Sur une propriété du mouvement brownien.

Par J. MARCINKIEWICZ à Wilno.

1. Considérons un mouvement stochastique sur une droite. Désignons par $p(x_0, t_0, x, t)\,dx$ la probabilité qu'une particule partant au moment t_0 du point x_0 se trouve au moment t dans le segment $(x, x+dx)$. La fonction p est évidemment non-négative et vérifie les deux équations suivantes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_0, t_0, x, t)\,dx = 1 \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_0, t_0, x, t)\,p(x, t, x_1, t_1)\,dx = p(x_0, t_0, x_1, t_1); \quad (t_0 < t < t_1). \tag{2}$$

La première des ces équations exprime que la probabilité totale est égale à l'unité, et la seconde l'indépendance du mouvement dans deux segments contigus du temps.

On sait que sous des conditions très larges, la fonction p vérifie l'équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$\frac{\partial p}{\partial t_0} = -A(x_0, t_0)\frac{\partial p}{\partial x_0} - B(x_0, t_0)\frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2}; \quad B \geqq 0. \tag{3}$$

En particulier le mouvement brownien est décrit par l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial t_0} = -\frac{1}{2\mu}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2} \tag{4}$$

dont la solution probabilistique est la fonction

$$p(x_0, t_0, x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi(t-t_0)}}\,\exp\left(-\mu\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}\right). \tag{5}$$

Le mouvement brownien est donc décrit par une fonction p qui ne dépend que de $t-t_0$ et $x-x_0$. Cette fonction est évidemment symétrique par rapport à x et x_0.

La forme générale de fonctions p vérifiant les deux premières conditions est

$$(6)\qquad p(x_0, t_0, x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi(t-t_0)}} \exp\left[-\mu(t-t_0)\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}-\nu\right)^2\right]$$

où μ et ν désignent deux constantes dont $\mu > 0$ et ν est tout à fait arbitraire. Nous appellerons un tel mouvement le mouvement brownien au sens large. Il y a bien d'autres problèmes stochastiques décrits par les équations différentielles du second ordre et du type parabolique ou elliptique.

Ces équations ont la même source, à savoir l'équation (2) écrite pour t infiniment voisin à t_0. Dans cette note nous utilisons l'équation (3) pour trouver une propriété caractéristique du mouvement brownien.

Fixons deux points (x_0, t_0) et (x, t) $(t > t_0)$. Le produit

$$p(x_0, t_0, x, t)\, p(x, t, x_1, t_1)\, dx\, dx_1$$

exprime la probabilité qu'une particule partant du point x_0 au moment t_0 passe par le segment $(x, x+dx)$ au moment t et se trouve à l'intervalle (x_1, x_1+dx_1) au moment t_1.

Les paramètres $x_0, t_0, x_1, t_1, dx, dx_1$ étant fixés désignons par $x(t, x_0, t_0, x_1, t_1)$ ou tout court par $x(t)$ la valeur de x (dépendant de t) pour laquelle le dit produit atteind son maximum. Nous appellerons les courbes ainsi définies

$$x = x(t) = x(t, x_0, t_0, x_1, t_1)$$

tracées dans le plan (x, t) les caractéristiques du mouvement considéré. Une caractéristique montre donc la valeur la plus probable de l'abscisse x d'une particule au moment t si l'on connait sa position aux moments t_0 et t_1, $t_0 < t < t_1$. En utilisant la notion de ces courbes nous allons caractériser les mouvements browniens.

Théorème 1. *Les caractéristiques du mouvement brownien au sens restreint sont des droites et la fonction correspondante p vérifie deux relations suivantes*

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)\, p(x_0, t_0, x, t)\, dx = o(t-t_0) \quad (t \to \infty),$$

$$(8)\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(t-t_0)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2 p(x_0, t_0, x, t)\, dx = 0.$$

Au contraire si une fonction quelconque $p(x_0, t_0, x, t)$ définissant *un mouvement stochastique admet pour $t_0 < t$ des dérivées partielles d'ordres suffisament élevées et vérifie une équation de la forme* (3) *avec A et B admettant des dérivées partielles continues et $B > 0$, ainsi qu'une des relations* (7) *et* (8) *et si enfin ses caractéristiques sont des droites passant par les points générateurs elle définit le mouvement brownien au sens restreint.*

