Über das Gesetz der großen Zahlen.

Harald Bohr zum fünfzigsten Geburtstage am 22. April 1937 gewidmet.

Von Willy Feller in Stockholm.

1. Eine Folge von stochastischen Veränderlichen $X_1, X_2, \ldots,$ *konvergiert nach Wahrscheinlichkeit*[1]) gegen Null, wenn die Wahrscheinlichkeit der Relation $|X_n| > \varepsilon > 0$ mit wachsendem n gegen Null strebt, d. h. wenn für die Verteilungsfunktionen $V_n(x)$ der X_n die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} V_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0, \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

gilt. Man sagt ferner allgemein, daß die Folge $\{X_n\}$ dem *Gesetz der großen Zahlen* gehorcht, wenn es eine Zahlenfolge $\{b_n\}$ gibt derart, daß die Folge der stochastischen Veränderlichen

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k) = \frac{1}{n} S_n$$

nach Wahrscheinlichkeit gegen Null strebt. Im Falle gegenseitig unabhängiger Veränderlichen X_n hat Kolmogoroff eine notwendige und hinreichende Bedingung hierfür angegeben[2]). Eine schär-

[1]) Für alle Definitionen sowie für eine mathematisch einwandfreie Fassung aller benutzten Begriffsbildungen beziehe ich mich stets auf die grundlegenden Darstellungen von A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, bzw. von A. Khintchine, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, beides in: Ergebnisse der Mathematik, Bd. 2 (Berlin, 1933). Jedoch bezeichne ich die „zufälligen Veränderlichen" aus sprachlichen Gründen lieber als *stochastische Veränderliche* (variable aléatoire = reelle Funktion auf der Grundmenge).

[2]) A. Kolmogoroff, Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Größen, *Math. Annalen*, **99** (1928), S. 300—319. Man beachte hierzu auch die Berichtigung und Abänderung: A. Kolmogoroff, Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über die Summen zufälliger Grössen", *Math. Annalen*, **102** (1930), S. 484—488.

fere, nur hinreichende Bedingung hat kürzlich mit anderen Methoden auch PLESSNER[3]) abgeleitet.

Im folgenden wird ein neuer Beweis des Kolmogoroffschen Satzes gegeben, und der Satz gleichzeitig verallgemeinert in einer Richtung, die nahegelegt wird durch eine von KHINTCHINE neuerdings in einem Spezialfall behandelte Frage[4]). Eine neue Herleitung der Kolmogoroffschen Bedingung ist vielleicht für die Vereinheitlichung der Methoden nicht ohne Interesse. Die ungeahnten diesbezüglichen Fortschritte in der neuen Wahrscheinlichkeitsrechnung — die man wesentlich der Moskauer mathematischen Schule verdankt — lassen immer mehr die Behandlungsweise mit Hilfe der Differentialgleichungen und die mit Hilfe der charakteristischen Funktionen in den Vordergrund treten. Der folgende Beweis benutzt letztere und schließt sich eng an meine Herleitung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Gültigkeit des Laplace—Ljapounoffschen Grenzwertsatzes an[5]), — man kann das Gesetz der großen Zahlen gewissermaßen als Ausartungsfall von diesem ansehen. Diese Behandlungsweise gestattet es, ohne größeren Aufwand an Mühe an Stelle der Normierung $\frac{1}{n} S_n$ beliebige allgemeinere Normierungen $\frac{1}{a_n} S_n$ zu betrachten. Wir beweisen nämlich folgenden

Satz. *Sind die X_n paarweise unabhängige stochastische Veränderliche mit den Verteilungsfunktionen $V_n(x)$, so ist für die Existenz einer Konstantenfolge $\{b_n\}$, mit welcher $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - b_k)$ nach Wahrscheinlichkeit gegen Null strebt, hinreichend, daß*

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>a_n} dV_k(x) = o(1) \tag{1}$$

und

[3]) A. PLESSNER, Über das Gesetz der großen Zahlen, *Recueil Math. (= Matematitscheski Sbornik, Moskau)*, **43** (= neue Folge, 1) (1936), S. 165—168.

[4]) A. KHINTCHINE, Su una legge dei grandi numeri generalizzata, *Giornale Istituto Attuari*, **7** (1936), S. 365—377.

[5]) W. FELLER, Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung I, *Math. Zeitschrift*, **40** (1935), S. 521—559 und II, *ebenda*, **42** (1937), S. 301—312.

$$(2) \qquad \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<a_n} x^2 d V(x) = o(1)$$

ist. Mann kann dann

$$(3) \qquad b_n = \int\limits_{|x|<a_n} x\, d V_n(x)$$

setzen. Wurden die Koordinatennullpunkte so gewählt, daß für alle n

$$(4) \qquad V_n(+0) \geqq \lambda > 0, \quad V_n(-0) \leqq 1 - \lambda$$

ist, so sind diese Bedingungen auch notwendig.

