mathbin{\&} \left.(w = \varphi(x+1, y))\right] \end{aligned}$$

gleichwertig. Alle drei Schemata (9), (10), (11) sind nun in einem allgemeinen Schema enthalten, das ich jetzt erklären will.

Wir können alle n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ der ganzen nichtnegativen Zahlen lexikographisch ordnen, d. h. wir setzen

$$(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n),$$

wenn es ein $\nu \geqq 0$ und $< n$ gibt derart, daß $a_i = b_i$ ist für alle $i \leqq \nu$, während $a_{\nu+1} < b_{\nu+1}$ ist. Dann setzen wir, indem $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ eine zu definierende Aussagenfunktion ist,

$$(12) \qquad F(x_1, \ldots, x_n, y) \rightleftarrows (Ez_1, \ldots, z_m)\, U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m),$$

wobei U durch Konjunktion aufgebaut ist teils aus früher bekannten Aussagenfunktionen von den (oder einigen der) Variablen $x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m$ und teils aus Aussagenfunktionen $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$, wo $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta$ solche zahlentheoretische Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, $y, z_1, \ldots, z_m$ sind, daß $(\xi_1, \ldots, \xi_n) < (x_1, \ldots, x_n)$ ist abgesehen vom Falle $x_1 = \ldots = x_n = 0$, wo keine Funktion $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ auftritt; übrigens ist es oft möglich, daß auch in anderen Fällen keine Funktion $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ vorkommt.

Man erkennt sofort, daß (9), (10) und (11) Sonderfälle von (12) sind, und es ist nicht schwer einzusehen, daß alle Rekursionen mit freien Variablen, sowohl einfache wie mehrfache, in analoger Weise auf eine Rekursion der Form (12) zurückführbar sind. Man kann ja erstens statt der rekursiven Definition von $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ durch Gleichungen die Aussagenfunktion $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ durch Äquivalenzen definieren. Zweitens kann man in den in den Gleichungen rechts stehenden Ausdrücken (definiens) von innen damit anfangen, die dort vorkommenden zahlentheoretischen Funktionen schrittweise durch besondere Variable zu ersetzen, die Definition dieser Variablen konjunktiv hinzufügen und dieselben Variablen durch Seinszeichen binden. Es ist deshalb klar, daß wir einen allgemeinen Beweis dafür erhalten, daß die Rekursionen mit lauter freien Zahlenvariablen nur „arithmetische" Beziehungen liefern, wenn wir beweisen können, daß die durch (12) definierte Aussagenfunktion $F(x_1, \ldots, x_n\, y)$ „arithmetisch" ist. In der Tat kann nun der etwas allgemeinere Satz bewiesen werden:

Satz: *Ist der Ausdruck U in* (12) *durch Konjunktion und Disjunktion aufgebaut aus früher bekannten „arithmetischen" Aussagenfunktionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m$ und Funktionen $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$, wo $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta$ solche zahlentheoretische Funktionen $f_1, \ldots, f_n, f$ von $x_1, \ldots, z_m$ sind, daß $(\xi_1, \ldots, \xi_n) < (x_1, \ldots, x_n)$ ist, während die Gleichungen $\xi_1 = f_1(x_1, \ldots, z_m), \ldots, \xi_n = f_n(x_1, \ldots, z_m)$, $\eta = f(x_1, \ldots, z_m)$ „arithmetische" Beziehungen sind, so ist $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ eine „arithmetische" Aussagenfunktion.*

Beweis: Für jede ganze nichtnegative Zahl ν und jede endliche Menge M von $(n+1)$-tupeln nichtnegativer ganzer Zahlen soll $A(\nu, M)$ die Konjunktion der beiden Aussagen

$$1)\quad (x_1, \ldots, x_n, y)\Big(((x_1, \ldots, x_n, y) \in M) \to (x_1 \leqq \nu) \,\&\ldots\& \\ \&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu)\Big)$$

$$2)\quad (x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m)\,(U_*(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m) \,\& \\ \&\, (x_1 \leqq \nu) \,\&\ldots\&\, (y \leqq \nu) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M))$$

sein. Hier bedeutet U_* die Aussagenfunktion, welche aus U entsteht, wenn darin jede Aussage $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ durch $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta) \in M$ ersetzt wird. Mittels vollständiger Induktion können jetzt folgende Tatsachen I und II bewiesen werden:

$$\text{I.}\quad F(x_1, \ldots, x_n, y) \to \\ \to (E\mu)(\nu, M)\,[(\nu \geqq \mu) \,\&\, A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)]$$

$$\text{II.}\quad (M)\,[A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)] \to F(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Beweis von I. Zuerst kann man die Richtigkeit von I für $x_1 = \ldots = x_n = 0$ dadurch einsehen, daß man die Richtigkeit von

$$F(0, \ldots, 0, y) \to (\nu, M)\,[(\nu \geqq y) \,\&\, A(\nu, M) \to ((0, \ldots, 0, y) \in M)]$$

oder mit lauter freien Variablen geschrieben

$$F(0, \ldots, 0, y) \to ((y \leqq \nu) \,\&\, A(\nu, M) \to ((0, \ldots, y) \in M))$$

beweist. Das kann so gemacht werden:

Zufolge (12) hat man

$$F(0, \ldots, 0, y) \to (Ez_1, \ldots, z_m)\, U(0, \ldots, 0, y, z_1, \ldots, z_m)$$

und deshalb auch

(13) $F(0,\ldots,0,y) \rightarrow (Ez_1,\ldots,z_m)\, U_*(0,\ldots,0,y,z_1,\ldots,z_m)$,

da nach einer obigen Bemerkung U_* sich von U nicht unterscheidet für $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Nach 2) hat man aber

$$A(\nu,M) \rightarrow (y,z_1,\ldots,z_m)\big(U_*(0,\ldots,0,y,z_1,\ldots,z_m) \,\&\, (y \leqq \nu) \rightarrow \\ \rightarrow ((0,\ldots,0,y) \in M)\big)$$

oder mit lauter freien Variablen geschrieben

$$A(\nu,M) \rightarrow \big(U_*(0,\ldots,0,y,z_1,\ldots,z_m) \,\&\, (y \leqq \nu) \rightarrow ((0,\ldots,0,y) \in M)\big)$$

oder wenn man will

(14) $A(\nu,M) \,\&\, (y \leqq \nu) \,\&\, U_*(0,\ldots,0,y,z_1,\ldots,z_m) \rightarrow \rightarrow ((0,\ldots,0,y) \in M)$.

Aus (13) und (14) folgt aber augenscheinlich

$$F(0,\ldots,0,y) \,\&\, A(\nu,M) \,\&\, (y \leqq \nu) \rightarrow ((0,\ldots,y) \in M)$$

oder wenn man will

$$F(0,\ldots,0,y) \rightarrow \big(A(\nu,M) \,\&\, (y \leqq \nu) \rightarrow ((0,\ldots,0,y) \in M)\big),$$

wie behauptet.

Danach setze ich voraus, daß die Richtigkeit von I schon erkannt ist für alle $\xi_1,\ldots,\xi_n,y$ (d. h. wenn $\xi_1,\ldots,\xi_n$ statt $x_1,\ldots,x_n$ geschrieben werden), für welche $(\xi_1,\ldots,\xi_n) < (x_1,\ldots,x_n)$ ist. Auf Grund dieser Voraussetzung soll die Richtigkeit von I für $(x_1,\ldots,x_n,y)$ bewiesen werden. Offenbar genügt es zu zeigen, daß für eine Zahl μ, welche von ν und M unabhängig, nämlich durch $x_1,\ldots,x_n,y$ bestimmt ist, die Formel

$$F(x_1,\ldots,x_n,y) \rightarrow \big(A(\nu,M) \,\&\, (\nu \geqq \mu) \rightarrow ((x_1,\ldots,x_n,y) \in M)\big)$$

für beliebige Werte von ν und M gilt. Aus (12) folgt

$$F(x_1,\ldots,x_n,y) \rightarrow (Ez_1,\ldots,z_m)\, U(x_1,\ldots,x_n,y,z_1,\ldots,z_m).$$

Statt dessen kann ich schreiben

(15) $F(x_1,\ldots,x_n,y) \rightarrow U(x_1,\ldots,x_n,y,z_1^{(0)},\ldots,z_m^{(0)})$,

wobei $(z_1^{(0)},\ldots,z_m^{(0)})$ das lexikographisch kleinste unter den zulässigen m-tupeln $(z_1,\ldots,z_m)$ ist. In U kommt eine Anzahl l von Aussagen $F(\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta)$ vor (mitunter ist, wie früher bemerkt, $l=0$); die l betreffenden $(n+1)$-tupel $(\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta)$ seien durch obere Indizes unterschieden, also als $\xi_1^{(i)},\ldots,\xi_n^{(i)},\eta^{(i)}$ bezeichnet. Nach der Annahme gibt es für jedes i ein durch $\xi_1^{(i)},\ldots,\xi_n^{(i)},\eta^{(i)}$ bestimmtes μ_i derart, daß die Formel

