Sur les ensembles compacts de fonctions de carrés sommables.

Par MAURICE FRÉCHET à Paris.

Ensembles compacts. Dès qu'on a à étudier, non pas une fonction, ni les propriétés communes à une classe de fonctions mais les relations mutuelles d'un ensemble de fonctions, un des premiers problèmes qui se posent est de déterminer à quelle condition un tel ensemble est compact. (On peut dire ici qu'un ensemble E est compact si tout sous-ensemble infini d'éléments de E contient une suite convergente.)

Divers modes de convergence. Il est bien clair que la réponse au problème posé dépendra de la définition donnée du mot convergence. Nous allons nous occuper ici de la *convergence en mesure* et de la *convergence en moyenne quadratique* ou plus généralement de la *convergence en moyenne d'ordre r*.

Les conditions de compacité correspondantes ont été obtenues par différents auteurs. Les démonstrations données d'une part par M. MARCEL RIESZ[1]) pour les conditions qu'il établit pour la convergence en moyenne d'ordre $r \geqq 1$ et d'autre part par M. HANSON[2]) pour le cas de la convergence en mesure se basent essentiellement sur une condition générale de compacité d'un ensemble abstrait. Les deux auteurs se réfèrent pour l'énoncé et la démonstration de cette condition à l'excellent livre de M. HAUSDORFF[3]) dont la première édition date de 1914. On nous permettra de signaler que cette même

---

1) M. RIESZ, Sur les ensembles compacts de fonctions sommables, *ces Acta,* **6** (1933), p. 136—142.

2) E. H. HANSON, A Note on Compactness, *Bulletin American Math. Society,* **39** (1933), p. 397—400.

3) F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre,* seconde édition (Berlin et Leipzig, 1927).

condition a été énoncée et démontrée par nous en 1910[4]) et que nous avons nous-même utilisé[5]) cette condition générale pour établir des conditions particulières de compacité relatives à des ensembles non abstraits.

Recherche d'un nouveau critère. Nous allons revenir aux conditions de compacité relatives aux deux modes de convergence mentionnés ci-dessus. Au lieu, en effet, de traiter séparément ces deux problèmes, on peut déduire l'une des conditions de l'autre. C'est ce que nous allons faire. Il n'en résulte pas seulement un autre mode de démonstration de la condition relative à la moyenne d'ordre r, il en résultera aussi une forme de critère, distincte de celles qui ont été proposées et qui peut avoir ses avantages, dans certains cas, sans prétendre à être toujours plus commode.

Soit J le domaine, *borné ou non,* sur lequel les fonctions $f(x)$ envisagées sont supposées définies. Il n'y aura aucune complication à supposer que J est un domaine à un nombre fini ν de dimensions. Nous dirons que $f(x)$, supposée mesurable, appartient à l'espace L_r si l'intégrale

$$\int_J |f(x)|^r dx$$

(qui est, en réalité, une intégrale ν-uple, x étant mis pour $(x_1, \ldots, x_\nu)$, dx pour $dx_1 \ldots dx_\nu$) est déterminée et finie, c'est-à-dire si $|f(x)|^r$ est sommable sur J. Si f et f_n appartiennent à L_r, il en est de même de $f - f_n$. Nous dirons que f_n *converge vers* f *en moyenne d'ordre* r *sur* J *si* $\int_J |f(x) - f_n(x)|^r dx$ *tend vers zéro.*

Premier critère. Nous avons autrefois[6]) établi la condition de compacité d'un ensemble de l'espace H à une infinité de coordonnées de Hilbert. Cet espace étant isométrique de l'espace L_2, il en résultait une condition de compacité dans L_2. En considérant un système complet orthonormé choisi arbitrairement de fonctions de L_2, soit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$, notre condition relative à H se traduit immédiatement dans L_2 de la façon suivante:

[4]) M. Fréchet, Les ensembles abstraits et le Calcul Fonctionnel, *Rendiconti Circolo Mat. Palermo*, 30 (1910), p. 1—26.

[5]) M. Fréchet, Les espaces topologiquement affines, *Acta Mathematica*, 47 (1926), p. 25—52.