Gleichzeitig mit $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - b_k)$ strebt $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - b'_k)$ dann und nur dann nach Wahrscheinlichkeit gegen Null, wenn (vgl. Nr. **2**, S. 195)

$$(5) \qquad \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (b_k - b'_k) = o(1)$$

ist. Folgen $\{a_n\}$, mit denen (1) und (2) erfüllt sind, gibt es offenbar *immer,* und es handelt sich gewissermaßen um die Bestimmung ihrer unteren Wachstumsgeschwindigkeit.

Für $a_n = n$ ergibt sich der Satz von KOLMOGOROFF. Der Zusammenhang mit der erwähnten Fragestellung (vgl. [4])) von KHINTCHINE ist folgender. Dort wird einschränkend vorausgesetzt, daß alle X_n positiv sind und dieselbe (stetige) Verteilungsfunktion $V(x)$ haben:

$$(6) \qquad V_n(x) = V(x), \quad V(0) = 0.$$

Gefragt wird, wann man die a_n und die b_n so wählen kann, daß

$$(7) \qquad \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} b_k = 1$$

wird. Dies ist nun nach (3) gleichbedeutend mit

$$(8) \qquad \frac{n}{a_n} \int_0^{a_n} x\, d V(x) = 1 + o(1),$$

was vermöge (1)

$$(9) \qquad \int_{a_n}^{\infty} d V(x) = o\left(\frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} x\, d V(x)\right)$$

ergibt. Wegen (1) und (8) strebt aber trivialerweise $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, und daher folgt aus (9) allgemeiner

$$\int_z^\infty dV(x) = o\left(\frac{1}{z}\int_0^z x\,dV(x)\right), \qquad z\to\infty. \tag{10}$$

Wenn umgekehrt (10) erfüllt ist, so kann man leicht die a_n so wählen, daß (1) und (8) bestehen. Die Bedingung (2) ist aber im Falle (6) eine Folge aus (10). Man hat nämlich

$$\int_0^z x^2 dV(x) = 2\int_0^z x\{V(z)-V(x)\}\,dx \leqq 2\int_0^z x\,dx \int_x^\infty dV(y),$$

woraus unschwer die Abschätzung

$$\frac{n}{a_n^2}\int_0^{a_n} x^2 dV(x) = o\left(\frac{n}{a_n}\int_0^{a_n} x\,dV(x)\right) = o(1)$$

folgt. Für die Möglichkeit der fraglichen Konstantenwahl ist also (10) notwendig und hinreichend. (Die von KHINTCHINE gegebene Bedingung führt man auf (10) zurück, indem man die Reihenfolge der Integrationen vertauscht, und eine davon ausführt.)

Im allgemeinen Falle $V_n(x) = V(x)$ und bei der üblichen Normierung $a_n = n$ ist (1) gleichbedeutend mit $V(-z)+1-V(z) = o\left(\frac{1}{z}\right)$. Die Bedingung (2) ist dann eine einfache Folge hieraus. Diese Bedingung wurde auch schon mit Hilfe von charakteristischen Funktionen von CRAMÉR[6]) hergeleitet. Im Falle eines endlichen ersten Moments wurde dieselbe Methode bereits von KHINTCHINE[7]) benutzt.

Es sei noch bemerkt, daß der obige Satz unmittelbar eine präzisere Antwort auf die mit dem sog. *Petersburger Paradoxon* verbundene Fragestellung liefert (vgl. Nr. **7**, S. 200 f.).

2. Wird

$$v_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dV_n(x)$$

---

[6]) In einem demnächst in den *Cambridge Tracts* erscheinendem Büchlein.

[7]) A. KHINTCHINE, Sur la loi des grands nombres, *Comptes Rendus Paris*, **189** (1929), S. 477—479.

gesetzt, so ist die charakteristische Funktion von $(X_n - b_n)$ bekanntlich $e^{-ib_n t} v_n(t)$ und die von $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - b_k)$ gleich

$$(11) \qquad w_n(t) = e^{-\frac{it}{a_n} \sum_{k=1}^{n} b_k} \prod_{k=1}^{n} v_k\left(\frac{t}{a_n}\right).$$

Nach einem bekannten Satz von P. LÉVY[8]) über die konvergenz von charakteristischen Funktionen ist die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit gegen Null von $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - b_k)$ gleichbedeutend damit, daß

$$(12) \qquad w_n(t) \to 1$$

strebt, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervall.

