Über den Zusammenhang zweier Sätze der Funktionentheorie.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

Es sei $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine nicht konstante Potenzreihe, welche einen endlichen positiven Konvergenzradius besitzt. Jeder Randpunkt des Konvergenzkreises ist nach einem Satz von JENTZSCH eine Häufungsstelle der Nullstellen der Abschnitte

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Liegt nun im Innern, des Konvergenzkreises eine Nullstelle von $f(x)$, so ist diese Stelle auch eine Häufungsstelle der Nullstellen der Abschnitte $f_n(x)$ (laut eines Hurwitzschen Satzes). Wir werden den Zusammenhang dieser zwei Sätze untersuchen. Es sei ξ ein Randpunkt des Konvergenzkreises, in dem die Funktion $f(x)$ regulär ist. Wir wollen diesen Punkt ξ charakterisieren, wenn er eine Nullstelle von $f(x)$ ist. Da ξ auf dem Rande liegt, so ist er nach dem Satz von JENTZSCH stets eine Häufungsstelle der Nullstellen der Abschnitte $f_n(x)$, ob ξ eine Nullstelle von $f(x)$ ist oder nicht. Der Unterschied verwischt sich also scheinbar zwischen den Sätzen von HURWITZ und JENTZSCH, wenn die Nullstelle von $f(x)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises liegt. Den fraglichen Zusammenhang zwischen diesen Sätzen drückt aus der folgende

Satz I. *Es habe* $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *den Konvergenzradius* 1. $f(x)$ *sei im Punkte* $x=1$ *regulär und* $f(1)=0$. *Wir betrachten um den Punkt* 1 *einen Kreis* $\varkappa$ *mit beliebigem Radius* δ $(\delta>0)$. *Dann* *hat jeder Abschnitt* $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *eine Nullstelle in dem Kreise* $\varkappa$, *wenn nur* $n > N(\delta)$ *gilt (wobei* $N(\delta)$ *eine geeignete positive Zahl bedeutet).*

Dieser Satz ist eine einfache Folgerung eines Ostrowskischen Satzes[1]), welcher sich auf die sogenannte „Überkonvergenz" einer Folge von analytischen Funktionen bezieht. Es bezeichne $\{f_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ eine beliebige Teilfolge der Abschittsfolge $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Nach dem Satz von OSTROWSKI ist jeder im Endlichen liegende Randpunkt desjenigen mit dem Einheitskreis zusammenhängenden vollständigen Gebietes, in welchem die Abschnittsfolge $f_{n_k}(x)$ gleichmäßig konvergiert, eine nichtisolierte Häufungsstelle der Nullstellen der Abschnitte $f_{n_k}(x)$, oder ein singulärer Punkt von $f(x)$.

Wir beweisen den Satz I auf indirektem Wege. Wenn der Satz unrichtig wäre, so existierte eine Teilfolge $\{f_{n_k}(x)\}$ der Abschnittsfolge $\{f_n(x)\}$ mit der Eigenschaft, daß kein $f_{n_k}(x)$ eine Nullstelle in dem Kreise $\varkappa$ besitzt. Man kann voraussetzen, daß die Funktion $f(x)$ in dem Kreise $\varkappa$ regulär und bis auf die Stelle $x = 1$ von Null verschieden ist. Wir betrachten um den Punkt 1 den abgeschlossenen Kreis $\varkappa'$ mit dem Radius $\delta/2$ und behaupten, daß er in dem vollständigen Gebiet G der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f_{n_k}(x)\}$ liegt. Aus dem Ostrowskischen Satze folgt nämlich, daß kein Punkt des Kreises $\varkappa'$ ein Grenzpunkt des Gebietes G sein kann, weil erstens in $\varkappa'$ kein singulärer Punkt von $f(x)$ liegt und zweitens, da $\varkappa'$ im Innern von $\varkappa$ liegt, kein Punkt von $\varkappa'$ eine Häufungsstelle der Nullstellen von $f_{n_k}(x)$ ist. Aber auch kein Punkt von $\varkappa'$ im Äußeren des Gebietes G liegen kann, da sonst die Verbindungsstrecke dieses Punktes mit einem im Innern des Einheitskreises liegenden Punkte von $\varkappa'$ einen Grenzpunkt von G enthalten würde. Also liegt der Kreis $\varkappa'$ ganz im Innern von G, folglich konvergiert die Folge $\{f_{n_k}(x)\}$ in dem abgeschlossenen Kreise $\varkappa'$ gleichmäßig. Da $f(x)$ in $\varkappa$ von Null verschieden ist, wenn $x \neq 1$, so gilt auf dem Rande von $\varkappa'$

$$|f(x)| > \varepsilon > 0.$$

[1]) A. OSTROWSKI, Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, *Hamburger Abhandlungen*, 1 (1922), S. 327—350.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f_{n_k}(x)\}$ auf der Kreisfläche $\varkappa'$ ist, bei passender Wahl eines N, für $n_k > N$

