Sur le potentiel newtonien et la théorie des fonctions analytiques.

Resumé de deux conférences faites en novembre 1936 à la Société Loránd Eötvös à Budapest et à la Faculté des Sciences de Szeged.

Par ROLIN WAVRE à Genève.

Les conférences faites portaient sur l'état actuel des trois problèmes suivants :

1. Etudier les singularités de la fonction analytique qui coïncide avec un potentiel newtonien dans un domaine vide de matière.
2. Existe-t-il des corps susceptibles d'engendrer le même potentiel au voisinage d'un point?
3. Reconnaître les corps ou les familles de corps susceptibles d'engendrer un potentiel qui dans un domaine coïncide avec une fonction analytique donnée.

STAHL en 1874 les avait déja abordés sur le conseil de WEIERSTRASS.

1. Il est très rare que l'on puisse obtenir une expression assez simple du potentiel newtonien créé par un corps donné pour pouvoir reconnaître quelles sont ses singularités et son domaine de WEIERSTRASS dans l'espace des trois variables complexes x, y, z. Mais, BRUNS, STAHL puis MM. J. HADAMARD, G. HERGLOTZ et E. SCHMIDT ont montré que sous certaines conditions le potentiel peut être prolongé dans le voisinage de l'espace réel au travers de la surface qui porte la matière attractive (simple et double couche) ou qui limite cette matière (potentiel de volume). La méthode employée par ces auteurs revient toujours à construire un corps voisin de la surface envisagée et de même potentiel que le corps donné. Comme le potentiel est une fonction analytique dans les régions vides de matière, il est ainsi possible de prolonger le potentiel de l'un des corps au travers d'une portion de ce corps que n'occupe pas le corps potentiellement équivalent. BRUNS, STAHL, HADAMARD et SCHMIDT emploient à cet effet le théorème de CAUCHY—KOWALEWSKA qui est appelé à jouer dans ce problème 1. un rôle fondamental. La solution d'un tel problème fournit une fonction que j'appelle „de passage" et le potentiel, pris d'un côté de la surface et prolongé jusqu'en un point situé de l'autre côté, est égal au potentiel calculé directement de l'autre côté augmenté de la fonction de passage. Les conditions dans la résolution du problème CAUCHY—KOWALEWSKA sont les suivantes: Le laplacien de la fonction cherchée doit être égal à la densité de volume, la dérivée normale doit être égale à la densité de simple couche, et la fonction elle-même doit être égale à la densité de double couche changée de signe. Si l'on compare les deux potentiels de part et d'autre de la surface, les données précédentes traduisent les sauts du potentiel physique, de ses dérivées normales ou de ses dérivées normales secondes. Mais le potentiel physique de chaque côté est alors prolongeable au travers de la surface. J'ai généralisé les résultats antérieurs et démontré que si le problème de CAUCHY est résoluble la frontière d'une surface ouverte est une ligne de ramification pour la fonction analytique engendrée par le potentiel et que l'arête d'un volume attirant si elle existe, est également une ligne de ramification au voisinage de laquelle viennent se raccorder en général une infinité de branches de la fonction analytique envisagée. Dans ce résumé où je m'efforce d'exprimer les choses sans formule, je voudrais faire apercevoir que la frontière d'une surface attirante est toujours une singularité du potentiel. En effet, comme on le sait par la théorie classique, il n'y a pas raccord au point de vue des fonctions analytiques entre les déterminations du potentiel de part et d'autre de la surface; ce sont deux branches distinctes jusqu'à la frontière, tandis que les deux branches se raccordent en dehors. La frontière sera donc toujours une singularité. Dans les conditions où se placent MM. HADAMARD et SCHMIDT, le potentiel est prolongeable au travers de tout point intérieur à la surface et redonne de l'autre côté le potentiel calculé plus la fonction de passage qui elle est holomorphe dans le voisinage de la frontière. Alors, rien n'empêche de revenir au point de départ et la différence entre les deux branches est égale à la fonction de passage qui joue ainsi le rôle d'une fonction période pour un circuit décrit autour de la frontière. A part ces frontières ou arêtes, le potentiel prolongé n'aura que les singularités de la fonction de passage, solution du problème de CAUCHY—KOWALEWSKA.

Le véritable domaine des fonctions analytiques est, comme on le sait, le domaine complexe. On peut donc étudier les potentiels réels qui sont, dans les régions vides de matière, développables en séries de puissances, également en donnant à ces variables x, y, z des valeurs complexes. M. BEER a étendu la méthode de la fonction de passage aux domaines complexes. Dans ce dernier on peut, en effet, être à distance nulle du corps attirant sans être en un point de ce corps. Il existe une multiplicité à six dimensions à distance nulle d'une surface donnée. Les frontières de cette multiplicité sont à cinq dimensions et c'est au travers de ces dernières que la méthode de HADAMARD—SCHMIDT convenablement interprétée s'applique encore. Mais il y a plus! Prendre les potentiels réels et y substituer les variables complexes est une chose. Substituer les variables complexes dans les intégrales qui définissent le potentiel est une autre chose. Ce second procédé peut fournir de nouveaux potentiels qui n'apparaissaient pas dans le domaine réel. C'est ainsi qu'il existe trois potentiels pour une surface sphérique homogène. Les deux premiers sont connus, le troisième est engendré dans l'espace complexe, plus exactement dans le domaine à six dimensions réelles dont les points sont tous à distance nulle de la sphère. Dans les intégrales, la distance est prise sous la forme habituelle de PYTHAGORE mais les coordonnées du point-argument sont complexes et ces potentiels satisfont à l'équation de LAPLACE en dérivant deux fois par rapport à chacune des variables complexes.

