

## La méthode de variation de Gauss et les fonctions sousharmoniques.

Par OTTO FROSTMAN à Lund.

Il s'agira ici de donner une nouvelle application de la méthode de variation due à GAUSS<sup>1)</sup> dont je me suis servi dans ma Thèse<sup>2)</sup> pour résoudre le problème du balayage dans la théorie du potentiel. L'application que nous avons en vue concerne les fonctions sousharmoniques ou surharmoniques et le théorème fondamental de M. F. RIESZ sur le rapport de ces fonctions aux potentiels<sup>3)</sup>. En formant des moyennes successives de la fonction sousharmonique (surharmonique) donnée, qui peut être discontinue, M. RIESZ construit des fonctions approchées, continues avec leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Pour une telle fonction le théorème est immédiat par la formule classique de POISSON et on arrive ensuite à des fonctions plus générales par un passage à la limite. Nous verrons ici que la méthode de variation signalée ci-dessus conduit *directement* à une démonstration du théorème de M. RIESZ dans le cas où la fonction donnée est *continue*, sans aucune amélioration de cette fonction.

1. Rappelons quelques notions générales concernant le potentiel newtonien de masses distribuées dans l'espace ordinaire à trois dimensions. La distribution de masse étant donnée par une fonction additive d'ensemble  $\mu$ , définie pour tout ensemble de l'espace  $\Omega$ , mesurable au sens de BOREL, le potentiel newtonien

<sup>1)</sup> C. F. GAUSS, Allgemeine Lehrsätze, *Werke*, 5, p. 232.

<sup>2)</sup> O. FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.*, 3 (1935), p. 1—118, cité dans la suite comme „Thèse“.

<sup>3)</sup> F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.*, 48 (1926), p. 329—343, et 54 (1930), p. 321—360.

dû à cette distribution s'exprime par une intégrale de STIELTJES

$$(1) \quad \int_D \frac{d\mu(Q)}{r_{PQ}},$$

où  $r_{PQ}$  désigne la distance euclidienne des points  $P$  et  $Q$ . Si la distribution  $\mu$  est de signe constant et s'annule hors d'un domaine borné  $D$ , cette intégrale est égale à la limite finie ou infinie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_D \Phi_N d\mu(Q),$$

$\Phi_N$  désignant la fonction  $= \frac{1}{r_{PQ}}$  pour  $\frac{1}{r_{PQ}} < N$  et  $= N$  pour  $\frac{1}{r_{PQ}} \geq N$ . Si la masse est de signe variable, on écrit  $\mu = \mu^+ - \mu^-$ ,  $\mu^+$  et  $\mu^-$  étant les variations positives et négatives de  $\mu$ , et le potentiel est la différence des potentiels de  $\mu^+$  et de  $\mu^-$  pris séparément. Il est bien déterminé en tout point où l'un au moins de ces derniers potentiels est fini, ce qui arrive partout sauf au plus dans un ensemble de points de capacité nulle<sup>4)</sup>. Si les masses sont réparties dans tout l'espace, le potentiel s'obtient par un passage à la limite effectué sur des intégrales étendues à des domaines  $D_k$  allant en croissant vers l'infini.

L'énergie d'une distribution de masses est donnée par l'intégrale double

$$(2) \quad \frac{1}{2} \iint \frac{1}{r_{PQ}} d\mu(P) d\mu(Q),$$

dont la définition est analogue à celle de l'intégrale (1). Dans le cas où les masses sont de signe variable, nous supposons pour éviter des difficultés qu'elle soit absolument convergente, c'est-à-dire que l'énergie de la distribution  $\mu^+ + \mu^-$  soit finie. Sous cette seule condition on peut démontrer le fait très remarquable et évident au point de vue physique que l'intégrale d'énergie est toujours  $\geq 0$ , et de plus, que le signe d'égalité n'a jamais lieu à moins que  $\mu$  ne s'annule identiquement, c'est-à-dire que la fonction additive  $\mu$  s'annule sur tout ensemble mesurable au sens de BOREL<sup>5)</sup>.

