Über eine Zerlegung der ebenen Kurven vom Maximalindex.

Von JULIUS (GYULA) V. SZ. NAGY in Szeged.

1. Einleitung.

Wir verstehen unter einer einzügigen Kurve ein reelles eindeutiges Kreisbild in der projektiven Ebene, welches überall eine Tangente besitzt und Summe von endlich vielen Konvexbogen ist. Eine Kurve kann aus mehreren Zügen bestehen, ihre Züge sind dann einzügige Kurven in der Ebene. Die Ordnung bzw. der Index einer Kurve ist die größte bzw. kleinste Anzahl der Punkte, in denen die Kurve von einer Geraden ihrer Ebene getroffen werden kann. Ähnlicherweise läßt sich die Klasse bzw. der Klassenindex der Kurve definieren.

Eine Kurve K n-ter Ordnung zerfällt in die Kurven K_1, $K_2, \ldots, K_h$ von n_1-, n_2-,..., n_h-ter Ordnung, wenn $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h$ ist und wenn diese h Kurven zusammen jeden Zug der Kurve K enthalten und zwar jeden nur einmal. Zerfällt die Kurve K bei keinerlei Einteilung ihrer Züge, oder ist sie einteilig, so ist sie irreduzibel. Auf eine ähnliche Weise läßt sich die Irreduzibilität bzw. Reduzibilität für eine Kurve C n-ter Klasse definieren.

Besteht eine irreduzible Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex (vom Klassenindex $n-2$) aus den s Zügen Z_1, $Z_2, \ldots, Z_s$, so bilden die Punkte der Ebene, die an die Kurve C $n-2$ Tangenten senden, ein zusammenhängendes Gebiet, das von den s Zügen und von der eventuellen einzigen Wendetangente der Kurve begrenzt wird. Ist $p+1$ die Zusammenhangszahl dieses Gebietes, so ist p das Geschlecht der Kurve C. Zerfällt C in die irreduziblen Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$, so sind diese Kurven alle vom Maximalklassenindex. Die Punkte der Ebene, aus denen man an C

$n-2$ Tangenten ziehen kann, bilden k mit einander nicht zusammenhängende Gebiete $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Das Gebiet G_i wird von den Zügen der Kurve C_i und von ihrer eventuellen Wendetangente begrenzt. Ist C_i vom Geschlecht p_i, so ist die Kurve C vom Geschlecht $p=p_1+p_2+\ldots+p_k-k+1$[1]).

Das Geschlecht einer Kurve vom Maximalindex bedeutet das Geschlecht ihrer dualen Kurve (die vom Maximalklassenindex ist). Das Geschlecht p der Kurven n-ter Ordnung vom Maximalindex, die d Doppelpunkte und r Spitzen ($r=0$ oder 1) haben, läßt sich auch durch die Gleichung

$$p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-r$$

definieren[2]).

Ist M ein Zug einer Kurve K mit einem Doppelpunkt Q, so wird er von Q in zwei Pseudozüge zerlegt. Der eine Pseudozug ist der geschlossene Teil von M, welcher von einem Punkte P durchlaufen wird, während P von Q ausgehend auf M zum ersten Male zur Anfangslage Q zurückkehrt. Der andere geschlossene Teil von M ist der komplementäre Pseudozug. Hat der eine Pseudozug noch Doppelpunkte, so läßt er sich in weitere Pseudozüge zerlegen. Mann kann also den Zug M in Pseudozüge ohne Doppelpunkte zerlegen. Hat der Zug M in Q einen gewöhnlichen m-fachen Punkt, so hat der komplementäre Pseudozug in Q einen $(m-1)$-fachen Punkt. Dieser Pseudozug läßt sich von Q ausgehend in solche $m-1$ Pseudozüge zerlegen, die im Punkte Q Winkelpunkte, aber keinen Doppelpunkt haben.

---

[1]) Vgl. die folgenden Arbeiten von Julius v. Sz Nagy:

A) Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex, *Math. Annalen,* **89** (1923), S. 32—75; **90** (1924), S. 152—153.

B) Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximal-Klassenindex, *Math. Annalen,* **100** (1928), S. 164—178.

C) Über die Züge der ebenen Kurven vom Maximal-Klassenindex, *Math. Annalen,* **100** (1928), S. 179—187.

D) Über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, *Math. Zeitschrift,* **35** (1932), S. 80—92.

E) Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, *Math. Zeitschrift,* **37** (1933), S. 493—513.

F) Über die irreduziblen ebenen Kurven von Maximalindex, *diese Acta,* **3** (1927), S. 96—106.

Diese Arbeiten werden im Folgenden unter *A—F* zitiert werden.

[2]) Vgl. *B,*

Schneiden die Züge oder Pseudozüge M_1 und M_2 einander im Punkte Q, so kann man sie in einen Pseudozug vereinigen. Man schneidet M_1 und M_2 im Punkte Q hindurch und verbindet sie dann in einen geschlossenen Pseudozug. Diese Verbindung kann offenbar auf zweierlei Arten stattfinden.

Wir nennen das vorige Verfahren, wodurch der Doppelpunkt Q der Kurve K in zwei Winkelpunkte überführt wird, einen *Durchschnitt* des Doppelpunktes.

Nach unserer Definition ist ein Pseudozug keine eigentliche Kurve, weil er auch Winkelpunkte hat. Er läßt sich aber durch die Abrundung[3]) seiner Winkelpunkte in eine eigentliche Kurve überführen. Ist AB ein den im Endlichen liegenden Winkelpunkt Q enthaltender genügend kleiner Bogen des Pseudozuges, der außer Q keine Singularitäten hat, und ersetzt man diesen Bogen durch einen Konvexbogen (mit stetigen Tangenten), der innerhalb des vom Bogen AB und von der Strecke AB begrenzten endlichen Gebiet liegt und den Pseudozug in A und B berührt, so wird damit der Winkelpunkt Q abgerundet. Die Abrundung eines im Unendlichfernen liegenden Winkelpunktes läßt sich projektiv definieren.

Zerlegt man die Kurve K vom Maximalindex durch Durchschnitte einiger Doppelpunkte in Züge und Pseudozüge ohne Doppelpunkte und rundet man die erhaltenen Winkelpunkte ab, so bilden die so erhaltenen Züge eine Kurve, die im Allgemeinen nicht vom Maximalindex ist. Es gilt aber der folgende Satz[4]):

Jede ebene Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht p, die r Spitzen ($r=0$ *oder* 1) *hat, läßt sich durch Durchschnitte ihrer gewissen* $n-2-r-p$ *Doppelpunkte in* $n-2$ *Züge oder Pseudozüge dritter Ordnung zerlegen. Im Falle* $r=0$ *bzw.* $r=1$ *kann die Kurve noch einen bzw. keinen Zug oder Pseudozug zweiter Ordnung haben. Die Winkelpunkte der erhalte-*

---

[3]) C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, *D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter* (7), Naturv. og Math. Afd., XI. 2 (1914), S. 113–166, insb. 136.

[4]) Für irreduzible Kurven vom Maximalindex und für den Fall $r=0$ wurde dieser Satz in der Arbeit F bewiesen. Der Beweis läßt sich auch für den Fall $r=1$ leicht ergänzen, wenn man in Betracht zieht, daß eine aus Ovalen und aus Zügen dritter Klasse bestehende irreduzible Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex vom Geschlecht $n-3$ ist und kein Oval hat, falls C eine Wendetangente besitzt. Vgl. F, S. 106.

nen Pseudozüge lassen sich so abrunden, daß die so entstandene Kurve n-ter Ordnung den Maximalindex und das Geschlecht $n-2-r$ hat.[5])

2. Über die Doppelstrecken der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex.

