Über die Schwerpunkte der konvexen Kurven bei speziellen Belegungen.

Von STEPHAN VINCZE in Szeged.

Einleitung.

Wir werden uns im Folgenden mit gewissen auf dem Rande bzw. im Inneren einer geschlossenen konvexen Kurve definierten, stetigen, positiven Massenbelegungen, und deren Schwerpunkten, beschäftigen, ferner mit gewissen, durch jene Belegungen bestimmten Abbildungen des von der Kurve begrenzten Gebietes auf sich selbst. Der erste Teil der vorliegenden Arbeit enthält die Definitionen, ferner einen Fixpunktsatz. Nachher bringen wir den Umkreismittelpunkt mit bestimmen unendlichen Massenbelegungen in Verbindung, indem wir zeigen, daß dieser der Limespunkt einer aus den Fixpunkten der erwähnten Abbildungen bestehenden Folge ist. Im dritten Teil untersuchen wir die Einzelheiten unserer Abbildungen. Zum Schluß geben wir eine Verallgemeinerung unseres Fixpunktsatzes und einige weitere Bemerkungen.

§. 1. Ein Fixpunktsatz.

Es sei C eine geschlossene konvexe Kurve mit der Bogenlänge L und n eine positive Zahl. Das durch C und ihr Inneres definierte abgeschlossene Gebiet bezeichnen wir mit K. Zu jedem Punkt P von K sei eine stetige Massenverteilung auf der Kurve C dadurch bestimmt, daß man einem jeden Punkte Q der Kurve C die lineare Dichte $\sigma_P(Q) = r_{PQ}^n$ zuordnet, wobei r_{PQ} den Abstand der Punkte P und Q bedeutet. Die so entstehende Massenverteilung besitzt einen Schwerpunkt $S_P^{(n)}$. Wenn nun P alle Punkte des Gebietes K durchläuft, so entsteht eine Abbildung $P \rightarrow S_P^{(n)}$

:s abgeschlossenen Gebietes K auf sich selbst bzw. auf einen be-
nmten Teil des ganzen Gebietes.

Die analytischen Formeln der Abbildung sind:

$$x_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q}, \qquad y_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \eta_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q},$$

wo der Punkt Q mit den Koordinaten $[\xi_Q(s_Q), \eta_Q(s_Q)]$ die Kurve C durchläuft, und als Parameter die Bogenlänge s_Q verwendet wird.

Wir beweisen, daß die Abbildung $P \to S_P^{(n)}$ einen und nur einen Fixpunkt besitzt.

Es seien (x, y) die Koordinaten des variablen Punktes P in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz. *Die in der ganzen Ebene definierte stetige Funktion*

$$u_n(P) = u_n(x, y) = \int\limits_C r_{PQ}^{n+2} ds_Q = \int\limits_C \left[\sqrt{(x-\xi_Q)^2 + (y-\eta_Q)^2}\right]^{n+2} ds_Q$$

erreicht ihr Minimum in einem einzigen Punkte, und zwar im Innern von C. Dieser Punkt ist ferner der Einzige, wo die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ gleichzeitig verschwinden.

Da die Funktion $u_n(P)$ offenbar überall stetig ist und für $P \to \infty$ nach Unendlich strebt, erreicht sie ihr Minimum wenigstens in einem Punkte.

Betrachten wir nun die Funktion $u_n(x, y)$ zwischen zwei mit der Y-Achse parallelen Stützgeraden $x_1 \leqq x \leqq x_2$ der Kurve C. Wegen

$$\frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} = (n+2) \int\limits_C r_{PQ}^n (x - \xi_Q) \, ds_Q,$$

$$\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} = (n+2) \int\limits_C r_{PQ}^{n-2} [r_{PQ}^2 + n(x-\xi_Q)^2] \, ds_Q > 0$$

ist die Funktion u_n, als Funktion von x, konvex; für festgehaltenes $y = y_0$ kann daher $u_n(x, y)$ ihren minimalen Wert höchtens in *einem* Punkte (x, y_0) erreichen. Ferner ist $\frac{\partial u_n(x, y_0)}{\partial x}$ für $x = x_1$ negativ, für $x = x_2$ positiv, folglich wird das Minimum von $u_n(x, y_0)$

im Innern des Intervalls $x_1 \leqq x \leqq x_2$ erreicht. Die Funktion $u_n(x, y)$ kann also ihren minimalen Wert nur zwischen den betrachteten parallelen Stützgeraden erreichen. Da aber die Funktion $u_n(P)$ unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist, gilt dieselbe Behauptung für jede Lage des Koordinatensystems, also für jedes parallele Stützgeradenpaar. Infolgedessen können die Minimalstellen nur im Innern von C liegen.