2. Considérons maintenant un domaine connexe  $D$ , dont la frontière est un ensemble fermé  $F$  de capacité positive. Désignons

<sup>4)</sup> Thèse, p. 81.

<sup>5)</sup> Thèse, lemme 3, p. 28.

par  $G(P, Q)$  la *fonction de Green* de ce domaine relative au pôle  $P$ , qui est un point intérieur à  $D$ . Cette fonction est le potentiel newtonien engendré par la masse unité placée au point  $P$  et une répartition négative  $-\mu_P$  sur  $F$  obtenue par le balayage de la première masse sur la frontière,

$$G(P, Q) = \frac{1}{r_{PQ}} - \int_F \frac{d\mu_P(S)}{r_{QS}}.$$

Par cette formule la fonction de GREEN est définie en tout point de l'espace, et on en tire immédiatement les propriétés connues de cette fonction : l'harmonicité, la positivité, la symétrie en  $P$  et en  $Q$  etc. Elle s'annule en tout point extérieur à  $D + F$ , s'il en existe, et aussi en tout point de  $F$  sauf au plus dans un ensemble de points exceptionnels de capacité nulle<sup>6)</sup>.

Désignons encore par  $\mu$  une distribution de masse de signe quelconque dans le domaine  $D$  et formons le „potentiel“ et „l'intégrale d'énergie“ correspondants par rapport au noyau de GREEN  $G(P, Q)$  de ce domaine,

$$(3) \quad u(P) = \int_D G(P, Q) d\mu(Q)$$

et

$$(4) \quad I(\mu) = \frac{1}{2} \iint_D G(P, Q) d\mu(P) d\mu(Q).$$

Si la distribution  $\mu$  est positive, ces intégrales ont des valeurs bien déterminées, finies ou infinies positives. Dans le cas où  $\mu$  est de signe variable, on peut leur donner un sens de la même façon que pour les intégrales (1) et (2) ci-dessus. La signification physique de l'intégrale (4) est aussi claire que celle de (2) : elle représente l'énergie de la masse électrique  $\mu$  en concevant la frontière  $F$  comme un conducteur en communication avec le sol. Au point de vue physique le théorème suivant est donc évident :

**Théorème I.** *L'intégrale d'énergie d'une distribution  $\mu$  dans  $D$*

$$I(\mu) = \frac{1}{2} \iint_D G(P, Q) d\mu(P) d\mu(Q),$$

*formée avec le noyau de Green et supposée absolument convergente,*

<sup>6)</sup> Thèse, p. 74.

est toujours  $\geq 0$ , et le signe d'égalité n'a jamais lieu à moins que  $\mu$  ne s'annule identiquement dans  $D$ .

Pour le démontrer rigoureusement, supposons d'abord que  $\mu$  s'annule identiquement au voisinage de la frontière  $F$ , c'est-à-dire que toute la masse soit répartie sur un ensemble fermé  $A$  intérieur à  $D$ . L'intégrale d'énergie étant absolument convergente par hypothèse, la variation totale de  $\mu$  est nécessairement bornée et le balayage de cette masse sur  $F$  donne lieu à une distribution  $\mu^*$  sur  $F$ , qui est aussi à variation bornée. Elle est déterminée par la formule

$$\mu^*(e) = \int_A \mu_P(e) d\mu(P),$$

où  $e$  est un sous-ensemble quelconque de  $F$ , mesurable au sens de BOREL. Remarquons encore que  $\mu^*$ , dont l'intégrale d'énergie est évidemment absolument convergente, s'annule sur tout ensemble de capacité nulle. Cela étant, en formant la distribution  $\mu' = \mu - \mu^*$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_A G(P, Q) d\mu(P) &= \int_A \frac{d\mu(P)}{r_{PQ}} - \int_A d\mu(P) \int_F \frac{d\mu_P(S)}{r_{SQ}} = \\ &= \int_A \frac{d\mu(P)}{r_{PQ}} - \int_F \frac{d\mu^*(S)}{r_{SQ}} = \int_{A+F} \frac{d\mu'(P)}{r_{PQ}}. \end{aligned}$$