Wird die ebene Kurve C n-ter Klasse und vom Maximalklassenindex von der Geraden g in den Punkten A und B berührt und enthält die (endliche oder unendliche) Strecke AB im Innern keinen Punkt der Kurve, so wird die Strecke AB eine *Doppelstrecke* genannt. Eine Doppelstrecke ist von erster bzw. zweiter Art, je nachdem die Berührungspunkte A und B auf einem Zuge bzw. auf verschiedenen Zügen von C liegen. Die Definition der Doppelstrecken läßt sich projektiv verallgemeinern.

Die Ebene wird von der Kurve C und von ihrer eventuellen einzigen Wendetangente in gewisse Gebiete geteilt. Aus jedem Punkte eines Gebietes geht dieselbe Anzahl von Tangenten an die Kurve. Wir bezeichnen mit $G_1, G_2, \ldots, G_k$ bzw. mit $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ die Gebiete, deren Punkte an die Kurve C $n-2$ bzw. n Tangenten senden. Aus den Punkten des Gebietes T_i erreicht man die konvexe Seite der Konvexbogen der Kurve C, die am Rande von T_i liegen. Die Doppelstrecken der Kurve C liegen also alle in den Gebieten T_i.

Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

I. *Bilden die Punkte der Ebene, die an die Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex n Tangenten senden, die Gebiete $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$, und enthält der Rand Γ_i von T_i mindestens zwei Züge von C oder mindestens einen Zug mit Doppeltangenten, so hat die Kurve C in T_i mindestens eine Doppelstrecke.*

---

5) Dieser Satz läßt sich auch auf den Fall verallgemeinern, daß die Kurve K endlichviele Winkelpunkte besitzt. Wir gehen aber auf diese Verallgemeinerung nicht näher ein. — Der Begriff des Index einer Kurve wurde in der Arbeit von O. HAUPT, Über ebene Bogen und Kurven vom Maximalindex im weiteren Sinne, *Sitzungs-Berichte d. Bayerischen Akademie d. Wissenschaften,* Math.-phys. Klasse, 1935, S. 37—70 erweitert. Dort wurden die ebenen Bogen vom Maximalindex in der Literatur erst untersucht. — Die Frage, ob unser Satz sich auch für ebene Bogen vom Maximalindex oder für ebene Kurven vom Maximalindex in weiterem Sinne ausdehnen läßt, müssen wir offen lassen.

Wir nehmen an, daß der Zug Z von C am Rande Γ_1 des Gebietes T_1 liegt. Für den Beweis des Satzes müssen wir nur zeigen, daß T_1 dann und nur dann keine Doppelstrecken von C enthält, wenn es vom Zuge Z und von seiner eventuellen Wendetangente vollständig begrenzt wird und wenn Z keine Doppeltangente besitzt.

Wir bezeichnen die Tangente von Z in einem Punkte P mit t. Wir können annehmen, daß Γ_1 von der Tangente t_0 des Zuges Z außerhalb des Berührungspunktes P_0 in mindestens zwei Punkten getroffen wird.

Die Kurve C kann nämlich höchstens einen unpaaren Zug haben und dieser eventuelle unpaare Zug bildet mit seiner Wendetangente zusammen eine paare Kurve. Daraus folgt, daß Γ_1 von jeder gewöhnlichen Tangente t des Zuges Z außerhalb des Berührungspunktes P in einer geraden Anzahl der Punkte getroffen wird. Wird nun Γ_1 außerhalb des Punktes P von keiner Tangente t getroffen, so wird T_1 offenbar vom Oval Z vollständig begrenzt. Das Gebiet T_1 fällt mit dem Äußeren dieses Ovals, d. h. mit dem Gebiete überein, dessen Punkte an Z zwei Tangenten senden. T_1 enthält also in diesem Falle keine Doppelstrecke. Wir können also diesen Fall außer Acht lassen, weil der Satz I in diesem Falle offenbar immer gilt.

Wir nehmen nun an, daß T_1 keine Doppelstrecke von C enthält und bezeichnen die in T_1 liegende und den Punkt P enthaltende größte Strecke der Tangente t mit QR. Die Punkte Q und R liegen auf Γ_1. In einer Spitze oder in dem eventuellen Wendepunkte von Z fällt Q oder R mit P zusammen.