Pour le mouvement brownien au sens large on a le

Théorème 2. *Les caractéristiques d'un mouvement brownien au sens large sont des droites et la fonction correspondante p vérifie la relation suivante*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)\, p(x_0, t_0, x, t)\, dx = \text{const.} \tag{9}$$

Au contraire, si la fonction p vérifie les conditions du théorème précédent sauf peut-être (7) *et* (8) *et satisfait à l'égalité* (9) *elle définit un mouvement brownien au sens large.*

L'égalité (7) exprime que l'espérance moyenne dans un segment infini du temps est nulle pour chaque point (x_0, t_0), l'égalité (8) dit que la dispersion ne croît pas trop rapidement avec le temps. Remarquons enfin qu'il est impossible de remplacer dans le théorème 2 la condition (9) par (8) avec une constante du côté droit. Une telle condition caractérise les mouvements uniformes par rapport au temps. Nous avons à cet égard le

Théorème 3. *Pour qu'un mouvement stochastique vérifiant les conditions générales du théorème 2 et jouissant de caractéristiques rectilignes soit uniforme par rapport au temps il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(t-t_0)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2\, p(x_0, t_0, x, t)\, dx = \text{const.} \tag{10}$$

La forme générale des mouvements de cette sorte est donnée par la fonction p

$$\begin{aligned} & p(x_0, t_0, x, t) = \\ & = \sqrt{\frac{a}{\pi(t-t_0)}} \exp\left[-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} - \frac{\lambda^2}{4a}(t-t_0)\right] \frac{S(x)}{S(x_0)}, a > 0 \end{aligned} \tag{11}$$

où l'on a posé

$$S(x) = a_1 e^{\lambda x} + a_2 e^{-\lambda x}$$

λ, a_1 et a_2 désignant des constantes telles que $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$ et $a_1 + a_2 > 0$.

2. Nous commençons par la démonstration du théorème 1. Sa première partie étant immédiate, nous nous occupons seulement de la deuxième. Remarquons d'abord que $p > 0$ car dans le cas contraire on aurait pour certains deux points, (x_0, t_0) et (x_1, t_1); $p(x_0, t_0, x_1, t_1) = 0$, ce qui donne en vertu de la positivité de la fonction f et de la formule (2)

$$p(x_0, t_0, x, t)\, p(x, t, x_1, t_1) = 0; \quad -\infty < x < +\infty, \quad t_0 < t < t_1$$

et on voit que la caractéristique $x(t, x_0, t_0, x_1, t_1)$ serait indéfinie. Etant donnée une fonction $f(x, y, u, \ldots)$, nous désignerons d'une façon générale par $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ses dérivées partielles respectivement par rapport au premier, deuxième, troisième, ... argument. Posons

$$R(x_0, t_0, x, t) = \log p(x_0, t_0, x, t).$$

D'après l'hypothèse faite sur les caractéristiques on a pour trois points collinéaires quelconques (x_0, t_0), (x, t), (x_1, t_1)

$$(12) \qquad R_3(x_0, t_0, x, t) + R_1(x, t, x_1, t_1) = 0.$$

Pour obtenir de là une identité, il suffit d'exprimer x_0 au moyen de x, t, x_1, t_1 et t, ce qui donne

$$R_3\left(x - \frac{x_1 - x}{t_1 - t}(t - t_0), t_0, x, t\right) + R_1(x, t, x_1, t_1) = 0$$

ou bien

$$\frac{x_1 - x}{t_1 - t} R_{3,1}\left(x - \frac{x_1 - x}{t_1 - t}(t - t_0), t_0, x, t\right) +$$
$$+ R_{3,2}\left(x - \frac{x_0 - x}{t_1 - t}(t - t_0), t_0, x, t\right) = 0.$$

En tenant compte de l'égalité $(x_1 - x)/(t_1 - t) = (x - x_0)/(t - t_0)$ on en obtient

$$(13) \qquad (x - x_0) R_{3,1}(x_0, t_0, x, t) + (t - t_0) R_{3,2}(x_0, t_0, x, t) = 0.$$

L'équation (13) est une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre en R_3. Elle s'intégre facilement de sorte qu'on obtient pour R_3 l'expression

$$(14) \qquad R_3(x_0, t_0, x, t) = \Phi\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}, x, t\right).$$