En intégrant encore par rapport à  $\mu(Q)$  et en observant que le potentiel de la distribution  $\mu'$  s'annule en tout point de  $F$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, on obtient

$$\begin{aligned} \iint_A G(P, Q) d\mu(P) d\mu(Q) &= \int_A d\mu(Q) \int_{A+F} \frac{d\mu'(P)}{r_{PQ}} = \\ &= \int_{A+F} d\mu'(Q) \int_{A+F} \frac{d\mu'(P)}{r_{PQ}} + \int_F d\mu^*(Q) \int_{A+F} \frac{d\mu'(P)}{r_{PQ}} = \iint_{A+F} \frac{d\mu'(P) d\mu'(Q)}{r_{PQ}}. \end{aligned}$$

Or cette dernière intégrale est, comme nous l'avons déjà dit, toujours  $\geq 0$ , et le signe d'égalité entraîne  $\mu' \equiv 0$ , c'est-à-dire que  $\mu \equiv 0$  sur  $A$ . Le théorème est donc démontré dans le cas particulier signalé.

Si les masses s'étendent jusqu'à la frontière  $F$ , la variation totale de  $\mu$  peut même devenir infinie sans que l'intégrale d'énergie cesse d'être absolument convergente. Or la valeur de cette intégrale est la limite d'intégrales d'énergie étendues à des en-

sembles  $A_k$  tendant vers  $D$ , et celles-ci sont toujours  $\geq 0$ , ce qui entraîne la même inégalité à la limite. Il nous reste encore à démontrer dans le cas général que l'intégrale d'énergie  $I(\mu)$  ne peut s'annuler à moins que  $\mu$  ne s'annule identiquement dans  $D$ . A cet effet, écrivons d'abord l'inégalité suivante analogue à celle de SCHWARZ. Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux distributions de masse dans  $D$  telles que  $I(\mu)$  et  $I(\nu)$  soient absolument convergentes. On aura alors

$$\left( \iint_D G(P, Q) d\mu(P) d\nu(Q) \right)^2 \leq 4 I(\mu) I(\nu).$$

Cela étant, si  $I(\mu)$  s'annule, il en sera de même de toute intégrale formée du potentiel engendré par  $\mu$  et d'une distribution quelconque  $\nu$  dont l'intégrale d'énergie est absolument convergente. On en conclut facilement que  $\mu$  s'annule identiquement dans  $D$ .<sup>7)</sup>

3. Voici une application immédiate du théorème démontré. Soit  $v(P)$  une fonction définie dans  $D$  qui peut être représentée par un potentiel du type (3), engendré par une masse donnée  $\nu$  dans ce domaine,

$$v(P) = \int_D G(P, Q) d\nu(Q).$$

Nous allons voir qu'en admettant la distribution  $\nu$  inconnue, on pourra l'obtenir comme la solution unique d'un problème de variation, posé en principe déjà par GAUSS et employé par l'illustre mathématicien pour résoudre le problème appelé aujourd'hui de DIRICHLET. En effet, l'intégrale d'énergie de la distribution  $\mu - \nu$ ,

$$I(\mu - \nu) = \frac{1}{2} \iint_D G(P, Q) d(\mu - \nu) d(\mu - \nu),$$

est une fonctionnelle quadratique de la distribution variable  $\mu$  qui est définie positive. Sa valeur minimum est zéro et elle est évidemment atteinte pour  $\mu - \nu \equiv 0$ , c'est-à-dire  $\mu \equiv \nu$ . Inversement, si  $I(\mu - \nu) = 0$ , on aura, d'après ce qu'on vient de dire,  $\mu - \nu \equiv 0$ , la solution  $\nu$  du problème de minimum est donc unique.