(16) $F(\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}) \,\&\, A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu_i) \rightarrow ((\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}) \in M)$
gilt. Nun setze ich

(17) $$\mu = \max(\mu_1, \ldots, \mu_l, x_1, \ldots, x_n, y).$$

Dann ist μ eine durch $x_1, \ldots, x_n, y$ allein bestimmte Zahl; denn jedes μ_i ist durch $\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}$ bestimmt, die aber wiederum als gewisse Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, y, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}$ gegeben sind, und $z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}$ sind durch $x_1, \ldots, x_n, y$ bestimmt. Ist $\nu \geqq \mu$, so ist nach (17) $\nu \geqq \mu_i$ für alle i, und folglich gilt für alle i

$$A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu) \rightarrow \big(F(\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}) \rightarrow ((\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}, \eta^{(i)}) \in M)\big).$$

Hieraus folgt, da U durch Konjunktion und Disjunktion allein aufgebaut ist,

$$A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu) \rightarrow (U(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \rightarrow U_*(x_1, \ldots, z_m^{(0)}))$$

oder

(18) $$U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}) \,\&\, A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu) \rightarrow$$
$$\rightarrow U_*(x_1, \ldots, x_n, y, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}).$$

Aus (17) folgt aber auch $(\nu \geqq \mu) \rightarrow (x_1 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu)$. Deshalb folgt aus (18) offenbar

(19) $$U(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \,\&\, A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu) \rightarrow$$
$$\rightarrow U_*(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \,\&\, (x_1 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu).$$

Zufolge 2) hat man indessen

(20) $$U_*(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \,\&\, (x_1 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu) \rightarrow$$
$$\rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M).$$

Aus (19) und (20) bekommt man

(21) $$U(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \,\&\, A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu) \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M).$$

Andererseits bekommt man aus (15)

(22) $$F(x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu) \rightarrow$$
$$\rightarrow (U(x_1, \ldots, z_m^{(0)}) \,\&\, A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu))$$

und aus (21) und (22) wieder

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, A(\nu, M) \,\&\, (\nu \geqq \mu) \rightarrow ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M),$$

was mit der Behauptung übereinstimmt. Hierdurch ist I bewiesen[6]).

B e w e i s v o n II. Es sei M_ν die Menge aller $(n+1)$-tupel $(x_1, \ldots, x_n, y)$, für welche $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ wahr ist, und außerdem $x_1, \ldots, x_n, y$ alle $\leqq \nu$ sind. Dann ist $A(\nu, M_\nu)$ eine richtige

[6]) In der erklärten lexikographischen Anordnung bilden ja die n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ eine wohlgeordnete Menge.

Aussage. In der Tat ist es sofort klar, daß 1) gilt, wenn M_ν statt M geschrieben wird. Daß auch 2) gilt, erkennt man so. Es sei für gewisse Zahlen $x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m$ die Aussage

$$U_*(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m) \,\&\, (x_1 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu)$$

wahr. Aus $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta) \in M_\nu$ folgt $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$, und deshalb folgt $U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m)$ aus $U_*(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m)$. Also gilt

$$U(x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m) \,\&\, (x_1 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu),$$

woraus zufolge (12)

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, (x_1 \leqq \nu) \,\&\, \ldots \,\&\, (x_n \leqq \nu) \,\&\, (y \leqq \nu),$$

woraus $(x_1, \ldots, x_n, y) \in M_\nu$. Also ist 2) und also auch $A(\nu, M_\nu)$ richtig.

Nun hat man

$$(M)\big(A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big) \to \big(A(\nu, M_\nu) \to ((x_1, \ldots, x_1, y) \in M_\nu)\big),$$

woraus, da $A(\nu, M_\nu)$ richtig ist,

$$(23) \quad (M)\big(A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M_\nu),$$

und andererseits hat man nach der Definition von M_ν augenscheinlich

$$(24) \qquad ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M_\nu) \to F(x_1, \ldots, x_n, y),$$

und aus (23) und (24) folgt die Richtigkeit von II.