De la même façon, on trouve

$$R_1(x_0, t_0, x, t) = \Psi\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}, x_0, t_0\right)$$

ce qui comparé avec (12) et (14) donne

$$(15) \qquad R_1(x_0, t_0, x, t) = -\Phi\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}, x_0, t_0\right).$$

Les formules (14) et (15) peuvent être tirées aussi immédiatement de l'équation (12). En effet, en fixant les points (x, t) et x_1, t_1 on voit que $R_3(x_0, t_0, x, t)$ conserve une valeur constante dès que le point (x_0, t_0) se déplace le long de la demi-droite $t_0 < t$ passant par les points (x, t) et (x_1, t_1). Or, cette droite peût être caractérisée par le coefficient angulair et un de ses points, dirons (x, t) et comme la connaissance du point (x, t) et de la caractéristique suffit d'après ce qui précède pour connaitre $R_3(x_0, t_0, x, t)$ il en résulte que $R_3(x_0, t_0, x, t)$ est bien de la forme (14). En raisonnant d'une façon analogue, ou bien en tenant compte des formules (14) et (15) on obtient

$$(16) \qquad R_3(x_0, t_0, x, t) = -\overline{\Phi}(u, x-ut, t)$$

$$(17) \qquad R_1(x_0, t_0, x, t) = \overline{\Phi}(u, x_0-ut_0, t_0)$$

où l'on a posé $u = (x-x_0)/(t-t_0)$. L'expression $x-ut$ a une signification géométrique à savoir elle désigne le point d'intersection de la droite passant par les points (x_0, t_0) et (x, t) avec la droite $t=0$. On a aussi

$$(18) \qquad x-ut = x_0-ut_0.$$

En tenant compte de (14) on conclut facilement que Φ_1 existe, d'où il vient l'existence de Φ_2 et Φ_3.

De même on démontre l'existence des dérivées secondes. En différentiant l'équation (14) par rapport à x_0 et l'équation (15) par rapport à x et en comparant les résultats ainsi obtenus il vient

$$(19) \qquad \Phi_1(u, x, t) = \Phi_1(u, x_0, t_0)\,; \quad u = (x-x_0)/(t-t_0).$$

En y posant $x = x_0 + u(t-t_0)$ on obtient l'identité en u, x_0, t_0 et t

$$(20) \qquad \Phi_1(u, x_0+u(t-t_0), t) = \Phi_1(u, x_0, t_0).$$

On en tire en différentiant par rapport à t

$$u\,\Phi_{1,2}(u, x_0+u(t-t_0), t) + \Phi_{1,3}(u, x_0+u(t-t_0), t) = 0.$$

On aperçoit facilement que u, $x_0+u(t-t_0)$ et t peuvent prendre des valeurs tout à fait arbitraires, ce qui donne

$$u\,\Phi_{1,2}(u, x, t)+\Phi_{1,3}(u, x, t)=0. \tag{21}$$

L'équation (21) est une équation du premier ordre par rapport à Φ_1; en l'intégrant on a

$$\Phi_1(u, x, t)=K(u, x-ut) \tag{22}$$

ou bien

$$-(t-t_0)R_{1,3}(x_0, t_0, x, t)=K(u, x-ut); \quad u=(x-x_0)/(t-t_0)$$

La fonction p vérifiant d'après l'hypothèse l'équation (3) R doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial R}{\partial t_0}=-A\frac{\partial R}{\partial x_0}-B\left(\frac{\partial R}{\partial x_0}\right)^2-B\frac{\partial^2 R}{\partial x_0^2} \tag{23}$$

où les arguments de R sont x_0, t_0, x et t et ceux de A et B x_0 et t_0. En différentiant l'équation (23) par rapport à x_0 et en posant $R_1=H$ on obtient

$$\frac{\partial H}{\partial t_0}=-A_1H-(A+B_1)\frac{\partial H}{\partial x_0}-B_1H^2-2BH\frac{\partial H}{\partial x_0}-B\frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2}. \tag{24}$$

On a d'après (16) et (18)

$$R_3(x_0, t_0, x, t)=-\bar{\Phi}(u, x_0-ut_0, t)$$

et cette formule devient pour $t_0=0$

$$R_3(x_0, 0, x, t)=-\bar{\Phi}(u, x_0, t)$$

ce qui montre que $\bar{\Phi}$ admet les dérivées partielles.