La positivité de l'intégrale d'énergie étant démontrée, le résultat obtenu devient presque banal, mais la banalité disparaît tout à fait si l'on écrit la fonctionnelle sous la forme

$$\begin{aligned} I(\mu - \nu) &= I(\mu) - \iint_D G(P, Q) d\mu(P) d\nu(Q) + I(\nu) = \\ &= I(\mu) - \int_D v(P) d\mu(P) + I(\nu). \end{aligned}$$

<sup>7)</sup> Cf. Thèse, p. 32.

Dans ce développement le dernier terme est une constante indépendante de  $\mu$ , et il en résulte que la distribution  $\nu$  s'obtient aussi comme la solution du problème de minimum posé pour la fonctionnelle

$$J(\mu) = I(\mu) - \int_D v(P) d\mu(P),$$

qui est indépendante de l'expression admise de la fonction donnée  $v(P)$ .

4. On sera ainsi conduit à étudier la fonctionnelle  $J(\mu)$  et le problème de minimum correspondant si  $f(P)$  est une fonction arbitraire donnée d'avance dans le domaine  $D$ . Nous ne nous occuperons que d'un cas particulier mais très important : celui où la fonction donnée est sousharmonique ou surharmonique. Dans ce cas, le problème de minimum aboutit à une démonstration du théorème fondamental de M. F. RIESZ sur la représentation de ces fonctions par des potentiels de masses réparties dans  $D$ .<sup>8)</sup> On pourrait aussi caractériser le problème particulier signalé par le fait que la masse résolvante est de signe constant<sup>9)</sup>. Pour fixer les idées, nous supposerons dans la suite que  $f(P)$  est surharmonique ce qui nous permettra de considérer des potentiels de masses positives. Admettons d'abord que  $f(P)$  soit continue.

**Théorème II.** *Soit  $f(P)$  une fonction surharmonique, continue et non négative dans le domaine  $D$ , et désignons par  $A$  un ensemble fermé et borné et de capacité positive intérieur à  $D$ . Il existe alors une distribution unique  $\mu_A$  de masse positive sur  $A$  telle qu'on a en tout point de  $A$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle*

$$f(P) = \int_A G(P, Q) d\mu_A(Q),$$

$G(P, Q)$  désignant la fonction de Green relative au domaine  $D$ . L'ensemble exceptionnel ne contient aucun point intérieur de  $A$ .

Conformément aux indications précédentes nous aurons à minimiser la fonctionnelle

$$J(\mu) = \frac{1}{2} \iint_A G(P, Q) d\mu(P) d\mu(Q) - \int_A f(P) d\mu(P),$$

<sup>8)</sup> F. RIESZ, *loc. cit.*, en particulier *Acta Math.*, 54, p. 357.

<sup>9)</sup> Cf. plus loin p. 157, note <sup>13)</sup>.

mais en nous restreignant à des distributions de masses positives sur  $A$ . Pour toutes les distributions possibles de cette espèce la fonctionnelle  $J(\mu)$  a une borne inférieure  $\lambda$ , qui est nécessairement  $\leq 0$  puisque  $J=0$  pour  $\mu \equiv 0$ , et il existe une suite minimisante  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  de distributions telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(\mu_n) = \lambda$ . Je dis que les fonctions d'ensemble  $\mu_n$  sont également bornées à partir d'un certain indice. En effet, si la masse totale  $m$  de  $\mu$  tend vers l'infini, le premier terme de  $J(\mu)$  tend vers l'infini plus vite que  $cm^2$ , où  $c$  est le minimum (certainement positif) de l'intégrale d'énergie (4) pour  $m=1$ , tandis que le second terme est  $O(m)$ . La borne inférieure de la fonctionnelle ne peut donc pas être atteinte par des masses tendant vers l'infini. Cela étant, on peut de la suite minimisante  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  extraire une suite partielle  $\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \dots, \mu_{n_k}, \dots$  qui dans un certain sens<sup>10)</sup> converge vers une distribution limite  $\mu_A$ , de manière que l'on ait pour toute fonction continue  $f(P)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f(P) d\mu_{n_k}(P) = \int_A f(P) d\mu_A(P).$$

On démontre encore facilement que l'intégrale d'énergie (4) est une fonctionnelle semicontinue inférieurement de  $\mu^{11)$ , c'est-à-dire que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(\mu_{n_k}) \geq I(\mu_A),$$

ce qui donne immédiatement

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} J(\mu_{n_k}) \geq J(\mu_A) \geq \lambda.$$

La distribution  $\mu_A$  fournit par conséquent un vrai minimum de la fonctionnelle  $J(\mu)$ .