(11) und (12) zusammen ergeben übrigens unmittelbar die Richtigkeit der an (5) angeknüpften Bemerkung. — Wenn man ferner den Fall ausschließt, daß $|v_n(t)| \equiv 1$ ist für alle n (in welchem Falle der Satz trivial ist), so folgt aus (12) unmittelbar, daß $a_n \to \infty$ streben muß. Man sieht daher leicht, daß wir uns im folgenden stets auf *monoton über alle Grenzen wachsende Folgen* $\{a_n\}$ beschränken können.

3. Wir wollen zunächst zeigen, daß die Bedingungen (1) und (2) *notwendig* sind, und gehen zu diesem Zweck von (12) aus, und setzen außerdem die Richtigkeit von (4) voraus.

Aus (12) folgt zunächst, daß gleichmäßig in jedem Intervall $|t| < T$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{itx}{a_n}} \, dV_n(x + b_n) \to 1$$

strebt. Es strebt daher für jedes feste $\eta > 0$

$$\int_{|x| > \eta a_n} \left(1 - \cos \frac{xt}{a_n}\right) dV_n(x + b_n) \to 0,$$

und durch Integration über ein festes Intervall $0 < t < T > \frac{1}{\eta}$ folgt hieraus, daß auch

$$0 \leq \left(T - \frac{1}{\eta}\right) \int_{|x| > \eta a_n} dV_n(x + b_n) \leq \int_{|x| > \eta a_n} \left(T - \frac{a_n}{x} \sin \frac{xT}{a_n}\right) dV_n(x + b_n) \to 0$$

[8]) P. LÉVY, *Calcul des Probabilités* (Paris, 1925), S. 195 und 197.

geht. Somit strebt für jedes positive η

$$\int_{|x|>\eta a_n} dV_n(x+b_n) \to 0. \tag{13}$$

Aus (4) und (13) folgt nun offenbar weiter, daß

$$|b_n| = o(a_n) \tag{14}$$

sein muß. Hieraus und aus (12) schließt man aber unter Beachtung der Monotonie von $\{a_n\}$ mühelos, daß für $n \to \infty$ gleichmäßig in $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_{|x|>\eta a_n} dV_k(x) \to 0 \tag{15}$$

strebt.

Wir zeigen nun weiter, daß in jedem Intervall $|t| < T$ für $n > N = N(T)$ und $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\frac{xt}{a_n}\, dV_k(x)\right)^2 \leqq \left(1-\frac{\lambda}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2\frac{xt}{a_n}\, dV_k(x) \tag{16}$$

ist. Hierzu setzen wir $\eta = \frac{\pi}{2T}$. Dann ist $\sin\frac{xt}{a_n}$ für $0 < t < T$ im Intervall $0 < x < \eta a_n$ positiv, und in $-\eta a_n < x < 0$ negativ. Sobald also die linke Seite in (15) kleiner bleibt als $\frac{\lambda}{2}$, so folgt aus (4), daß für jedes feste $|t| < T$ die Variation von sämtlichen $V_k(x)$ über jede der beiden Mengen, in denen $\sin\frac{xt}{a_n}$ nichtnegativ bzw. nichtpositiv ist, mindestens gleich $\frac{\lambda}{2}$ ist. Eine Anwendung der Schwarzschen Ungleichung ergibt dann unschwer die Richtigkeit von (16).

Nach (12) strebt nun

$$\prod_{k=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ixt}{a_n}}\, dV_k(x) \right| \to 1\,; \tag{17}$$

aus (16) folgt aber, daß

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ixt}{a_n}}\, dV_k(x)\right|^2 \leqq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\frac{xt}{a_n}\, dV_k(x)\right)^2 + \left(1-\frac{\lambda}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2\frac{xt}{a_n}\, dV_k(x) \leqq$$

$$\leqq 1 - \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2\frac{xt}{a_n}\, dV_k(x)$$

ist. Wegen (17) strebt also

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{xt}{a_n} \, dV_k(x) \to 0,$$

und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervall. Daher hat man insbesondere für jedes positive η

$$\text{(18a)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \eta a_n} \left(1 - \cos \frac{2xt}{a_n}\right) dV_k(x) \to 0$$

und

$$\text{(18b)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| < \eta a_n} \left(1 - \cos \frac{2xt}{a_n}\right) dV_k(x) \to 0.$$

Integriert man (18a) über $0 < t \leq T > \frac{1}{2\eta}$, so erhält man (vgl. die Herleitung von (13)), daß

$$\text{(19)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \eta a_n} dV_k(x) \to 0$$

streben muß. Damit ist zunächst die Notwendigkeit von (1) bewiesen.