Bewegt sich der Punkt P vom Punkte P_0 ausgehend auf Z immer in demselben Sinne, so bewegt sich der Punkt Q bzw. R auf Γ_1 stetig und in demselben Sinne. Die Punkte Q und R können nicht zusammenfallen.

Die stetige Bewegung des Punktes Q hört während der Bewegung von P offenbar nur dann auf, wenn die Teilstrecke PQ der Strecke QR entweder eine Doppelstrecke ist, oder eine Doppelstrecke enthält, weil man aus einem inneren Punkte des Gebietes T_1 die konvexe Seite der Konvexbogen von Γ_1 erreicht. Dies ist aber unmöglich, weil es in T_1 — nach der Annahme — keine Doppelstrecken von C gibt. Der Punkt Q kann während der einsinnigen Bewegung von P seinen Bewegungssinn nicht verändern.

Änderte sich nämlich Q seinen Bewegungssinn im Punkte Q', so wäre die entsprehende Strecke $P'Q'$ eine Doppelstrecke, weil C von der Tangente t' des Punktes P' auch im Punkte Q' berührt würde. Fielen die Punkte Q und R auf einer Tangente t zusammen, so wäre die entsprechende Strecke PQ eine Doppelstrecke.

Das von der Strecke QR beschriebene Gebiet T der Ebene, wenn Z vom Punkte P durchlaufen wird, ist offenbar ein Teilgebiet von T_1. Wir werden aber zeigen, daß die Gebiete T und T_1 identisch sind, weil jeder innere Punkt S^* von T_1 auch ein Punkt von T ist.

Man kann den Punkt S^* und einen Punkt S_0 von Z durch eine im Innern des Gebietes T_1 liegende offene Kurve γ verbinden, weil T_1 zusammenhängend ist. Bewegt sich nun ein Punkt S von S_0 ausgehend auf γ bis zum Punkte S^*, so sendet S in jeder Lage an Z dieselbe Anzahl der Tangenten, weil S während der Bewegung weder Z, noch seine Wendetangente durchschreitet. Wir nehmen die Veränderung derjenigen beiden von S ausgehenden Tangenten t_1 und t_2 von Z in Betracht, die im Anfangspunkte S_0 zusammenfallen. Liegt S dem Punkte S_0 genügend nahe und bezeichnet P_1 bzw. P_2 den Berührungspunkt von Z mit t_1 bzw. t_2, so ist es klar, daß die Strecken SP_1 und SP_2 im Gebiet T liegen. Die Strecken SP_1 und SP_2 haben auch dann keinen inneren Punkt mit Γ_1 gemeinsam, wenn S irgendein Punkt von γ ist. Im entgegengesetzten Falle enthielte nämlich die erste Strecke SP_1 oder SP_2, die einen inneren Punkt mit Γ_1 gemeinsam hat, eine Doppelstrecke von C, die in T_1 liegt. Aus diesem Widerspruch folgt, daß es eine Strecke QR gibt, die den Punkt S^* in sich enthält. Der Punkt S^* liegt also auch in T.

Wir müssen die folgenden zwei Möglichkeiten untersuchen: *a)* die Punkte Q und R liegen beide auf dem Zuge Z oder auf seiner eventuellen Wendetangente; *b)* der Punkt R liegt auf einem anderen Zuge Z' (oder auf seiner eventuellen Wendetangente).

Im Falle *a)* ist T_1 vom Zuge Z und von ihrer eventuellen Wendetangente begrenzt und fällt mit dem Gebiete T der Ebene überein, dessen Punkte an die einzügige Kurve Z vom Maximalklassenindex die maximale Anzahl der Tangenten senden. In diesem Gebiete gibt es nur dann keine Doppelstrecke, wenn Z keine Doppeltangente besitzt[6]).