Ce point établi, désignons par  $\sigma$  une distribution de masse de signe quelconque sur  $A$ , telle que 1. l'intégrale d'énergie  $I(\sigma)$  soit absolument convergente, 2. la distribution  $\mu_A + \sigma$  soit partout non-négative. Nous dirons que  $\sigma$  est une *variation permise* de la distribution  $\mu_A$ . La distribution  $\varepsilon\sigma$ , où  $\varepsilon$  est un nombre positif très petit, est évidemment une variation permise en même temps que  $\sigma$ . Pour toute variation de cette espèce la valeur de la fon-

<sup>10)</sup> F. RIESZ, Mémoire cité, *Acta. Math.*, 54, p. 351. — C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, *Annales de l'Institut H. Poincaré*, 2 (1932), p. 169—232, spec. Note I, p. 223. — Thèse, p. 10.

<sup>11)</sup> Thèse, p. 22.

tionnelle  $J(\mu)$  ne peut être diminuée, et on aura par conséquent

$$0 \leq J(\mu_A + \varepsilon\sigma) - J(\mu_A) = \varepsilon \left\{ \int_A \int_A G(P, Q) d\mu_A(Q) - f(P) \right\} d\sigma(P) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint_A G(P, Q) d\sigma(P) d\sigma(Q).$$

Considérons maintenant un sous-ensemble arbitraire de  $A$  de capacité positive. Sur cet ensemble on peut toujours répartir une masse positive de manière que son intégrale d'énergie soit finie, ou, ce qui revient au même, il existe toujours des variations permises  $\sigma$  qui sont positives sur un ensemble arbitraire de capacité positive et qui s'annulent en dehors de celui-ci. D'où on conclut immédiatement que la différence

$$\varphi(P) = \int_A G(P, Q) d\mu_A(Q) - f(P)$$

est  $\geq 0$  en tout point de  $A$  sauf peut-être dans un ensemble de capacité nulle. En réalité, il n'y a pas de points d'exception dans un ensemble ouvert quelconque faisant partie de  $A$ , car le premier terme de  $\varphi(P)$  est une fonction surharmonique de  $P$ , donc en tout point  $\geq$  la valeur moyenne dans un entourage sphérique quelconque, et le second terme est continu par hypothèse.

En désignant par  $N$  le noyau de masse relatif à  $\mu_A$ , c'est-à-dire le sous-ensemble fermé le plus petit de  $A$  portant toute la masse  $\mu_A$ , on voit d'une manière analogue que  $\varphi(P) \leq 0$  en tout point de  $N$ . En effet, si la fonction  $\varphi(P)$ , qui est semicontinue inférieurement dans  $D$ , était  $> 0$  en un point de  $N$ , elle serait encore  $> 0$  dans un entourage  $O$  de ce point. En supprimant la masse  $\varepsilon\mu_A(O) \neq 0$  située dans cet entourage on aurait une variation négative de la fonctionnelle, en contradiction avec la propriété minimum de  $J(\mu_A)$ .