Gäbe es zwei oder mehrere verschiedene Minimalstellen, so könnten wir die Kurve so drehen, daß zwei Minimalstellen auf einer mit der X-Achse parallelen Gerade liegen, was aber, wie eben gesehen, unmöglich ist.

Ebenso sieht man ein, daß es nicht zwei oder mehrere verschiedene Stellen geben kann, wo $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y}$, also die partiellen Derivierten von u_n in *allen* Richtungen gleichzeitig verschwinden.

Damit ist aber gleichzeitig der Beweis unseres Fixpunktzatzes erbracht. Es sei nämlich $S_P^{(n)}(x_P^{(n)}, y_P^{(n)})$ der dem Punkte $P(x, y)$ zugeordnete Schwerpunkt. Unsere Behauptung besagt, daß das folgende Gleichungssystem eine und nur eine Lösung besitzt:

$$x_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q} = x$$

$$y_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \eta_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q} = y.$$

Diese Gleichungen können aber in der Form

$$\int\limits_C r_{PQ}^n (x - \xi_Q) \, ds_Q = 0$$

$$\int\limits_C r_{PQ}^n (y - \eta_Q) \, ds_Q = 0$$

geschrieben werden und besagen also, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ gleichzeitig verschwinden, was nach unserem Hilfssatz wirklich für einen einzigen Punkt zutrifft.

Wir bezeichnen den so gewonnenen Fixpunkt mit $S^{(n)}$. Dieser Punkt $S^{(n)}$ kann also als die einzige Minimalstelle der Funktion $u_n(P)$ charakterisiert werden.

§. 2. Eine Schwerpunktseigenschaft des Umkreismittelpunktes.

Untersuchen wir die in §. 1 gewonnenen Fixpunkte bei wachsendem n, so erhalten wir den folgenden Satz:

Für (nicht notwendig ganzzahliges) $n \to +\infty$ konvergiert $S^{(n)}$ nach dem Umkreismittelpunkte der konvexen Kurve C.

Betrachten wir nämlich die Funktion

$$v_n(P) = \left(\frac{1}{L} u_n(P)\right)^{\frac{1}{n+2}} = \left(\frac{1}{L} \int_C r_{PQ}^{n+2} ds_Q\right)^{\frac{1}{n+2}}.$$

Sie erreicht ihren minimalen Wert ebenfalls im Punkte $S^{(n)}$. Bekanntlich ist $v_n(P)$, als Funktion von n betrachtet, nicht abnehmend (vom trivialen Falle eines Kreises mit dem Mittelpunkt P abgesehen ist sie sogar zunehmend).

Ferner gilt[1])

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(P) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{L} \int_C r_{PQ}^{n+2} ds_Q\right)^{\frac{1}{n+2}} = \max_{Q \text{ auf } C} r_{PQ} = v(P)$$

und zwar gleichmäßig für P in K (etwa laut des Dinischen Satzes, da auch die Limesfunktion $v(P)$ offenbar stetig ist). Geometrisch bedeutet $v(P)$ den Halbmesser des kleinsten, um den Punkt P gezeichneten Kreises, die die Kurve C enthält. Unter allen diesen den verschiedenen Lagen von P entsprechenden Kreisen gibt es bekanntlich einen und nur einen Kleinsten[2]), dieser heißt der *Umkreis* der Kurve C. Die Funktion $v(P)$ nimmt also ihren minimalen Wert in einem eizigen Punkte, nämlich im Mittelpunkte O des Umkreises an. Wir wollen nun zeigen, daß die Minimalstellen $S^{(n)}$ der Funktionen $v_n(P)$ nach der Minimalstelle O der Limesfunktion $v(P)$ konvergieren. Die Punkte $S^{(n)}$ haben jedenfalls eine Häufungsstelle in K. Unsere Behauptung besagt, daß sie keine vom Punkte O verschiedene Häufungsstelle besitzen können.