Revenons maintenant au domaine réel. Considérons une surface ouverte s'appuyant sur une ligne fermée. Donnons nous en plus une fonction harmonique au voisinage de la surface. Chargeons la surface d'une densité de double couche égale à la fonction harmonique changée de signe et d'une densité de simple couche égale à la derivée normale de la fonction harmonique sur la surface. Le potentiel engendré par ces deux distributions sera à son tour une fonction harmonique multiforme qui admet la courbe comme ligne de ramification avec la fonction donnée comme fonction-période. Remarquons d'autre part que les polyèdres homogènes envisagés comme surfaces ou comme volumes engendrent un potentiel qui n'a, dans tout l'espace réel, que les arêtes du polyèdre comme singularités et ce sont des lignes de ramification. On voit par là que les potentiels classiques permettent facilement de construire des fonctions harmoniques multiformes des trois variables réelles. Au siècle dernier APPELL avait formé une telle fonction en plaçant deux masses en deux points de l'espace complexe. M. SOMMERFELD avait construit une fonction jouant le rôle de l'inverse de la distance dans un espace de RIEMANN à *n* exemplaires qui se ramifie autour de l'axe des *z*. M. S. BERGMANN engendre aujourd'hui des fonctions harmoniques multiformes au moyen d'une procédé entrevu par M. WHITTAKER. Comme nous venons de voir, les potentiels les plus simples sont de telles fonctions.

2. Dès 1883 M. VOLTERRA remplaçait une distribution de matière de l'espace réel par une distribution dans l'espace complexe de manière que le potentiel reste le même au voisinage d'un point et par conséquent dans toute une région libre de matière. L'exemple de la sphère homogène est de son centre chargé de la masse totale est un phénomène bien connu. La méthode du balayage d'autre part consiste à faire des transports de masse sans modifier le potentiel dans une certaine région. La fonction de GREEN s'obtient en construisant un potentiel de simple couche sur une surface fermée et engendrant le même potentiel qu'un seul point de masse unité situé à l'intérieur de la couche fermée. Nous avons dit plus haut que les méthodes de prolongement analytique pratiquées jusqu'à ce jour sont fondées sur les corps potentiellement équivalents. D'autre part on sait qu'une fonction harmonique est toujours représentable par un potentiel de simple chouche et un potentiel de double couche étalées sur une surface fermée située, ainsi que son intérieur, toute entière dans un domaine où la fonction est harmonique; les surfaces fermées peuvent être choisies arbitrairement et il y a donc toujours ici une infinité de corps potentiellement équivalents. C'est à cause de ce procédé d'engendrement des fonctions harmoniques que les mathématiciens allemands les appellent „Potentialfunktionen".

Pour aboutir à des déterminations uniques des corps par leurs potentiels dans une certaine région, il faudra donc dans le

No. suivant particulariser la nature du corps attirant. Il faut par exemple s'imposer que sur une surface fermée le potentiel ne soit engendré que par une simple couche. Ou encore requerir que ce soit un volume homogène simplement connexe et alors on peut aboutir à des théorèmes d'unicité ou tout au moins d'unicité locale. L'on peut alors démontrer que certains corps de nature déterminée ne peuvent pas être déformés sans que leur potentiel varie en tout point de l'espace.

3. Ainsi, une simple couche ouverte ne peut pas être remplacée par une simple couche voisine (sous certaines conditions de régularité). Car la frontière devrait être commune aux deux surfaces en tant que ligne de ramification du potentiel, la fonction-période devrait être la même en tant que fonction-période du potentiel. Elle devrait être nulle sur l'une et l'autre surface et être harmonique entre ces surfaces, elle serait donc identiquement nulle et les densités de simple couche, égales aux dérivées normales de cette fonction-période, seraient identiquement nulles. M. P. Dive a démontré que deux corps convexes ne peuvent pas engendrer le même potentiel dans leur partie commune. Il s'agit ici de deux volumes de densités positives. On voit par ces exemples qu'il est impossible d'obtenir des corps potentiellement équivalents quand on donne à l'avance certaines caractéristiques des corps envisagés. On peut se demander si un polyèdre homogène admet des déformations continues qui laissent le potentiel invariant soit à l'extérieur soit à l'intérieur du corps.

Les exemples cités tout à l'heure nous acheminent vers le troisième problème qui est de reconnaître un corps étant donné son potentiel. Comme nous l'avons vu, un potentiel peut être engendré par une série de corps équivalents et il faut ajouter des conditions supplémentaires pour aboutir à une détermination complète du corps générateur. Dans la résolution du problème de Dirichlet on engendre une fonction harmonique à l'intérieur d'une surface au moyen d'un potentiel de double couche par la méthode de Fredholm. La surface est alors donnée et la densité est complètement déterminée. On aboutit également à une détermination unique en imposant au corps d'être un volume et d'engendrer un potentiel intérieur qui soit donné par une forme du second degré augmentée d'une constante. MM. Dive et Nikliborc ont en effet démontré que le potentiel d'un ellipsoïde plein homogène caractérise entièrement cet ellipsoïde ; en d'autres termes, il n'existe pas de corps qui puissent créer le même potentiel qu'un ellipsoïde homogène dans la partie commune aux deux volumes.

Le fait que les frontières des surfaces ou les arêtes des volumes sont dans des conditions très générales des lignes de ramification pour le potentiel est une indication précieuse pour la détermination des corps par leurs potentiels.

(Reçu le 17 janvier 1937)