L'inégalité double ainsi établie nous donne d'abord que la différence  $\varphi(P)$  s'annule en tout point du noyau  $N$ , sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle où elle peut être  $< 0$ . Or cette fonction, étant la différence d'un potentiel dû à des masses situées sur  $N$  et d'une fonction surharmonique dans tout le domaine  $D$ , est une fonction sousharmonique dans le domaine partiel  $D - N$  et satisfait ici par conséquent au *principe du maximum*. Admettons un moment que la frontière  $F$  de  $D$  ne contienne que



des points *réguliers*, c'est-à-dire que la fonction de GREEN s'annule en tout point de  $F$ . Alors, pour  $P$  tendant vers la frontière de  $D$ , le potentiel dû à la distribution  $\mu_A$  s'annule d'une manière continue avec  $G(P, Q)$ , tandis que  $f(P)$  est non-négative par hypothèse; la plus grande des limites de  $\varphi(P)$  est donc  $\leq 0$ . Il en est de même pour  $P$  tendant vers  $N$ ,  $\varphi(P)$  étant  $\leq 0$  en tout point de cet ensemble<sup>12)</sup>. Par conséquent,  $\varphi(P)$  est  $\leq 0$  en tout point de  $D-N$ , et alors en tout point de  $D$ . L'inégalité opposée étant valable, comme on vient de voir, en tout point de  $A$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, on conclut que  $\varphi(P) = 0$  en tout point de cet ensemble avec ladite exception. En particulier,  $\varphi(P) = 0$  en tout point intérieur de  $A$ . On aura donc la formule

$$f(P) = \int_A G(P, Q) d\mu_A(Q).$$

Il ne nous reste dans ce cas particulier qu'à démontrer que cette représentation de  $f(P)$  est unique. Or cela est évident d'après le théorème I, car, si  $\nu$  est une seconde distribution sur  $A$  dont le potentiel est  $= f(P)$  à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle, on aura  $I(\mu_A - \nu) = 0$ . D'où il vient  $\nu \equiv \mu_A$ .<sup>13)</sup>

Dans le cas où la frontière  $F$  de  $D$  contient des points irréguliers, c'est-à-dire des points où  $G(P, Q) > 0$ , il faut compléter la démonstration ci-dessus par un principe du maximum plus général. Voici cette généralisation, qui se rattache étroitement au principe de PHRAGMÉN—LINDELÖF<sup>14)</sup>.

<sup>12)</sup> Cela est en effet une conséquence immédiate du théorème suivant : Soit  $u$  le potentiel d'une distribution positive sur  $N$ , et désignons par  $S$  et  $T$  deux points variables, l'un dans  $N$  l'autre dans  $D-N$ , tendant tous les deux vers un point frontière  $Q$  de  $N$ . On a alors l'inégalité

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow Q} u(T) \leq \overline{\lim}_{S \rightarrow Q} u(S).$$

Voir A. J. MARIA, The Potential of a Positive Mass and the Weight Function of Wiener, *Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. A.*, 20 (1934), p. 485—489. — Thèse, p. 69.

<sup>13)</sup> On conclut d'une manière analogue que  $J(\mu_A) = \lambda$  est le minimum de  $J(\mu)$  même si l'on permet des distributions de signe variable donnant des intégrales absolument convergentes. En écrivant une telle distribution  $\mu = \mu_A + \mu'$ , on aura en effet

$$J(\mu) = J(\mu_A + \mu') = J(\mu_A) + I(\mu') \geq J(\mu_A).$$

<sup>14)</sup> E. PHRAGMÉN et E. LINDELÖF, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, *Acta Math.*, 31 (1908), p. 381—406.

Soit  $u(P)$  une fonction sousharmonique définie dans un domaine borné  $D$ . Si  $u(P)$  est bornée supérieurement dans ce domaine et si  $\overline{\lim} u(P)$  pour  $P$  tendant vers la frontière est  $\leq M$  à l'exception au plus d'un ensemble de points frontières de capacité nulle, on a  $u(P) \leq M$  en tout point de  $D$ .<sup>15)</sup>