[6]) M. Fréchet, Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées, *Nouvelles Annales de Math.*, 8 (1908), p. 97—116 et 289—317, spec. p. 308; voir aussi, M. Fréchet, loc. cit. [4]), p. 18.

Appelons approximation d'une fonction $f(x)$ de L_2 au moyen de n fonctions $\varphi_i(x)$, la plus petite valeur de

$$\sqrt{\int_J \{f(x)-[a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)]\}^2\,dx}$$

quand les a varient. Ceci étant, *pour qu'un ensemble E de fonctions de carrés sommables soit compact, il faut et il suffit que l'approximation de $f(x)$ par les n premières fonctions $\varphi_i(x)$ converge, quand n croît indéfiniment, vers zéro „également" quand $f(x)$ parcourt E.*

Mais un tel critère — qui peut être commode — a l'inconvénient de faire intervenir des fonctions φ_i auxiliaires. Il était donc naturel de chercher un critère ne faisant intervenir que les fonctions f de E. C'est M. Kolmogoroff qui a eu le mérite de donner le premier un tel critère dans le cas où J est borné. M. Tamarkin l'a étendu au cas où J peut être illimité. Et M. M. Riesz a obtenu pour la même condition un critère d'une autre forme[7]) au moyen d'une démonstration différente.

Convergence en mesure. Nous allons résoudre le même problème et arriver à une quatrième forme du critère cherché en utilisant le critère de compacité relatif à la convergence en mesure que nous avions établi en 1927[8]).

On dit que $f_n(x)$ *converge en mesure* vers $f(x)$ sur un domaine J, si, quel que soit $\varepsilon>0$, la mesure, m_n, de l'ensemble des points de J où $|f_n(x)-f(x)|\geqq\varepsilon$ tend vers zéro avec $1/n$. (Cette définition conserve un sens pour des fonctions non mesurables en remplaçant la mesure par la mesure extérieure.)

Il est clair que la convergence en moyenne d'ordre r entraîne la convergence en mesure, car on a

$$\int_J |f-f_n|^r\,dx \geqq \varepsilon^r m_n \geqq 0$$

pour ε arbitraire fixe; lorsque le premier membre tend vers zéro, m_n tend aussi vers zéro avec $1/n$. La réciproque, au contraire, n'a lieu que si l'on impose aux f_n une condition supplémentaire que nous allons formuler.

---

[7]) Une propriété classique due à M. Lebesgue et concernant les intégrales de fonctions sommables, doit avoir lieu „également".

[8]) M. Fréchet, Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables, *Fundamenta Math.*, 9 (1927), p. 25—32.

Condition d'égale sommabilité. Nous utiliserons à cet effet une condition „d'égale sommabilité" qui se présente sous une double forme. La première forme a été introduite par M. TAMARKIN dans le problème actuel pour considérer le cas des domaines non bornés. La seconde permettra de considérer dans le même problème les fonctions non bornées. Elle a été introduite par M. FLAMANT, — qui avait bien voulu nous en informer, — pour formuler une condition d'équivalence de la convergence en mesure et de la convergence en moyenne quadratique. C'est, du reste, cette information qui nous a fait penser à déduire le critère de compacité dans L_2, et même dans L_r, du critère de compacité dans l'espace M des fonctions mesurables.

Nous déterminerons d'abord une inégalité utile — l'inégalité (2) — qui précise une conséquence de cette affirmation vague que: si les ensembles, sur J, où deux fonctions sont grandes, ne sont pas trop étendus, il en est de même pour leur somme et pour leur différence.