[6]) Vgl. *F.*

Im Falle *b)* ist der Zug Z' ein Oval, weil er eine Kurve vom Maximalklassenindex ohne Spitze ist. Der Punkt R kann nämlich auf der Tangente t des Punktes P auf Z mit keinem Punkte der Kurve C zusammenfallen, weil er vom Punkte P verschieden ist. Der Zug Z' hat also keine Spitze und ist deshalb ein Oval. Das Oval Z' wird von keiner Tangente t von Z berührt. Dies ist aber unmöglich, weil die Züge Z und Z' eine reduzible Kurve vom Maximalklassenindex bilden, die also soviele gemeinsame Tangenten besitzen, wie das Produkt ihrer Klassen ist.[7]) (Die Reduzibilität der aus Z und Z' bestehenden Kurve C^* folgt daraus, daß die Punkte der Ebene, aus denen die minimale Anzahl der Tangenten an C gehen, zwei mit einander nicht zusammenhängende Gebiete bilden, nämlich die Gebiete, deren Punkte an Z bzw. Z' die minimale Anzahl der Tangenten senden.)

Aus dem Satze I folgt, daß eine reduzible Kurve C vom Maximalklassenindex immer Doppelstrecken besitzt. Sind nämlich $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ die Gebiete der Ebene, deren Punkte n Tangenten an die Kurve C n-ter Klasse senden, so gibt es mindestens ein Gebiet T_i, dessen Rand mindestens zwei Züge von C enthält. Widrigenfalls wäre das nach der Heraushebung von $T_1, T_2, \ldots, T_\mu$ gebliebene Gebiet G der Ebene zusammenhängend. Dann wäre aber die Kurve C — gegen unsere Annahme — irreduzibel.

3. Fortsetzung. Doppelstrecke als Querschnitt in einem Gebiet. Umformung einer Kurve vom Maximalklassenindex durch eine Doppelstrecke.

Liegt eine Doppelstrecke q mit den Endpunkten A und B im Gebiet T_1 und schließt man sie der Kurve C vom Maximalklassenindex doppelt bei, so kann man die Doppelstrecke q als die zwei Ufer des unendlich schmalen Querschnittes q im Gebiet T_1 betrachten. Die Endpunkte A und B von q liegen auf einem Zug Z bzw. auf zwei verschiedenen Zügen Z und Z', je nachdem q eine Doppelstrecke erster bzw. zweiter Art ist. Die Gebiete der Ebene, deren Punkte an die Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex $n-2$ Tangenten senden, wurden von uns mit $G_1, G_2, \ldots, G_k$ bezeichnet. Ist G_1 bzw. G_2 dem Gebiet T_1 längs des Zuges Z bzw. Z' benachbart, so ist der Querschnitt q

[7]) Vgl. *D.*

des Gebietes T_1 für das Gebiet G_1 bzw. für die Gebiete G_1 und G_2 eine Brücke, durch die die Randpunkte A und B von G_1 bzw. von G_1 und G_2 verbunden werden.

Ist p_i+1 die Zusammenhangszahl des Gebietes G_i, so kann das Geschlecht p des Systems der k Gebiete G_i durch die Gleichung

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k - k + 1$$

definiert werden.

Verbindet die Brücke q zwei Randpunkte des Gebietes G_1, so vermehrt sie die Zusammenhangszahl von G_1 um eins. Verbindet aber q je einen Randpunkt von G_1 und G_2, so vereinigt q die Gebiete G_1 und G_2 in ein Gebiet G_{12}, dessen Zusammenhangszahl offenbar $p_{12}+1=(p_1+1)+(p_2+1)-1=p_1+p_2+1$ ist. Die Brücke q verändert also in diesem Falle die Zahl $p_1+p_2=p_{12}$ nicht, sie ersetzt aber k durch $k-1$. In beiden Fällen wird also das Geschlecht p des Systems der k Gebiete G_i um eins vermehrt.