En effet, soit  $\varepsilon$  un nombre positif si petit que l'on veut, l'ensemble des points frontières où  $\overline{\lim} u(P) \geq M + \varepsilon$  est fermé et, par hypothèse, de capacité nulle. Appelons cet ensemble  $E_\varepsilon$  et l'enfermons par un nombre fini de surfaces régulières  $S$  de manière que le problème d'équilibre puisse être résolu pour les domaines fermés limités par  $S$ . C'est-à-dire qu'on peut répartir une masse positive sur  $S$  de façon que son potentiel newtonien  $v(P)$  soit  $= 1$  en tout point de  $S$  et en tout point intérieur à  $S$ . Cela étant, si  $K$  est une borne supérieure de  $u(P)$  dans  $D$ , la fonction surharmonique  $M + \varepsilon + Kv(P)$  est une majorante de  $u(P)$  au voisinage de la frontière  $F$  de  $D$ . C'est-à-dire que la plus grande des limites de la fonction sousharmonique  $u(P) - M - \varepsilon - Kv(P)$  est toujours  $\leq 0$ . On a alors, par le principe du maximum ordinaire,

$$u(P) \leq M + \varepsilon + Kv(P)$$

en tout point de  $D$ . Le point  $P$  étant fixé, cette inégalité est valide quelle que soit la surface  $S$ . En rétrécissant cette surface vers l'ensemble  $E_\varepsilon$ ,  $v(P)$  tend vers zéro puisque la capacité de  $E_\varepsilon$  est nulle, et il vient par conséquent

$$u(P) \leq M + \varepsilon.$$

Donc,

$$u(P) \leq M.$$

En appliquant ce théorème à la différence  $\varphi(P)$  obtenue par la variation de la fonctionnelle  $J(\mu)$ , on conclut comme plus haut que cette fonction est  $\leq 0$  en tout point de  $D$ . Bien entendu, si  $D$  est un domaine infini, il faut d'abord exclure les points très éloignés, mais cela est possible puisque  $G(P, Q)$  s'annule à l'infini.

5. Le théorème II peut être généralisé dans des directions diverses. On peut d'abord s'affranchir de l'hypothèse de la con-

<sup>15)</sup> Au sujet de ce théorème, voir F. VASILESCO, Sur la méthode du balayage de Poincaré, son extension par M. de la Vallée Poussin, et le problème de Dirichlet généralisé, *Journal de Math.*, 14 (1935), p. 209—227, spec. n<sup>os</sup> 5 et 7, pp. 217 et 218; R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen* (Berlin, 1936), p. 134. — La démonstration que nous donnerons ici est en substance due à M. VASILESCO.

tinuité en la remplaçant par la condition que  $f(P)$  soit semicontinue inférieurement et non identiquement infinie. En effet, on peut approcher la fonction donnée par une suite croissante de fonctions continues et surharmoniques, et pour chacune de celles-ci la formule établie est valable. On voit ensuite par un passage à la limite facile à effectuer qu'elle est encore valable pour la fonction limite de la suite<sup>16)</sup>.

De plus, en faisant tendre le domaine  $D'$  vers  $D$ , on obtient une représentation de  $f(P)$  dans tout le domaine  $D$ . Nous avons en outre supposé que  $f(P)$  soit non-négative. Cette hypothèse, faite jusqu'ici pour faciliter l'exposé, peut être remplacée par celle de l'existence d'une fonction harmonique  $\leq f(P)$  dans  $D$ . Nous nous contenons d'énoncer les résultats, déjà bien-connus par les Mémoires souvent cités de M. RIESZ.

**Théorème III.** *Soit  $f(P)$  une fonction surharmonique dans le domaine  $D$  et supposons qu'il existe une fonction harmonique  $\leq f(P)$  dans tout ce domaine. Il existe alors une minorante harmonique qui est la plus grande,  $H(P)$ , et l'on a*

$$f(P) = \int_D G(P, Q) d\mu_D(Q) + H(P),$$

la distribution  $\mu_D$  sur  $D$  étant unique.

(Reçu le 8 novembre 1936)

---

<sup>16)</sup> F RIESZ, *Acta Math.*, 54, p. 348—349. — Cf. aussi G. EVANS, On potentials of positive mass I., *Transactions American Math. Society*, 37 (1935), p. 226—253, spec. p. 231.