A cet effet, observons qu'il existe un nombre k dépendant uniquement de r tel que, quels que soient a et b, on ait

$$|a+b|^r \leqq k(|a|^r + |b|^r).$$

(On peut prendre, par exemple, $k = 2^r$). Appelons en général x_A un nombre égal à zéro si $|x| < A$, et à x si $|x| \geqq A$. Alors, on peut déduire de l'inégalité ci-dessus qu'il existe un nombre K tel que

$$(1) \qquad \{|a+b|^r\}_{KA} \leqq K\{|a|^r_A + |b|^r_A\}$$

pour tout $A \geqq 0$, K ne dépendant que de r. (On peut prendre par exemple $K = 2k$).[9])

Il en résulte que pour tout sous-ensemble j de J et pour tout nombre $A > 0$, on aura:

$$(2) \qquad \int_j \{|f(x)+g(x)|^r\}_{KA}\, dx \leqq K \int_j \{|f(x)|^r\}_A\, dx + K \int_j \{|g(x)|^r\}_A\, dx$$

pour tout couple de fonctions $f(x)$, $g(x)$ de L_r.

Ceci étant, même si J n'est pas borné, on peut toujours former une suite de sous-ensembles de J, soient $J_1, J_2, \ldots$, chacun

---

[9]) Voir pour plus de détails sur ces inégalités, les pages 188—189 de l'ouvrage cité à la fin du présent mémoire.

compris dans le suivant et de mesure finie, telle que tout point de J appartienne à l'un au moins des J_s. On sait que si f_n appartient à L_r, on aura:

(3) $$\int_J |f_n|^r dx = \lim_{s\to\infty} \int_{J_s} |f_n|^r dx,$$

et

(4) $$\lim_{s\to\infty} \int_J \{|f_n|^r\}_s dx = 0.$$

Nous allons montrer que si f_n converge en moyenne d'ordre r sur J vers f de L_r, la convergence est uniforme, quand n varie, dans ces deux égalités.

En effet, on a d'après (2), écrit pour $A=0$:

$$\int_{J-J_s} |f_n|^r dx \leqq K \int_{J-J_s} |f|^r dx + K \int_J |f-f_n|^r dx.$$

Prenons N de sorte que le dernier terme soit $< \varepsilon/2$ pour $n > N$, et σ_0 de sorte que l'avant-dernier terme soit $< \varepsilon/2$ pour $s > \sigma_0$. Alors le premier terme sera $< \varepsilon$ pour $n > N$ et $s > \sigma_0$. Mais le premier terme est $< \varepsilon$ pour $s > \sigma_n$. En appelant σ le plus grand des $N+1$ nombres $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$, on voit qu'on aura

(5) $$\int_{J-J_s} |f_n|^r dx < \varepsilon$$

quel que soit n (dont σ est indépendant): la convergence de (3) est uniforme. D'autre part, on a aussi d'après (2)

$$\int_J \{|f_n|^r\}_D dx \leqq K \int_J \{|f(x)|^r\}_{\frac{D}{K}} dx + K \int_J |f-f_n|^r dx.$$

En prenant D assez grand, $D \geqq A_0$, l'avant-dernier terme est $< \varepsilon/2$. Donc pour $n > N$ et $D \geqq A_0$, le premier sera $< \varepsilon$. Or ce premier est $< \varepsilon$ pour $D \geqq A_n$. En prenant pour A le plus grand des nombres $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_N$, on voit qu'on aura

(6) $$\int_J \{|f_n|^r\}_A dx < \varepsilon$$

quel que soit n (dont A est indépendant). La convergence de (4) est uniforme.

La première condition est celle de M. Tamarkin, la seconde celle de M. Flamant. Nous emploierons pour l'ensemble des deux conditions la dénomination d'égale sommabilité des $|f_n|^r$ sur J

introduite par M. FLAMANT[10]) pour désigner la seconde condition.

Nous dirons donc que les fonctions $\varphi(x)$ d'un ensemble G de fonctions sommables sur J sont *également sommables* sur J, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres σ et A tels que

$$\int_{J-J_\sigma} |\varphi|\,dx < \varepsilon, \int_J |\varphi|_A\,dx < \varepsilon,$$

A et σ restant fixes quand φ parcourt G.