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wenn x zu $\varkappa'$ gehört, also auf dem Rande von $\varkappa'$

$$|f_{n_k}(x)| > \frac{\varepsilon}{2},$$

im Mittelpunkt von $\varkappa'$ aber

$$|f_{n_k}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also erreicht $|f_{n_k}(x)|$ ein Minimum im Inneren von $\varkappa'$, d. h. $f_{n_k}(x)$ hat eine Wurzel in $\varkappa'$. Dies widerspricht aber der Annahme, daß kein $f_{n_k}(x)$ eine Nullstelle in dem Kreis $\varkappa$ besitzt.

Man sieht leicht ein, daß Satz I — der eine Ausdehnung des Hurwitzschen Satzes ist für den Fall, wo die Nullstelle der Funktion $f(x)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises liegt — nicht umkehrbar ist, wie dies der Beispiel $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ zeigt.

Die schärfere Fassung des Hurwitzschen Satzes lautet wie folgt: Es sei ξ, $|\xi| < 1$, eine k-fache Nullstelle von $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so haben in jedem hinreichend kleinen Kreise um ξ unendlich viele Abschnitte $f_n(x)$ (sogar alle von einer Stelle an) k Wurzeln, wenn mehrfache Wurzeln immer mehrfach gezählt werden. Diese schärfere Fassung des Hurwitzschen Satzes gilt nicht mehr, wenn die Nullstelle von $f(x)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises liegt. Es sei z. B. $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$. $f(x)$ ist in dem Punkte $x = 1$ regulär und $f(1) = 0$. (1 ist eine einfache Nullstelle von $f(x)$.) Da

$$f_{4n+3}(x) = \frac{1-x}{1+x^2}(1 - x^{4(n+1)})$$

gilt, haben die Abschnitte $f_{4n+3}(x)$ beliebig viele Nullstellen in jedem beliebig kleinen Kreise um 1, wenn nur n genügend groß ist. Also ist in diesem Falle der schärfere Hurwitzsche Satz nicht mehr gültig. Es gilt aber die folgende schwächere Fassung:

Satz II. $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ *sei in dem Punkte* $x = 1$ *regulär* *und sei* 1 *eine k-fache Nullstelle von* $f(x)$. *Dann liegen in jedem beliebig kleinen Kreise um* 1 *mindestens k Wurzeln des Abschnittes* $f_n(x)$, *wenn nur n genügend groß ist.*

B e w e i s. Es bezeichne $\varkappa$ einen beliebig kleinen Kreis um 1 mit dem Radius δ. Wenn der Satz unrichtig wäre, so existierte eine Teilfolge $\{f_{n_k}(x)\}$ der Abschnittsfolge $\{f_n(x)\}$ mit der Eigenschaft, daß jeder $f_{n_k}(x)$ höchtens $k-1$ Nullstellen in dem Kreise $\varkappa$ besitzt. Dann können wir aus dieser Teilfolge eine weitere Teilfolge $\{f_{r_k}(x)\}$ derart auswählen, daß jeder $f_{r_k}(x)$ genau gleichviele und zwar l Nullstellen in dem Kreise $\varkappa$ besitzt, wo

$$1 \leqq l \leqq k-1$$

gilt. (Nach dem Satz I hat ja jeder $f_{r_k}(x)$ mindestens eine Nullstelle in $\varkappa$.) Dann können wir aus der Teilfolge $\{f_{r_k}(x)\}$ wieder eine andere Teilfolge $\{f_{s_k}(x)\}$ auswählen derart, daß die in $\varkappa$ liegenden Wurzeln der Abschnitte $f_{s_k}(x)$ sich zu l Häufungsstellen nähern. Diese Häufungsstellen sind nicht notwendig verschieden; sie liegen in dem abgeschlossenen Kreise $\varkappa$ und außer diesen Häufungsstellen haben die Wurzeln der Abschnitte $f_{s_k}(x)$ keine andere Häufungsstelle im Innern von $\varkappa$. Wir nehmen statt $\varkappa$ den Kreis $\varkappa'$ mit dem Radius $\delta/2$ um den Punkt 1. Da der Kreis $\varkappa'$ nur isolierte Häufungsstellen der Wurzeln der Abschnitte $f_{s_k}(x)$ enthält, so folgt aus dem Ostrowskischen Satze, daß $\varkappa'$ in dem vollständigen Gebiet gleichmäßiger Konvergenz der Folge $f_{s_k}(x)$ liegt (ganz so wie bei dem Beweis des Satzes I). Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $f_{s_k}(x)$ auf der Kreisfläche $\varkappa'$ ist bei passender Wahl eines N für $k>N$ auf dem Rande von $\varkappa'$