Nun ist offenbar die Implikation

$$(25) \quad (E\mu)(\nu, M)\big((\nu \geqq \mu) \,\&\, A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big) \to$$
$$\to (E\mu)(M)\big(A(\mu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big)$$

richtig, und aus II folgt andererseits

$$(26) \quad (E\mu)(M)(A(\mu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)) \to F(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Aus (25) und (26) folgt

$$\text{II}'. \quad (E\mu)(\nu, M)\big((\nu \geqq \mu) \,\&\, A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big) \to$$
$$\to F(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Aus I und II′ folgt, daß $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ äquivalent ist mit der Aussage

$$(E\mu)(\nu, M)\big((\nu \geqq \mu) \,\&\, A(\nu, M) \to ((x_1, \ldots, x_n, y) \in M)\big).$$

Stellt nun wie früher $A^*(\nu, u)$ die Aussage dar, die aus $A(\nu, M)$ erhalten wird, wenn M durch die Zahlvariable u ersetzt wird, während jede Beziehung $(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in M$ durch $\varepsilon(t_1, \ldots, t_{n+1}, u) = 1$ ersetzt wird, so ist also $F(x_1 \ldots, x_n, y)$ auch mit der Aussage

$$(27) \quad (E\mu)(\nu, u)\big((\nu \geqq \mu) \,\&\, A^*(\nu, u) \rightarrow (\varepsilon(x_1, \ldots, x_n, y, u) = 1)\big)$$

äquivalent. Diese Aussage ist aber eine „arithmetische"; denn abgesehen von den Aussagen der Form $\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, u) = 1$ kommen in U_* und also in $A^*(\nu, u)$ nach der Voraussetzung bloß früher bekannte „arithmetische" Aussagenfunktionen vor. Außerdem ist $\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, u) = 1$ eine „arithmetische" Aussagenfunktion von $x_1, \ldots, x_n, y, z_1, \ldots, z_m$, weil nach Voraussetzung $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta$ sämtlich solche zahlentheoretische Funktionen von $x_1, \ldots, z_m$ sind, daß

$$\xi_1 = f_1(x_1, \ldots, z_m), \ldots, \xi_n = f_n(x_1, \ldots, z_m), \quad \eta = f(x_1, \ldots, z_m)$$

„arithmetische" Beziehungen sind. Wenn man will, kann man ja statt $\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, u) = 1$

$$(E\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)\,[(\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta, u) = 1) \,\&$$
$$\& \,(\xi_1 = f_1(x_1, \ldots, z_m)) \,\&\, \ldots \,\&\, (\eta = f(x_1, \ldots, z_m))]$$

schreiben. Hierdurch ist die Richtigkeit des Satzes vollständig bewiesen.

Man erkennt leicht, daß der Beweis nicht mehr durchführbar ist, wenn in U auch negierte F vorkommen; die Implikation $U \rightarrow U_*$ (vgl. S. 84.) ist nämlich dann nicht mehr beweisbar. In der Tat gilt der Satz dann auch nicht mehr. In einem Briefe hat mir nämlich Herr L. Kalmár in Szeged einen Beweis dafür mitgeteilt, daß hinreichend weitläufige Rekursionen mit gebundenen Variablen nicht mehr zu „arithmetischen" Aussagenfunktionen führen. Das Kalmársche Beispiel ist eine Rekursion der Form

$$(28) \qquad H(n, x) \begin{cases} \overline{\overline{\gtrless}}\, G\left(\frac{n}{3}, x\right), & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \overline{\overline{\gtrless}}\, (y)\, H\left(\left[\frac{n}{3}\right], u(x, y)\right), & \text{falls } n \equiv 1 \pmod 3 \\ \overline{\overline{\gtrless}}\, (Ey)\, H\left(\left[\frac{n}{3}\right], u(x, y)\right), & \text{falls } n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

wobei $u(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + \binom{x}{1}$ ist, und G eine gewisse früher konstruierte „arithmetische" Aussagenfunktion ist, nämlich eine solche, daß unter $G(1, x), G(2, x), \ldots, G(n, x), \ldots$ sämtliche „arithmetische" Aussagenfunktionen ohne gebundene Variablen und mit x als einzigen freien Variablen vorkommen. Man bemerkt aber, daß in (28) rechts sowohl Allzeichen wie Seinszeichen auftreten. Man kann nun (28) durch eine andere Rekursion ersetzen derart, daß rechts nur Seinszeichen auftreten. Definiert man nämlich die Aussagenfunktion K so:

$$\begin{aligned} & K(3m, x) \rightleftarrows H(3m, x) \\ (29) \qquad & K(3m+1, x) \rightleftarrows \overline{H}(3m+1, x) \\ & K(3m+2, x) \rightleftarrows H(3m+2, x), \end{aligned}$$

so kann (28) ersetzt werden durch

$$(30) \qquad K(n, x) \begin{cases} \rightleftarrows G\left(\frac{n}{3}, x\right), \text{ wenn } n \equiv 0 \pmod 3 \\ \rightleftarrows (Ey)\, \overline{H}\left(\left[\frac{n}{3}\right], u(x, y)\right), \text{ wenn } n \equiv 1 \pmod 3 \\ \rightleftarrows (Ey)\, H\left(\left[\frac{n}{3}\right], u(x, y)\right), \text{ wenn } n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