On peut d'ailleurs englober les deux conditions en une seule. En effet on aura alors, *a fortiori,*

$$\int_J |\varphi|\,dx - \int_{J_\sigma} [|\varphi| - |\varphi|_A]\,dx \leqq \int_{J-J_\sigma} |\varphi|\,dx + \int_J |\varphi|_A\,dx < 2\varepsilon.$$

On peut représenter en général $|z| - |z|_A$ par $|z|^A$: ce sera une quantité égale à $|z|$ pour $|z| < A$ et à zéro pour $|z| \geqq A$. On aura donc

$$\int_J |\varphi|\,dx - \int_{J_\sigma} |\varphi|^A\,dx < 2\varepsilon.$$

Réciproquement, si pour tout ω, on peut choisir t et B tels que

$$\int_J |\varphi|\,dx - \int_{J_s} |\varphi|^D\,dx < \omega \tag{7}$$

pour $s \geqq t$, $D \geqq B$, comme on a

$$\lim_{s\to\infty} \int_{J_s} |\varphi|^D\,dx = \int_J |\varphi|^D\,dx$$

$$\lim_{D\to\infty} \int_{J_s} |\varphi|^D\,dx = \int_{J_s} |\varphi|\,dx,$$

on déduira de (7):

$$\int_J |\varphi|\,dx - \int_J |\varphi|^D\,dx \leqq \omega, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_J |\varphi|_D\,dx \leqq \omega,$$

$$\int_J |\varphi|\,dx - \int_{J_s} |\varphi|\,dx \leqq \omega, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_{J-J_s} |\varphi|\,dx \leqq \omega.$$

En résumé, nous dirons que les fonctions $\varphi(x)$ d'un ensemble G de fonctions sommables sur J sont *également somma-*

---

[10]) Sur deux fonctions attachées à une fonction sommable et leur application à la limite des intégrales de Lebesgue, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris,* **201** (1935), p. 930—932.

bles sur J, si à tout $\varepsilon > 0$, correspondent A et σ tels que

$$\int_J |\varphi|\, dx - \int_{J_\sigma} |\varphi|^A\, dx < \varepsilon,$$

quelle que soit φ de G.

C'est dire que la convergence de $\int_{J_\sigma} |\varphi|^A dx$ vers $\int_J |\varphi|\, dx$ quand A et σ tendent simultanément et indépendamment vers l'infini, est „égale" quand φ parcourt G.

Nous venons de montrer que si $f_n(x)$ de L_r converge en moyenne d'ordre r sur J vers $f(x)$ de L_r, les fonctions $|f_n|^r$ sont également sommables sur J. Bien entendu, la réciproque n'est pas vraie. Cependant il nous sera utile de noter que si f et f_n sont des fonctions de L_r et si les $|f_n|^r$ sont également sommables sur J, il en sera de même des $|f-f_n|^r$. Car on a, en vertu de (2),

$$\int_j \{|f-f_n|^r\}_D\, dx \leqq K \int_j \{|f|^r\}_{\frac{D}{K}}\, dx + K \int_j \{|f_n|^r\}_{\frac{D}{K}}\, dx.$$

En prenant $j = J$ et D assez grand, on rendra les deux termes du second membre $< \varepsilon/2$ quel que soit n, d'où

$$\int_J \{|f-f_n|^r\}_D\, dx < \varepsilon.$$

En prenant $D = 0$, $j = J - J_s$ et s assez grand, on verra de même que, quel que soit n,

$$\int_{J-J_s} |f-f_n|^r dx < \varepsilon.$$

Une condition suffisante pour l'égale sommabilité. Il est bien évident que si des fonctions f sont également bornées sur un domaine borné fixe J, les $|f|^r$ sont également sommables sur J, pour toute valeur fixe positive de r. On peut donner une condition suffisante plus large:

Si un ensemble G de fonctions $f(x)$ définies sur un domaine J borné est tel que les intégrales $\int_J |f(x)|^t dx$ soient inférieures à un même nombre Q_t, les $|f|^r$ sont également sommables sur J pour toute valeur fixe de r inférieure à t.

En effet, on a:

$$\int_J \{|f|^r\}_A\, dx \leqq \frac{1}{A^{t-r}} \int_J \{|f|^t\}_A\, dx \leqq \frac{Q_t}{A^{t-r}};$$

par suite, la convergence vers zéro du premier membre quand A croît est „égale“ quand f parcourt G.

