Sur la divergence des polynomes d'interpolation.

Par J. MARCINKIEWICZ à Wilno.

1. Soit

$$x_i^{(k)} = \cos \frac{2i-1}{2k} \pi \qquad (1 \leqq i \leqq k, \; k = 1, 2, \ldots).$$

D'après un théorème classique, on peut définir un polynome

(1. 1) $$P_n(f, x) = P_n(x) = \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)} x + \ldots + \alpha_{n-1}^{(n)} x^{n-1}$$

de sorte que les n égalités suivantes soient vérifiées :

(1. 2) $$P_n(f, x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Le but de cette note est de démontrer le

Théorème. *On peut construire une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $(-1, 1)$, de sorte que la suite correspondante $\{P_n(f, x)\}$ diverge dans chaque point de l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$.*

On a démontré récemment qu'il existe une fonction continue $f(x)$ telle que la suite $P_n(f, x)$ diverge presque partout dans $(-1, 1)$.[1] Le théorème que nous venons d'énoncer est un peu plus général.

2. Le changement de variable

$$x = \cos \theta$$

transforme la fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ en une fonction $g(\theta) = f(\cos\theta)$, définie dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

---

[1] G. GRÜNWALD, Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome, *ces Acta*, 7 (1935), pp. 207—221 ; J. MARCINKIEWICZ, Wielomiany interpolacyjne funkcyj bezwzględnie ciągłych (Les polynomes d'interpolation de fonctions absolument continues), *Wiadomości Matematyczne*, **39** (1935), p. 85—125 (ce travail représente ma thèse de doctorat). La méthode de démonstration que nous employons dans le présent travail est la même que celle du travail précédent. Voir aussi ma note : Sur l'interpolation, *Studia Math.*, **6** (1936), pp. 1—17.

Le polynome $P_n(f, x)$ devient un polynome trigonométrique

$$U_n(\theta) = U_n(g, \theta) = \frac{1}{2} a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \cos\theta + \ldots + a_{n-1}^{(n)} \cos(n-1)\theta$$

vérifiant les n égalités

$$(2.\ 1)\quad U_n(\theta_i) = g(\theta_i) \quad \left(\theta_i = \theta_i^{(n)} = \frac{2i-1}{2n}\pi,\ i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Inversement, la fonction $g(\theta)$ étant définie pour $0 \leq \theta \leq \pi$, la fonction $f(x) = g(\arccos x)$ se trouve définie pour $-1 \leq x \leq 1$, et le polynome trigonométrique $U_n(g, \theta)$, défini par les égalités (2. 1), devient le polynome $P_n(x)$. Par conséquent, pour démontrér le théorème, il suffit de construire une fonction $g(\theta)$ continue dans $(0, \pi)$ et telle que la suite $U_n(g, \theta)$ soit partout divergente.

3. Posons

$$(3.\ 1)\qquad g(-\theta) = g(\theta) \qquad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

$$(3.\ 2)\qquad \varphi_n(\theta) = \theta_i^{(n)} \qquad (\theta_i^{(n)} \leq \theta < \theta_{i+1}^{(n)},\quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Les formules bien connues

$$(3.\ 3)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta\, d\varphi_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin k\theta\, d\varphi_n(\theta) = 0 \qquad (0 < k < 2n)$$

donnent

$$(3.\ 4)\qquad a_i^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos i\theta\, d\varphi_n(\theta),$$

donc aussi

$$(3.\ 5)\qquad U_n(g, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \frac{\sin n(\theta - x)}{2\operatorname{tg}\frac{\theta - x}{2}} d\varphi_n(\theta).$$

4. Le nombre p étant choisi, nous allons construire une fonction continue $g(\theta) = g_p(\theta)$, de manière que l'on ait

(α) $g(-\theta) = g(\theta)$, $|g(\theta)| \leq 1$, $(0 \leq \theta \leq \pi)$;

(β) *la suite* $\{U_n(g, \theta)\}$ *converge uniformément*

(γ) *pour chaque* x, $1/p \leq x \leq \pi - 1/p$, *il existe un entier* $n = n(x)$ *tel que* $|U_{n(x)}(g, x)| > p$.