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t_0}&=\frac{(x-x_0)}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_1-\frac{(x-x_0)t}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_2+\bar{\Phi}_3\\
\frac{\partial H}{\partial x_0}&=-\frac{1}{t-t_0}\bar{\Phi}_1+\frac{t}{t-t_0}\bar{\Phi}_2\\
\frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2}&=\frac{1}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_{1.1}-\frac{2t}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_{1,2}+\frac{t^2}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_{2,2}
\end{aligned} \tag{25}$$

où les arguments de H sont x_0, t_0, x, t, et ceux de $\bar{\Phi}$ u, $x-ut$ et t_0. En portant les valeurs de H, $\frac{\partial H}{\partial t_0}$, $\frac{\partial H}{\partial x_0}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2}$ tirées des formules (25) dans l'équation (24) on obtient

$$\frac{u}{t-t_0}\bar{\Phi}_1-\frac{ut}{t-t_0}\bar{\Phi}_2+\bar{\Phi}_3=-A_1\bar{\Phi}-(A+B_1)\left[-\frac{1}{t-t_0}\bar{\Phi}_1+\frac{t}{t-t_0}\bar{\Phi}_2\right]-$$

$$(26)\qquad -B_1\bar{\Phi}^2-2B\bar{\Phi}\left[-\frac{1}{t-t_0}\bar{\Phi}_1+\frac{t}{t-t_0}\bar{\Phi}_2\right]-$$

$$-B\left[\left(\frac{1}{t-t_0}\right)^2\bar{\Phi}_{1,1}-\frac{2t}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_{1,2}+\frac{t^2}{(t-t_0)^2}\bar{\Phi}_{2,2}\right]$$

où les arguments de $\bar{\Phi}$ sont u, x_0-ut_0, t_0 et ceux de A et B x_0 et t_0. Or u, x_0, t_0, t peuvent être tout à fait arbitraires à l'unique condition $t>t_0$. En fixant donc u, t_0 et x_0 et en faisant tendre $t\to t_0$ on obtient facilement

$$(27)\qquad B(x_0,t_0)\,[\bar{\Phi}_{1,1}(u,x_0-ut_0,t_0)-\\ -2t_0\bar{\Phi}_{1,2}(u,x_0-ut_0,t_0)+t_0^2\bar{\Phi}_{2,2}(u,x_0-ut_0,t_0)]=0$$

ou bien en tenant compte de l'hypothèse $B>0$

$$(28)\qquad \bar{\Phi}_{1,1}-2t_0\bar{\Phi}_{1,2}+t_0^2\bar{\Phi}_{2,2}=0$$

où les arguments de $\bar{\Phi}$ sont u, x_0-ut_0 et t_0. D'autre part en différentiant deux fois l'identité

$$\bar{\Phi}(u,x_0-ut_0,t_0)=-\Phi(u,x_0,t_0)$$

on obtient

$$(29)\qquad \bar{\Phi}_{1.1}-2t_0\bar{\Phi}_{1,2}+t_0^2\bar{\Phi}_{2,2}=-\Phi_{1,1}$$

où les arguments de $\bar{\Phi}$ sont u, x_0-ut_0, t_0 et ceux de Φ u, x_0, t_0. En comparant les équations (28) et (29) on obtient

$$\Phi_{1.1}(u,x_0,t_0)=0$$

ce qui donne

$$(30)\qquad \Phi=a(x_0,t_0)\,u+b(x_0,t_0);\quad \Phi_1(u,x_0,t_0)=a(x_0,t_0)$$

et d'après (22)

$$(31)\qquad a(x_0,t_0)=K(u,x_0-ut_0).$$

En différentiant la dernière égalité par rapport à u on a

$$K_1(u,x_0-ut_0)-t_0K_3(u,x_0-ut_0).$$

Or u, x_0-ut_0, t_0 peuvent être tout à fait arbitraires, on a donc

$$K_1(u,v)-tK_2(u,v)=0$$

ce qui donne $K_1=0$, $K_2=0$, $K=\text{const.}$ L'équation (30) devient

$$(32)\qquad R_1(x_0,t_0,x,t)=\Phi(u,x_0,t_0)=2au+b(x_0,t_0);\quad a=\text{const.}$$