Cette propriété ne s'étend pas au cas d'un domaine quelconque comme on le voit, par exemple, en prenant pour J la demi-droite $x \geqq 1$, en prenant $r=1$, $t=2$ et en prenant pour les f les fonctions $\frac{1}{x^\alpha}$, α restant tel sur G que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Supposons maintenant que, f_n et f appartenant à L_r, f_n converge vers f en mesure sur J et voyons dans quel cas en résultera la convergence en moyenne d'ordre r.

Un cas simple où les deux convergences ne peuvent être que simultanées est le cas où J est borné et où f et les f_n sont bornés dans leur ensemble par un même nombre A.

En effet, soit m_n la mesure du sous-ensemble E de J sur lequel $|f-f_n| > \omega$. On a

$$\int_J |f-f_n|^r dx = \int_E + \int_{J-E} \leqq (2A)^r m_n + \omega^r . \operatorname{mes} J.$$

En prenant ω assez petit, puis n assez grand $(n > N)$, on rendra le dernier membre inférieur à un nombre ε donné pour $n > N$.

Ceci étant, passons au cas général où l'on ne suppose, ni J fini, ni f, ni les f_n bornés. Pour que f_n converge en moyenne vers f sur J, il est nécessaire d'après ce qui précède que les f_n soient également sommables sur J. Quand f_n converge en mesure vers f sur J, cette condition nécessaire devient suffisante.

Pour le montrer, observons que, d'après ce qui précède, les fonctions $\varphi_n = |f-f_n|^r$ sont des fonctions également sommables sur J. D'autre part, il est clair que φ_n converge en mesure vers zéro sur J quand f_n converge en mesure vers f. Dès lors tout revient à prouver que si des fonctions $\varphi_n \geqq 0$ convergeant en mesure vers zéro sur J sont également sommables sur J, l'intégrale $\int_J \varphi_n dx$ tend vers zéro.

Or, d'après l'hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres σ, A, indépendant de n, tels que

$$\int_J \varphi_n dx - \int_{J_\sigma} (\varphi_n)^A dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A et σ étant ainsi fixés, les fonctions $(\varphi_n)^A$ sont des fonctions également bornées qui convergent en mesure comme les φ_n vers zéro sur J.

Dès lors, leur intégrale sur un domaine borné J_σ converge vers zéro et N existe tel que

$$\int_{J_\sigma} (\varphi_n)^A dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour } n > N.$$

D'où

$$0 \leqq \int_J \varphi_n dx < \varepsilon \qquad \text{pour } n > N.$$

Ainsi, nous avons démontré ce théorème établi par M. FLAMANT dans le cas où $r = 2$ et où J est fini: *la condition nécessaire et suffisante à vérifier par une suite de fonctions f_n de L_r pour que sa convergence en mesure vers une fonction f de L_r soit équivalente à sa convergence en moyenne d'ordre r vers f est que les $|f_n|^r$ soient également sommables sur J.*

Condition de compacité dans L_r. Ceci étant, nous pouvons maintenant établir très brièvement la condition de compacité dans L_r.

Tout d'abord, il est clair que si un ensemble E de fonctions f de L_r est compact sur J, les fonctions $\varphi = |f|^r$ sont également sommables sur J. Car, dans le cas contraire, il existerait un nombre $\varepsilon > 0$, tel que quels que soient σ et A, l'inégalité

$$\int_J \varphi\, dx - \int_{J_\sigma} (\varphi)^A dx < \varepsilon$$

n'ait pas lieu pour toutes les fonctions φ admissibles. En particulier, en prenant $\sigma = p$ et $A = p$, il existerait une fonction f_p de E telle qu'en posant $\varphi_p = |f_p|^r$, on ait:

$$\int_J \varphi_p\, dx - \int_{J_p} (\varphi_p)^p dx \geqq \varepsilon.$$

Si E est compact dans L_r, il existerait une suite de fonctions f_{p_n} (avec $p_{n+1} > p_n$) extraite de la suite des f_p et convergeant en moyenne d'ordre r vers une fonction f de L_r. Dès lors, les $|f_{p_n}|^r$ seraient également sommables sur J; il existerait deux nombres s et D tels que

$$\int_J \varphi_{p_n} dx - \int_{J_s} (\varphi_{p_n})^D dx < \varepsilon.$$

Si maintenant, on prend n tel que $p_n > s$ et $p_n > D$, on aura :

$$\int_J \varphi_{p_n} dx < \varepsilon + \int_{J_s} (\varphi_{p_n})^D dx < \varepsilon + \int_{J_{p_n}} (\varphi_{p_n})^{p_n} dx$$

d'où la contradiction annoncée.