$$(1) \qquad |f_{s_k}(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

wo ε eine vorgegebene positive Zahl bedeutet, für welche auf dem Rande von $\varkappa'$

$$(2) \qquad |f(x)|>\varepsilon$$

gilt. Aus (1) und (2) folgt, daß $f(x)$ und $f_{s_k}(x)$ gleichviele Wurzeln in $\varkappa'$ haben. $f_{s_k}(x)$ hat also k Wurzeln in $\varkappa'$. Dies ist aber ein Widerspruch, weil $f_{s_k}(x)$ höchstens l Wurzeln in $\varkappa'$ besitzt und $l<k$ ist.

Es sei ξ eine Nullstelle von $f(x)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises ($|\xi|=1$). Wir haben die Wurzeln der Abschnitte $f_n(x)$ bisher in einem Kreise $\varkappa$ um ξ betrachtet. Wir werden uns im Folgenden nur auf einen Teil des Kreises $\varkappa$ beschränken und nennen den mit $\varkappa$ gemeinsamen Teil des abgeschlossenen Einheitskreises schlechthin „τ-Umgebung".

Satz III. *Es habe* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *den Konvergenzradius* 1 *und die Koeffizienten von* $f(x)$ *sollen der Bedingung*

$$a_n \to 0$$

genügen. $f(x)$ *sei im Punkte* $x=1$ *regulär und der Punkt* 1 *sei eine Häufungsstelle der Abschnittswurzeln, zu dem sich die Abschnittswurzeln aus dem Innern des Einheitskreises nähern, also mit der eben eingeführten Ausdrucksweise jede beliebig kleine* τ-*Umgebung des Punktes* 1 *soll Abschnittswurzeln enthalten. Dann ist* 1 *eine Nullstelle von* $f(x)$.

Beweis. Wir werden den folgenden Satz von M. Riesz[2]) benützen. Es sei $x_1 \ldots x_2$ (d. h. $\operatorname{arc} x_1 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \operatorname{arc} x_2$) ein Regularitätsbogen, welcher den Punkt 1 im Innern enthält. Man kann also $R > 1$ so wählen, daß die für $|x| < 1$ durch die Potenzreihe dargestellte Funktion $f(x)$ im ganzen Sektor (einschließlich Rand) $0 \leqq |x| \leqq R$, $\operatorname{arc} x_1 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \operatorname{arc} x_2$ regulär ist. Dann ist auf dem Rande des Sektors gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{x^{n+1}} (f(x) - f_n(x))\,(x - x_1)\,(x - x_2) = 0, \tag{3}$$

wenn $a_n \to 0$ gilt.

Wir betrachten jetzt eine τ-Umgebung von 1, welche im Innern des genannten Sektors liegt. Da der absolute Betrag der Funktion auf der linken Seite von (3) im Innern des Sektors nicht größer als das Maximum auf dem Rande ist, so gilt alsdann auf dem Rande der τ-Umgebung gleichmäßig die Gleichung (3). Auf dem Rande von τ ist $|x^{n+1}| \leqq 1$ und $|(x - x_1)(x - x_2)| > \eta > 0$, also, wenn n genügend groß ist, gilt auf dem Rande von τ nach (3) die Ungleichung

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{4}$$

wo ε eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl bedeutet. Wenn nun der Satz III unrichtig wäre, so würde $f(1)$ von Null

---

[2]) M. Riesz, Neuer Beweis des Fatouschen Satzes, *Göttinger Nachrichten,* 1916, S. 62—65.

verschieden sein, es gebe also eine positive Zahl ε, für welche auf dem Rande von τ

(5) $$|f(x)| > \varepsilon.$$

Aus (4) und (5) folgt aber, daß die Funktionen $f(x)$ und $f_n(x)$ in τ gleichviele Nullstellen haben, d. h. $f_n(x)$ hat keine Nullstelle in τ. Dies widerspricht aber der Voraussetzung des Satzes III.

(Eingegangen am 5. Oktober 1936.)