Choisissons m assez grand pour que

$$(4.\ 1)\qquad \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m} + \frac{1}{p}} \frac{d\varphi_n(\theta)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta} \geq M,$$

dès que $n \geqq m$, et soient $n_1, n_2, \dots, n_m$ des nombres entiers définis de sorte que l'on ait

$$m \leqq n_1 < n_2 < \dots < n_m,$$

$$2mn_i^3 < n_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \dots, m-1). \tag{4.2}$$

Pour chaque n, désignons par S_n le système de n points

$$\theta_i^{(n)} = \frac{2i-1}{2n}\pi \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et par $S_n(u)$ le produit de S_n par l'intervalle (u, π).

Nous définirons maintenant la fonction $g(\theta)$ dans S_{n_1}. Posons

$$\begin{aligned} &g(\theta_i^{(n_1)}) = (-1)^i &&\text{pour} \quad \theta_i^{(n_1)} \in S_{n_1}\left(\frac{\pi}{m}\right), \\ &g(\theta^{(n_1)}) = 0 &&\text{pour} \quad \theta_i^{(n_1)} \in S_{n_1} - S_{n_1}\left(\frac{\pi}{m}\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Comme $S_{n_1} . S_{n_1+1} = 0$, nous pouvons de même définir la fonction $g(\theta)$ dans S_{n_1+1}. Soit donc

$$\begin{aligned} &g(\theta_i^{(n_1+1)}) = (-1)^i &&\text{pour} \quad \theta_i^{(n_1+1)} \in S_{n_1+1}\left(\frac{\pi}{m}\right), \\ &g(\theta_i^{(n_1+1)}) = 0 &&\text{pour} \quad \theta_i^{(n_1+1)} \in S_{n_1+1} - S_{n_1+1}\left(\frac{\pi}{m}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Supposons maintenant que $g(\theta)$ est déjà définie pour $\theta \in S_{n_i} + S_{n_i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. La fonction $g(\theta)$ est ainsi définie dans certains points de S_{n_k}, à savoir dans les points de l'ensemble

$$P_{n_k} = S_{n_k} . \sum_{i=1}^{k-1} (S_{n_i} + S_{n_i+1}).$$

(Il n'est pas exclu que P_{n_k} est vide.) Posons

$$\begin{aligned} &g(\theta_i^{(n_k)}) = (-1)^i &&\text{pour} \quad \theta_i^{(n_k)} \in S_{n_k}\left(\frac{k}{m}\pi\right) - P_{n_k}, \\ &g(\theta_i^{(n_k)}) = 0 &&\text{pour} \quad \theta_i^{(n_k)} \in S_{n_k} - \left\{S_{n_k}\left(\frac{k}{m}\pi\right) + P_{n_k}\right\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

et d'une façon analogue, en vertu de l'égalité $S_{n_k} . S_{n_k+1} = 0$,

$$\begin{aligned} &g(\theta_i^{(n_k+1)}) = (-1)^i &&\text{pour} \quad \theta_i^{n_k+1} \in S_{n_k+1}\left(\frac{k}{m}\pi\right) - P_{n_k+1}, \\ &g(\theta_i^{(n_k+1)}) = 0 &&\text{pour} \quad \theta_i^{n_k+1} \in S_{n_k+1} - \left\{S_{n_k+1}\left(\frac{k}{m}\pi\right) + P_{n_k+1}\right\}, \end{aligned}$$

où

$$P_{n_k+1} = S_{n_k+1} \sum_{i=1}^{k-1} (S_{n_i} + S_{n_i+1}).$$

On définit la fonction $g(\theta)$ par récurrence pour $\theta \in S_{n_i} + S_{n_i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$. En déhors de ces points nous pouvons définir la fonction $g(\theta)$ d'une façon arbitraire, pourvu qu'elle satisfasse aux conditions (α) et (β).