Nun wähle man ein festes η so klein, daß für $|t| < T$ und $0 \leqq |x| \leqq \eta a_n$

$$1 - \cos \frac{2xt}{a_n} \geqq \frac{x^2 t^2}{a_n^2}$$

bleibt. Aus der Relation (18b) folgt dann unmittelbar, daß mit diesem η

$$\text{(20)} \qquad \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| < \eta a_n} x^2 dV_k(x) \to 0$$

strebt. Da aber (19) für jedes $\eta > 0$ gilt, folgert man leicht, daß man nachträglich auch in (20) $\eta > 0$ beliebig, insbesondere gleich 1 wählen darf. Damit ist auch die Notwendigkeit von (2) bewiesen.

4. Um nun zu beweisen, daß unsre Bedingungen *hinreichend* sind, beginnen wir mit folgendem

H i l f s s a t z. *Es sei $\{a_n\}$ irgend eine monoton über alle Grenzen wachsende Zahlenfolge, mit welcher für jedes $\eta > 0$ die Relation*

(19) *besteht, und man definiere die* b_n *durch* (3). *Dann ist*

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|=o(1). \tag{21}$$

Ein gleicher Hilfssatz wurde auch für den Beweis des zentralen Grenzwertsatzes benutzt[9]). Der dort gegebene Beweis benutzt jedoch wesentlich, daß $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$ strebt, was hier nicht zuzutreffen braucht. Um also den Satz allgemein zu beweisen, werde $N=N(\varepsilon)$ so bestimmt, daß für $n\geqq N$

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq\frac{1}{e}a_n}dV_k(x)<\varepsilon \tag{22}$$

wird. Dann ist nach (3)

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|=\frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n}\left|\int\limits_{a_k\leqq|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{a_n}\sum_{k=N}^{n}\int\limits_{e^{[\log a_k]}\leqq|x|<e^{[\log a_n]+1}}|x-b_k|\,dV_k(x)\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{a_n}\sum_{s=[\log a_N]}^{[\log a_n]}\sum_{a_N\leqq a_k\leqq e^{s+1}}\int\limits_{e^s\leqq|x|<e^{s+1}}|x-b_k|\,dV_k(x).$$

Da nun offenbar stets $|b_k|\leqq a_k$ bleibt, ist die letzte rechte Seite weiter

$$\leqq\frac{2}{a_n}\sum_{s=[\log a_N]}^{[\log a_n]}e^{s+1}\sum_{a_N\leqq a_k\leqq e^{s+1}}\int\limits_{|x|\geqq e^s}dV_k(x)\leqq$$

$$\leqq\frac{2\varepsilon}{a_n}\sum_{s=[\log a_N]}^{[\log a_n]}e^{s+1}<2\varepsilon e^2.$$

Ferner erhält man durch Aufspaltung des Integrationsintervalls

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{N-1}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{2a_N}{a_n}\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{|x|<a_N}dV_k(x)+2\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{|x|\geqq a_N}dV_k(x)\leqq\frac{2a_N}{a_n}N+2\varepsilon.$$

Da $N=N(\varepsilon)$ fest ist und $a_n\to\infty$ strebt, geht die rechte Seite gegen 2ε, so daß schließlich für hinreichend große n insgesamt

---

[9]) a. a. O. [5]), I., S. 534.

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|<\varepsilon(2e^2+3)$$

wird, w. z. b. w.

5. Wir brauchen noch folgenden

Hilfssatz. *Wenn mit irgend einer Zahlenfolge* $\{a_n\}$ *die Relationen* (1) *und* (2) *gelten, und wenn man* b_n *durch* (3) *definiert, so ist*

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>a_n}dV_k(x+b_k)=o(1), \tag{23}$$

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n}x^2\,dV_k(x+b_k)=o(1), \tag{24}$$

und

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}x\,dV_k(x+b_k)\right|=o(1). \tag{25}$$

Zum Beweise bemerke man zunächst, daß wegen (1) und (2) offenbar *für jedes* $\eta>0$

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|>\eta a_n}dV_k(x)\to 0 \tag{26}$$

strebt. Ferner folgt aus (26) und (3) wegen $a_n\to\infty$ (vgl. Nr. 2, S. 195) unmittelbar, daß

$$|b_n|=o(a_n) \tag{27}$$

ist. (23) ist nun eine triviale Folge aus (26) und (27).