D'autre part, si un ensemble E est compact quand on le considère dans L_r, il l'est encore quand on le considère dans l'espace M des fonctions mesurables. Nous avons démontré (note [8])) qu'alors les fonctions de E sont presque également continues, c'est-à-dire, qu'à tout couple de nombres positifs ε, ω correspond un nombre q tel qu'on puisse décomposer J en q parties fixes $j_1, j_2, \ldots, j_q$ et assigner à chaque fonction f de E un ensemble e_f (éventuellement vide) de mesure $< \varepsilon$, de sorte que l'oscillation de f sur chaque ensemble $j_i - e_f$ soit $< \omega$.

Notre démonstration concernait le cas où J est un intervalle. Mais elle s'étend au cas d'un domain borné ou non d'un espace à ν dimensions sans autre changement que des changements de mots.

Ainsi, *pour qu'un ensemble E de fonctions f de L_r soit compact sur J, il faut:* (1°) *que les fonctions $|f|^r$ soient également sommables sur J;* (2°) *que les fonctions f soient presque également continues sur J.*

Ces conditions nécessaires sont suffisantes. En effet, en vertu de (1°), on a

$$\int_J |f|^r dx \leqq \int_{J_\sigma} \{|f|^r\}^A dx + \varepsilon \leqq A^r \operatorname{mes} J_\sigma + \varepsilon = T$$

donc $\int_J |f|^r dx$ est borné quand f parcourt E. Si donc α_f est le sous-ensemble de f où $|f| \geqq H$, on aura

$$T \geqq \int_J |f|^r dx \geqq H^r \operatorname{mes} \alpha_f,$$

d'où

$$\operatorname{mes} \alpha_f \leqq \frac{T}{H^r}.$$

Dès lors, en prenant H assez grand, on aura $\frac{T}{H^r} < \varepsilon$ et par suite mes $\alpha_f < \varepsilon$. En appelant β_f la réunion des points de e_f et β_f, on aura mes $\beta_f < 2\varepsilon$ et $|f| < H$ sur $E - \beta_f$. C'est ce qu'on peut exprimer en disant que les fonctions f sont *presque également bornées* sur J. Or nous avons démontré (note [8])) que si des fonctions mesurables sont à la fois presque également bornées sur J et presque également continues sur J, elles forment un ensemble qui, considéré comme appartenant à M, est compact.

C'est-à-dire que de tout sous-ensemble infini de fonctions de E, on peut tirer une suite S de fonctions f_n qui converge en mesure sur J. Comme les fonctions $|f_n|^r$ sont également sommables sur J, il en résultera que f_n converge en moyenne d'ordre r sur J vers une fonction de L_r.

On observera que la condition (2⁰) a, sur les critères de compacité dans L_r déjà publiés, l'avantage de mieux mettre directement en évidence le comportement des f.

Remarque. Des raisonnements analogues aux précédents peuvent être faits en Calcul des Probabilités quand on cherche les conditions de compacité d'un ensemble de variables aléatoires définies sur la même catégorie d'épreuves et qu'on s'attache, soit à la convergence „en probabilité", soit à la convergence en moyenne d'ordre r. Ces raisonnements sont exposés au Chapitre V de notre ouvrage *Recherches modernes sur la Théorie des Probabilités* qui vient de paraître comme fascicule III (Premier Livre) du „Traité des Probabilités" par E. BOREL et divers auteurs (Gauthier—Villars, Paris, 1936).

(Reçu le 31 août 1936)