Soit

$$\frac{1}{p} \leqq x \leqq \pi - \frac{1}{p}, \qquad \frac{k-1}{m}\pi \leqq x < \frac{k}{m}.$$

D'après (3. 5) on obtient

$$U_{n_k}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \frac{\sin n_k(\theta - x)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta - x)} d\varphi_{n_k}(\theta) =$$

$$= \frac{\cos n_k x}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \frac{\sin n_k \theta}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta - x)} d\varphi_{n_k}(\theta) = \tag{4.6}$$

$$= \frac{\cos n_k x}{\pi} \int_{0}^{\pi} g(\theta) \frac{\sin n_k \theta}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta - x)} d\varphi_{n_k}(\theta) + O(p) =$$

$$= \frac{\cos n_k x}{\pi} \int_{S_{n_k} - P_{n_k}} g(\theta) \frac{\sin n_k \theta}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta - x)} d\varphi_{n_k}(\theta) + \frac{\cos n_k x}{\pi} \int_{P_{n_k}} + O(p).$$

D'autre part, en évaluant la distance minimum de deux points consecutifs de P_{n_k}, on voit qu'il y a deux points de P_{n_k} au plus dont la distance de x soit inférieure à $({}^1/n_{k-1})^2$. Il en résulte, d'aprés l'inégalité (4. 2), que

$$\int_{P_{n_k}} = O(1). \tag{4.7}$$

La formule (4. 5) donne

$$\left| \int_{S_{n_k} - P_{n_k}} g(\theta) \frac{\sin n_k \theta}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta - x)} d\varphi_{n_k}(\theta) \right| = \tag{4.8}$$

$$= \int_{S_{n_k}\left(\frac{k\pi}{m}\right) - P_{n_k}} \frac{d\varphi_{n_k}(\theta)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta - x)} \geqq \int_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m} + \frac{1}{p}} \frac{d\varphi_{n_k}(\theta)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta} + O(1).$$

Des formules (4. 1), (4. 6), (4. 7) et (4. 8) on obtient

$$(4.9) \qquad |U_{n_k}(x)| \geqq \frac{1}{\pi} |\cos n_k x| M + O(p).$$

D'une façon analogue, on obtient aussi pour $\frac{1}{p} \leqq x \leqq \pi - \frac{1}{p}$; $(k-1)\frac{\pi}{m} \leqq x \leqq \frac{k\pi}{m}$,

$$(4.10) \qquad |U_{n_k+1}(x)| \geqq \frac{1}{\pi} |\cos (n_k+1) x| M + O(p).$$

Or, en tenant compte de l'égalité

$$\sin x = \cos nx \sin (n+1) x - \sin nx \cos (n+1) x,$$

on obtient que pour $\frac{1}{p} \leqq x \leqq \pi - \frac{1}{p}$,

$$(4.11) \qquad \operatorname{Max} \{|\cos nx|, |\cos (n+1) x|\} > \frac{1}{4p}.$$

On en déduit, d'aprés (4. 9) et (4. 10) que

$$(4.12) \qquad \operatorname{Max} \{|U_{n_k}(x)|, |U_{n_k+1}(x)|\} \geqq \frac{M}{4p\pi} + O(p).$$

Pour M assez grand cette dernière inégalité implique la condition (γ).

5. La reste de la démonstration est simple. En tenant compte des conditions (α), (β) et (γ) on voit que si la croissance de la suite $\{p_i\}$ est suffisamment rapide, la fonction

$$g(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-1/2} g_{p_i}(\theta)$$

est continue et la suite $U_n(g, \theta)$ diverge partout dans $(0, \pi)$, sauf peut-être dans les points extrêmes 0 et π.

Si la suite $U_n(g, \theta)$ convergeait dans le point $\theta = 0$, on pourrait ajouter à g une fonction $g_1(\theta)$ continue et paire, telle que $U_n(g_1, \theta)$ diverge pour $\theta = 0$ et converge ailleurs. On peut procéder de même avec le point $\theta = \pi$. On obtient ainsi une fonction continue g telle que $U_n(g, \theta)$ diverge partout dans l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

(Reçu le 6 mars 1936)