Die uneigentliche Kurve $\bar{C}$, in welche die Kurve C durch q verwandelt wird, läßt sich durch stetige Deformation in eine eigentliche Kurve C' vom Maximalklassenindex überführen[8]). Wir ersetzen die Doppelstrecke $q=AB$ und die dieser Strecke in den Endpunkten anschließenden genügend kleinen Konvexbogen AA_1 und BB_1 bzw. AA_2 und BB_2 von C durch einen Konvexbogen A_1B_1 bzw. A_2B_2 mit stetigen Tangenten. Diese Konvexbogen liegen in dem längs des Querschnittes q zerschnittenen Gebiete T_1, schmiegen sich an die Ufer von q genügend an, haben mit einander und außerhalb der Endpunkte mit der Kurve C keinen gemeinsamen Punkt und berühren die Kurve C in den Punkten A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2. Die ersten vier Figuren zeigen hinreichend deutlich die möglichen Formen der Kurven $\bar{C}$ und C' in der Nähe der endlichen Doppelstrecke AB, wenn die Doppelstrecke nicht auf der eventuellen Wendetangente von C liegt. Die Konvexbogen A_1B_1 und A_2B_2 sind in den Figuren punktierte Linien. Die Kurve C' enthält die Bogen A_1AA_2 und B_1BB_2 der Kurve C nicht.

Hat die Kurve C die Wendetangente w, so kann eine Doppelstrecke AB auf dieser Wendetangente, also an der Grenze eines Gebietes G_i liegen. Die Kurve C kann von ihrer Wendetangente ausserhalb des Wendepunktes A nicht geschnitten wer-

[8]) Vgl. F, S. 104–105.

den, weil sie vom Maximalklassenindex ist. Die Kurve C hat in der Nähe der Doppelstrecke AB die Form der Figur 5. (Wäre nämlich der den Berührungspunkt B enthaltende genügend kleine Konvexbogen B_1B_2 auf der anderen Seite von w, wie in der Figur, so könnte man von der konkaven Seite der Kurve ihre konkave Seite erreichen, ohne die Kurve oder ihre Wendetangente überschreiten zu müssen.)

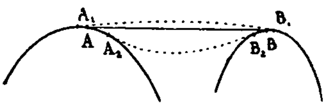

Fig. 1.

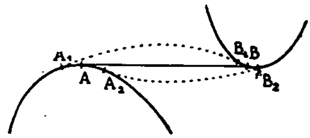

Fig. 2.

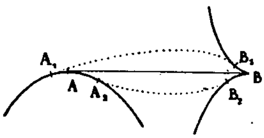

Fig. 3.

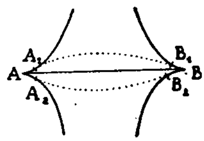

Fig. 4.

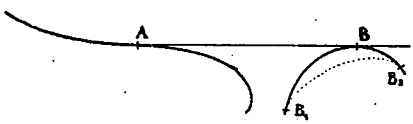

Fig. 5.

Ersetzt man in der Figur 5 den Konvexbogen B_1B_2 durch den punktierten Bogen B_1B_2 mit denselben Endetangenten, so gelangt die Doppelstrecke in das Innere des Gebietes G_i. Dann läßt sich die erhaltene Doppelstrecke als Querschnitt durch zwei Konvexbogen ebenso ersetzen, wie in der Figur 1. Auf ähnliche Weise läßt sich der Fall, wo die Endpunkte der Doppelstrecke AB gewöhnliche Berührungspunkte an der Wendetangente sind, durch entsprechende Deformation der Kurve C erledigen.

Die Kurve C' ist vom Maximalklassenindex, weil man aus einem Punkte der Ebene entweder die konvexe oder die konkave Seite ihrer Konvexbogen erreichen kann, ohne die Kurve oder ihre eventuelle Wendetangente zu überschreiten. Die Kurven C und C' haben dieselben auf der Doppelstrecke q senkrecht stehenden Tangenten, daraus folgt, daß ihre Klassen übereinstimmen.