On a donc pour R l'équation suivante

(33) $$R(x_0, t_0, x, t) = -\frac{a}{t-t_0}(x-x_0)^2 + C(x_0, t_0) + D(x, t_0, t)$$

ce qui donne en vertu de (12)

$$\frac{\partial D(x, t_0, t)}{\partial x} + \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} = 0$$

ou bien

$$D(x, t_0, t) + C(x, t) = \omega(t_0, t).$$

En portant la valeur de $D(x, t_0, t)$ tirée de cette formule dans l'équation (33) on obtient en changeant C en $-C$

(34) $$R(x_0, t_0, x, t) = -a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} + C(x, t) - C(x_0, t_0) + \omega(t_0, t).$$

L'équation (1) donne

(35) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^R dx = 1.$$

En différentiant cette équation par rapport à x_0 il vient

(36) $$2a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-x_0}{t-t_0} e^R dx = \frac{\partial C}{\partial x_0}(x_0, t_0).$$

Une nouvelle différentiation par rapport à x_0 fournit la formule

(37) $$-\frac{2a}{t-t_0} + 4a^2\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2 e^R dx - \\ -2a\frac{\partial C}{\partial x_0}(x_0, t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right) e^R dx = \frac{\partial^2 C}{\partial x_0^2}$$

ou bien en tenant compte de (36),

(38) $$-\frac{2a}{t-t_0} + 4a^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right)^2 e^R dx = \left(\frac{\partial C}{\partial x_0}\right)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial x_0^2}.$$

Or, ces calculs sont purement formels, mais il est facile de leur donner de la rigueur. Remarquons que $a \neq 0$. En effet dans le cas contraire on aurait

$$R = C(x, t) - C(x_0, t_0) + \omega(t, t_0)$$

et d'après (35) $C(x_0, t_0) = C(t_0)$, $R = R(t_0, t)$, ce qui est impossible. Observons d'après la formule (34) et le fait $p > 0$ que C est une fonction dérivable de x. Il suffit donc de prouver que les intégrales convenables convergent uniformément. Supposons p. ex. $a>0$, $|x_0|<\Delta$, on a

$$\int_{-\infty}^{-\lambda}(x-x_0)\exp\left[-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}+C(x,t)\right]dx \leqq$$

$$\leqq\int_{-\infty}^{-\lambda}(x-\Delta)^2\exp\left[-a\frac{(x+\Delta)^2}{t-t_0}+C\right]dx,$$

$$\int_{\lambda}^{+\infty}(x-x_0)^2\exp\left[-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}+C(x,t)\right]dx \leqq$$

$$\leqq\int_{\lambda}^{+\infty}(x+\Delta)^2\exp\left[-a\frac{(x-\Delta)^2}{t-t_0}+C\right]dx.$$

Les intégrales du côté droit existant il en résulte la proposition en question. Une démonstration analogue s'applique aussi dans le cas $a<0$. Revenons donc aux formules (36) et (38). En supposant p. ex. la formule (7), on obtient en posant dans (36) $t=\infty$

$$\frac{\partial C}{\partial x_0}(x_0,t_0)=0; \quad C(x_0,t_0)=a(t_0);$$

$$R(x_0,t_0,x,t)=-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}+\overline{\omega}(t_0,t).$$

Il en vient aussi $a>0$. L'équation (35) donne

$$\overline{\omega}(t_0,t)=\frac{1}{2}\log\frac{a}{\pi}-\frac{1}{2}\log(t-t_0),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1 si l'on suppose (7). En admettant (8), on tire de (38)

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x_0}\right)^2+\frac{\partial^2 C}{\partial x_0^2}=0,$$

ce qui s'écrit en posant $S=\exp C$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_0^2}=0; \quad S=a(t_0)x_0+b(t_0)$$

et comme $S\neq 0$, il en résulte $a=0$ ce qui prouve le théorème. Passons à la démonstration du théorème 2. En tenant compte de l'égalité (9), on obtient $\frac{\partial C}{\partial x_0}=\lambda$ où λ désigne une constante.