und in den beiden letzten Äquivalenzen ist rechts H durch K zu ersetzen zufolge der Beziehung (29). D. h. ist $\left[\frac{n}{3}\right] \equiv 0$ oder $\left[\frac{n}{3}\right] \equiv 2$ (mod 3), so steht in den beiden letzten Äquivalenzen (30) einfach K statt H; ist aber $\left[\frac{n}{3}\right] \equiv 1$ (mod 3), so steht $\overline{K}$ statt H. Augenscheinlich ist (30) eine Rekursion, worin nur Seinszeichen rechts auftreten; es tritt aber die Negation der zu definierenden Funktion K im definiens auf. Es ist also klar, daß die Voraussetzung im obigen Satz, daß U durch Konjunktion und Disjunktion allein aufgebaut war, nicht vernachlässigt werden kann, ohne daß der Satz aufhört richtig zu sein.

Auf die Tatsache, daß hinreichend weitlaufige Rekursionen mit gebundenen Variablen, nicht mehr „arithmetische“ Beziehungen zu liefern brauchen, hat schon P. Bernays in seiner Arbeit „Quelques points essentiels de la métamathématique“ [7]) aufmerksam gemacht. Das Beispiel, das er dort erwähnt, ist aber zu einfach. Er stellt die folgende Definition einer Aussagenfunktion ψ auf:

$$\begin{aligned} & \psi(k, 0) \rightleftarrows \mathfrak{A}(k) \\ & \psi(k, n+1) \rightleftarrows (Ex)\,(\psi(x, n) \,\&\, \mathfrak{B}(k, x, n)). \end{aligned}$$

Nach dem oben bewiesenen Satze liefert aber diese Rekursion nur eine „arithmetische“ Aussagenfunktion ψ, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ solche sind.

---

[7]) *L'Enseignement Mathématique*, **34** (1935), p. 70—95, insb. p. 90.

Jedoch scheint es, daß auch jede Rekursion, worin gebundene Variablen auftreten, zu einer „arithmetischen" Aussagenfunktion führt, wenn die rechts auftretenden früher bekanten Aussagenfunktionen alle aus einstelligen aufgebaut sind, und auch noch in vielen anderen Fällen. Vielleicht werde ich bei einer anderen Gelegenheit näher darauf eingehen.

Diese Tatsache, daß Rekursionen mit gebundenen Variablen nicht mehr zu „arithmetischen" Beziehungen zu führen brauchen, zeigt eine gewisse Unvollständigkeit der „gewöhnlichen" Arithmetik. Dabei bedeutet „gewöhnliche Arithmetik" die Theorie, die entsteht, wenn man den gewöhnlichen Prädikatenkalkül mit den Axiomen der Gleichheit, den einfachen Anordnungsaxiomen der ganzen Zahlen, den rekurrierenden Axiomen der Addition und Multiplikation samt dem Axiom der vollständigen Induktion (eigentlich den Axiomen, welche daraus entstehen durch alle möglichen Einsetzungen für die Funktionsvariable) kombiniert. Innerhalb dieser Theorie ist also nicht jede rekursive Definition durch eine explizite ersetzbar. Es kann dann vielleicht von Interesse sein zu bemerken, daß die Mengenlehre, etwa die Fraenkelsche oder die präzisierte Zermelosche, eine solche Unvollständigkeit nicht besitzt. In der Mengenlehre ist in der Tat jede rekursive Definition in trivialer Weise durch eine explizite ersetzbar, d. h. die rekursiven Definitionen sind überhaupt überflüssig. Betrachtet man z. B. die rekursive Definition einer Aussagenfunktion $\psi(x, y)$ innerhalb der Zermeloschen Zahlenreihe Z_0, d. h. 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}, \ldots$, so ist diese mit der rekursiven Definition einer gewissen Menge ψ von Paaren aus Z_0 gleichbedeutend. Bezeichne ich die Definition kurz durch Δ, so kann ich aber zuerst die Menge M aller Mengen m, für welche die Aussage Δm gilt, betrachten; offenbar ist M explizit definiert. Nun enthält aber M nur ein einziges Element, nämlich die Menge ψ; denn die Definition Δ kann nicht für zwei verschiedene Mengen gelten. Aber dann ist z. B. die zu M gehörige Vereinigungsmenge σM nichts anderes als die Menge ψ, welche also hierdurch explizit definiert ist.

(Eingegangen am 27. März 1936.)