Da wir ferner die $\{a_n\}$ monoton vorausgesetzt haben, wird nach (27) für hinreichend große n sicher $\max[|b_1|,\ldots,|b_n|]<\frac{1}{2}a_n$. Dann hat man aber

$$0\leqq\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n}x^2\,dV_k(x+b_k)\leqq\frac{2}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<2a_n}(x-b_k)^2\,dV_k(x)=$$

$$=\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int\limits_{|x|<2a_n}x^2\,dV_k(x)-2b_k\int\limits_{|x|<2a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)-b_n^2\int\limits_{|x|<2a_n}dV_k(x)\right\}\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n}x^2\,dV_k(x)+4\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq a_n}dV_k(x)+$$

$$+\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|+2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq a_n}dV_k(x),$$

und alle Größen rechts streben nach (2), (1) und (21) gegen Null. Damit ist auch (24) bewiesen. Zum Beweise von (25) genügt es schließlich zu beachten, daß für hinreichend große n wegen (27)

$$\frac{1}{a_n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n} x\,dV_k(x+b_k)\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}(x-b_k)\,dV_k(x)\right|\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{2}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\frac{a_n}{2}\leqq|x|\leqq 2a_n}(|x|+|b_k|)\,dV_k(x)\leqq 4\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq\frac{a_n}{2}}dV_k(x)=o(1)$$

ist, w. z. b. w.

6. Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht zu beweisen, daß die Bedingungen des Satzes von S. 192 f. *hinreichend* sind. Man hat nämlich für $|t|<T$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1-e^{\frac{ixt}{a_n}}\right)dV_k(x+b_k)\right|\leqq$$

$$\leqq 2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq a_n}dV_k(x+b_k)+\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}\frac{xt}{a_n}\,dV_k(x+b_k)\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}\left(1+\frac{ixt}{a_n}-e^{\frac{ixt}{a_n}}\right)dV_k(x+b_k)\right|\leqq\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqq a_n}dV_k(x+b_k)+$$

$$+\frac{T}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|<a_n}x\,dV_k(x+b_k)\right|+\frac{T^2}{2a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n}x^2\,dV_k(x+b_k),$$

und die rechte Seite strebt nach dem Hilfssatz von Nr. **5**, S. 199 gegen Null. Daraus folgt unmittelbar, daß in jedem endlichen Intervall gleichmäßig

$$w_n(t)=\prod_{k=1}^{n}\left\{1-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1-e^{\frac{ixt}{a_n}}\right)dV_k(x+b_k)\right\}\to 1$$

strebt und das ist nach Nr. **2**, S. 195 gleichwertig mit der Behauptung.

7. Es sei noch zum Schluß ein Wort über das vielbesprochene sog. *Petersburger Paradoxon* gestattet. Dieses besteht in der falschen Folgerung aus dem Gesetze der großen Zahlen, daß man bei einem Glückspiel, bei dem die mathematische Erwartung des Gewinns unendlich groß ist, beliebig große Einsätze zahlen dürfe, und doch praktisch sicher sein könne, bei unendlicher Wiederholung des Spiels ohne Schaden abzuschneiden. Mathematisch gesprochen wird behauptet, daß (jedenfalls gewöhnlich im Falle $V_n(x) = V(x)$ mit $V(0) = 0$) wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, d V_n(x) = +\infty$ ist, für *jede* Zahlenfolge $\{c_n\}$ die Wahrscheinlichkeit der Relation

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - c_k) > 0$$

mit wachsendem n gegen 1 strebt. Daß dies auch rein mathematisch unsinnig ist, wurde an einem speziellen Beispiel u. a. von P. LÉVY vorgerechnet[10]). Allgemein kann man nun sagen, daß die oben berechneten Konstanten b_n (vgl. (3)), oder damit im Sinne von (5) äquivalente Konstanten, *immer* im folgenden Sinne die gerechtesten Spieleinsätze sind. Wenn $a_n = n$ gewählt werden kann, so findet mit ihnen ein praktisch sicherer Ausgleich statt (und das kann, auch im Falle $V_n(x) = V(x)$ und bei unendlichem Mittelwert sehr wohl der Fall sein). Andernfalls sind zwar positive Abweichungen praktisch sicher, spielt man jedoch mit irgenwelchen Einsätzen c_n, mit z. B.

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (c_k - b_k) > \alpha > 0,$$

so ist ein beliebig großer Verlust praktisch sicher, d. h. genauer, es strebt dann die Wahrscheinlichkeit der Relation

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - c_k) < -A$$

für jedes positive A mit wachsendem n gegen Eins.

Lund, Februar 1937.

(Eingegangen am 2. März 1937.)

---

[10]) P. LÉVY, a. a. O. [8]), S. 122 ff.