Nehmen wir an, daß für eine monotone Folge ν_k $(\nu_k \to \infty)$

$$S^{(\nu_k)} \to O' \neq O$$

---

1) Siehe z. B. G. Pólya—G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I (Berlin, 1925), II. Abschnitt, Aufgabe No. 198, S. 78; Lösung, S. 243.

2) J. v. Sz. Nagy, Über einen Satz von H. Jung, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung,* 24 (1915), S. 390—392.

gilt. Wegen der Minimaleigenschaft von $S^{(n)}$ g

$$v_n(S^{(n)}) \leqq v_n(O),$$

also speziell

$$v_{\nu_k}(S^{(\nu_k)}) \leqq v_{\nu_k}(O).$$

Daraus folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$v(O') \leqq v(O)$$

entgegen der Tatsache, daß O die einzige Minimalstelle der Funktion $v(P)$ ist.

§. 3. Über die Abbildung $P \to S_P^{(n)}$.

Bei der Definition des Punktes $S_P^{(n)}$ kann man offenbar die Voraussetzung, P gehöre an K, fallen lassen. Es sei also P ein beliebiger Punkt der Ebene. Die Bildpunkte $S_P^{(n)}$ liegen offenbar auch hier im Inneren von C. Wir werfen nun die Frage auf, ob es bei gegebenen n zu einem beliebigen Punkt S des Inneren von C ein P gibt, dessen Bild bei unserer Abbildung S ist. Wir beantworten diese Frage negativ, indem wir den folgenden Satz beweisen.

Bei gegebenem positivem n ist die Ebene durch $P \to S_P^{(n)}$ auf das Innere der Kurve C derart abgebildet, daß die Bildpunkte nicht beliebig nahe an den Rand des Bereiches rücken können.

Betrachten wir nämlich das Verhalten des Punktes $S_P^{(n)}$ für $P \to \infty$. Wir behaupten, daß dieser nach $S^{(0)}$, d. h. nach dem Schwerpunkt von C bei homogener Massenverteilung strebt. In der Tat, sei d der Durchmesser und M ein beliebiger fester Punkt von C; aus

$$x_P^{(n)} = \frac{\int\limits_C \left(\frac{r_{PQ}}{r_{PM}}\right)^n \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C \left(\frac{r_{PQ}}{r_{PM}}\right)^n ds_Q}$$

folgt wegen

$$\left| \frac{r_{PQ}}{r_{PM}} - 1 \right| \leqq \frac{r_{QM}}{r_{PM}} \leqq \frac{d}{r_{PM}}$$

und $r_{PM} \to \infty$

$$x_P^{(n)} \to \frac{\int\limits_C \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C ds_Q} = x^{(0)};$$

ebenso gewinnt man

$$y_P^{(n)} \to \frac{\int\limits_C \eta_Q \, ds_Q}{\int\limits_C ds_Q} = y^{(0)}.$$

Ordnet man also dem unendlichfernen Punkt der (funktionentheoretischen) Ebene den Bildpunkt $S_\infty^{(n)} = S^{(0)}$ zu, so ist unsere Abbildung $P \to S_P^{(n)}$ überall, auch im Unendlichen, stetig. Ferner liegt $S_P^{(n)}$ stets im Inneren von C, also ist der Abstand des Punktes $S_P^{(n)}$ von der Kurve stets positiv. Da dieser Abstand ebenfalls überall stetig ist, erreicht er sein Minimum, das letztere ist somit ebenfalls positiv, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Variiert man hingegen auch n, so erhalten wir, wenigstens für spezielle Kurven, folgendes Resultat:

Es sei C eine konvexe Kurve mit stetiger und überall wesentlich positiver Krümmung. Ist S ein beliebiger Punkt im Inneren von C, so existiert ein Exponent n und ein Punkt P der Ebene, der bei der Abbildung $P \to S_P^{(n)}$ in S übergeht.

Aus der Annahme über die Kurve C folgt leicht, daß es einen solchen Kreis $\mathfrak{K}$ um die Kurve C gibt, daß zu jedem Punkt desselben nur ein Punkt der Kurve C existiert, der von jenem eine maximale Entfernung besitzt.