En intégrant cette équation il vient

$$C = \lambda x_0 + \alpha(t_0)$$

$$R = -a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} + \lambda(x-x_0) + \overline{\omega}(t_0, t).$$

Pour trouver la fonction $\overline{\omega}(t_0, t)$, il suffit de s'appuyer sur l'égalité (35) ce qui nous donne bien la formule (6).

Il nous reste à démontrer le théorème 3. Pour ce but supposons d'abord que le mouvement est uniforme par rapport au temps. Les formules (32) et (33) démontrent que $C(x_0, t_0)$ est une fonction dérivable de ses arguments. La formule (34) montre donc qu'il en est ainsi de la fonction ω dès que $t_0 < t$. En tenant compte de l'hypothèse faite, l'expression

$$C(x, t) - C(x_0, t_0) + \omega(t_0, t)$$

doit être une fonction f uniquement de x_0, x et $t-t_0$, ce qui donne

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x, t-t_0).$$

On en conclut facilement que $\frac{\partial C}{\partial x}$ ne dépend que de x, d'où il vient

$$C(x, t) = f(x) + h(t),$$

ou bien comme R ne dépend que de x_0, x et $t-t_0$,

$$R = -a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} + f(x) - f(x_0) + \omega(t-t_0). \tag{39}$$

En portant les valeurs des dérivées tirées de cette formule à l'équation (3) on obtient

$$-au^2 - \omega' = -A(2au - f') - B(2au - f')^2 + B\left(\frac{2a}{t-t_0} + f''\right);$$

$$4aB = 1\,;\; A = 2Bf'\,;\; Bf'^2 + Bf'' = q = \text{const.}$$

En posant $S = \exp f$, la dernière équation s'écrit

$$S'' = hS \tag{40}$$

h désignant une constante.

La solution de l'équation différentielle (40) donne

$$S = a_1 e^{\mu x} + a_2 e^{-\mu x} \quad \text{ou} \quad S = a \sin \mu(x-\nu) \tag{41}$$

(a_1, a_2, a et ν constantes) d'après que $h = \mu^2$ ou $h = -\mu^2$. Or comme $S \neq 0$, la formule $h = -\mu^2$ donne $\mu = 0$, $S = \text{const.}$ et on voit que le mouvement considéré est brownien. Supposons donc

$h = +\mu^2$, on doit avoir $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$, $a_1 + a_2 > 0$,

$$p(x_0, t_0, x, t) = e^{-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0} + \omega(t-t_0)} S(x)/S(x_0).$$

L'équation (1) montre que ω est de la forme envisagée. Supposons maintenant la formule (10). On a d'après (38)

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_0^2} + \left(\frac{\partial C}{\partial x_0}\right)^2 = \lambda^2 \tag{42}$$

où $\lambda^2 \geqq 0$. En posant $S = \exp C$ la dernière équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_0^2} = \lambda^2 S,$$

ce qui donne

$$S = C_1 e^{\lambda x_0} + C_2 e^{-\lambda x_0}$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions de t_0. Un simple calcul donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}} S(x)\, dx = \tag{43}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}(t-t_0)}\, e^{\frac{\lambda^2}{4a}(t-t_0)} \{C_1(t) e^{\lambda x_0} + C_2(t) e^{-\lambda x_0}\}$$

ce qui démontre l'égalité

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}(t-t_0)}\, e^{\frac{\lambda^2}{4a}(s-t_0) + \omega(t_0, t)} \frac{C_1(t) e^{\lambda x_0} + C_2(t) e^{-\lambda x_0}}{C_1(t_0) e^{\lambda x_0} + C_2(t_0) e^{-\lambda x_0}} = 1. \tag{44}$$

On en conclut facilement

$$C_1(t) = a_1; \quad C_2(t) = a_2$$

où a_1 et a_2 sont des constantes.

L'équation (44) se transforme en

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}(t-t_0)}\, e^{\frac{\lambda^2}{4a}(t-t_0) + \omega(t-t_0)} = 1. \tag{45}$$

L'équation (45) donne enfin

$$p(x_0, t_0, x, t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{a}(t-t_0)}} e^{-a\frac{(x-x_0)}{t-t_0} - \frac{\lambda^2}{4a}(t-t_0)} \frac{S(x)}{S(x_0)}, \tag{46}$$

ce qui est la formule (11). Un calcul direct prouve la relation (2).

(Reçu le 12 janvier 1938)