Aus der Definition des Geschlechts einer Kurve vom Maximalklassenindex folgt, daß C' eine Kurve vom Geschlecht $p+1$ ist, wenn p das Geschlecht von C ist. Hat die Kurve C bzw. C' r bzw. r' Spitzen, so ist $r'=r+2$[9]).

Hat auch die Kurve C' mindestens eine Doppelstrecke, so läßt sich eine ihrer Doppelstrecken durch das vorige Verfahren aufheben. Durch h-malige Anwendung dieses Verfahrens geht die Kurve C vom Geschlecht p in eine Kurve $C^{(h)}$ n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlecht $p+h$ über.

Hat $C^{(h)}$ keine Doppelstrecke, so ist sie irreduzibel und besteht aus $n-2$ Zügen dritter Klasse und aus einem oder keinem Oval. Dies folgt aus dem Satze I. Ein Zug einer Kurve vom Maximalklassenindex hat nämlich nur dann keine Doppeltangente, wenn er entweder eine Kurve dritter Klasse vom Geschlecht eins, oder eine Kurve dritter Klasse mit einer Wendetangente, oder ein Oval ist. Eine irreduzible Kurve vom Maximalklassenindex hat höchstens einen Zug vom Geschlecht null, also höchstens ein Oval oder einen Zug dritter Klasse mit einer Wendetangente. Die Summe der Klassenindizes bzw. die Summe der Geschlechter von den Zügen einer irreduziblen Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlecht p ist $n-2$ bzw. p[10]). Daraus folgt, daß die Kurve $C^{(h)}$ ohne Doppelstrecke und mit r Wendetangenten ($r=0$ oder 1) $n-2$ Züge dritter Klasse hat und vom Geschlecht $n-2-r$ ist. Im Falle $r=1$ hat $C^{(h)}$ kein Oval, im Falle $r=0$ kann sie aber ein Oval haben.

Daraus folgt, daß $p+h=n-2-r$, also $h=n-2-r-p$ ist. Es gelten also die folgenden Sätze:

II. *Die Gebiete der Ebene, deren Punkte an eine Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex $n-2$ Tangenten senden, lassen sich durch $n-2-r-p$ Doppelstrecken als Brücken in ein $(n-1-r)$-fach zusammenhängendes Gebiet G verbinden, wenn p das Geschlecht, r die Anzahl der Wendetangenten von C bedeutet. Die Ufer der angewandten Brücken lassen sich stetig so verändern, daß der Rand von G — die eventuelle Wendetangente abgerechnet — eine irreduzible Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlecht $n-2-r$ ist und $n-2$ Züge dritter Klasse und ein oder kein Oval enthält.*

---

[9]) Vgl. *B.*
[10]) Vgl. *B.*

III. *Eine Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex hat solche n—2—r—p Doppelstrecken, von denen keine zwei einander schneiden, wenn p das Geschlecht und r die Anzahl der Wendetangenten von C bedeutet. Nennt man zwei solche Doppelstrecken der Kurve C, die keinen gemeinsamen inneren Punkt haben, voneinander unabhängig, so gibt es unter den Doppelstrecken von C genau n—2—r—p unabhängige Doppelstrecken.*

4. Über die Kurven vom Maximalindex.

Ist K eine ebene Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex, so begrenzen die Tangenten des einen Doppelpunktes von K zwei Winkelräume. Wird K von jeder Geraden des einen Winkelraumes in n Punkten getroffen, so wird dieser Winkelraum ein *Doppelwinkel* der Kurve K genannt. Diese Definition läßt sich auch auf den Fall mehrfacher Punkte ausdehnen.

Auf Grund des Dualitätsprinzips folgt der in der Einleitung ausgesprochene Satz aus dem Satze II ohne Weiteres. Aus dem Satze III folgt der Satz:

Eine Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht p, die r Spitzen hat, hat genau n—2—r—p solche Doppelwinkel, von denen keine zwei gemeinsame Geraden enthalten.

(Eingegangen am 26. März 1936.)