Wir untersuchen den Bild $S_P^{(n)}$ eines Punktes P der Kreislinie $\mathfrak{K}$ bei unseren Abbildungen, wenn n von 0 bis ∞ wächst. Durch die Abbildung erhalten wir jedenfalls einen stetigen, offenen Bogen γ_P, der bei $n = 0$ aus $S^{(0)}$ entspringt, und wir zeigen, daß dieser für $n \to +\infty$ nach jenem Punkte M der Kurve C strebt, der von P einem maximalen Abstand besitzt.

In der Tat ist[8])

$$\lim_{n \to +\infty} x_P^{(n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\int\limits_C r_{PQ}^n \xi_Q \, ds_Q}{\int\limits_C r_{PQ}^n \, ds_Q} = \xi_M$$

---

[8]) G. Pólya—G. Szegő, a. a. O., Aufgabe No. 201, S. 78; Lösung, S. 244; anzuwenden auf Zähler und Nenner.

und ebenso $\lim\limits_{n\to+\infty} y_P^{(n)}=\eta_M$. Wenn nun der Punkt P den Kreis $\mathfrak{K}$ einmal umläuft, so bewegt sich der entsprechende Punkt M auf der Kurve C (und zwar im gleichen Bewegungssinn). Da aber der zu einem Punkt P gehörige Bogen γ_P sich mit diesem stetig ändert und gleichzeitig mit P in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so streift dieser lückenlos das Innere der Kurve C, womit unser Satz bewiesen ist. Aus diesem Ergebnis folgt für Kurven dieser Art auch der bekannte Satz:

Jeder innere Punkt einer konvexen Kurve läßt sich als Schwerpunkt einer positiven stetigen Massenbelegung darstellen.

§. 4. Eine Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes.

Im ersten Teil unseres Aufsatzes definierten wir zu irgendeinem Punkt der Ebene auf einer konvexen Kurve C der Ebene eine stetige Massenbelegung dadurch, daß wir einem Punkte Q der Kurve C die Dichte $\sigma_P(Q)=r_{PQ}^n$ zuordneten. Es sei nun im Allgemeinen $f(r)$ eine stetige Funktion von r, für welche $rf(r)$ eine mit ihrer ersten Ableitung stetige und stets positive Funktion ist, und es bezeichne $S_P^{(f)}$ den zu der Dichte $\sigma_P(Q)=f(r_{PQ})$ gehörigen Schwerpunkt. Dann können wir zeigen, daß *die Abbildung $P\to S_P^{(f)}$ einen und nur einen Fixpunkt besitzt.*

Der Satz wird ebenso bewiesen, wie der Spezialfall $f(r)=r^n$, nur hat man hier die folgenden Ausdrücke zu betrachten:

$$u_f(P)=u_f(x,y)=\int_C F(r_{PQ})\,ds_Q, \quad \text{wo} \quad F(r)=\int_0^r \varrho f(\varrho)\,d\varrho,$$

$$\frac{\partial u_f}{\partial x}=\int_C F'(r_{PQ})\,\frac{(x-\xi_Q)}{r_{PQ}}\,ds_Q=\int_C f(r_{PQ})\,(x-\xi_Q)\,ds_Q,$$

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2}=\int_C\left[F''(r_{PQ})\,\frac{(x-\xi_Q)^2}{r_{PQ}^2}+F'(r_{PQ})\,\frac{(y-\eta_Q)^2}{r_{PQ}^3}\right]ds_Q>0.$$

§. 5. Bemerkungen.

Wenn wir statt linearen Dichte eine Belegung im Inneren der Kurve mit der Flächendichte r_{PQ}^n bzw. $f(r_{PQ})$ betrachten, wobei Q ein beliebiger Punkt des Gebietes K bedeutet, so erhalten wir analoge Resultate. In diesem Falle haben wir folgende, den obigen entsprechende, Funktionen zu untersuchen:

$$U_n(P) = \iint\limits_K r_{PQ}^{n+2}\, d\xi_Q\, d\eta_Q$$

bzw.

$$U_f(P) = \iint\limits_K F(r_{PQ})\, d\xi_Q\, d\eta_Q.$$

Unsere Sätze gelten ohne wesentliche Veränderungen auch im mehrdimensionalen Raume, wo der Bogenlänge und dem Flächeninhalt der $n-1$ dimensionale bzw. n dimensionale Inhalt entspricht.

(Eingegangen am 2. Dezember 1935.)