Über zyklische orthogonale Substitutionen.

Von GUSTAV RADOS in Budapest.

Zyklisch wird eine Substitution genannt, wenn dieselbe nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zur identischen Substitution führt. Es sei

$$(C) \qquad y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine reelle orthogonale Substitution, so kann man fragen: welche arithmetische Eigenschaften ihrer Koeffizienten ihre zyklische Beschaffenheit gewährleisten? Mit dieser Frage beschäftigen sich die nachfolgenden Ausführungen. Einige Anhaltspunkte ergeben sich bei einer Umschau im zweidimensionalen Gebiet. Es erübrigt sich hierbei mit solchen binären Substitutionen zu beschäftigen, deren Determinante gleich -1 ist. Eine solche kann stets auf die Form

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha - y' \cos\alpha \end{aligned}$$

gebracht werden und man überzeugt sich leicht, daß eine einmalige Wiederholung derselben zur identischen Substitution führt.

Es sei nun O eine binäre orthogonale Substitution, deren Determinate gleich $+1$ ist, alsdann kann diese folgendermaßen angesetzt werden:

$$(O) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \sin\alpha \\ y &= -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}$$

Die k-malige Wiederholung dieser Substitution ist

$$(O^k) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos k\alpha + y' \sin k\alpha \\ y &= -x' \sin k\alpha + y' \cos k\alpha. \end{aligned}$$

Soll nun

$$O^k = E$$

sein, wo E die identische Substitution bedeutet, so müssen die Kongruenzen

$$a \equiv \frac{2e\pi}{k} \pmod{2\pi}$$

$$(e = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

erfüllt sein. Demnach sind

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \quad x' \cos \frac{2e\pi}{k} + y' \sin \frac{2e\pi}{k} \\ y &= -x' \sin \frac{2e\pi}{k} + y' \cos \frac{2e\pi}{k} \end{aligned}$$

$$(e = 0, 1, \ldots, k-1)$$

die sämtlichen orthogonalen Substitutionen, deren k-te Potenz die identische Substitution ist. Das Teilungsproblem der Funktion $\cos \alpha$ erheischt die Auflösung der Gleichung

$$\left(2\cos\frac{\alpha}{k}\right)^k - k\left(2\cos\frac{\alpha}{k}\right)^{k-2} + \frac{k(k-3)}{1.2}\left(2\cos\frac{\alpha}{k}\right)^{k-4} + \\ + \frac{k(k-4)(k-5)}{1.2.3} \cdot \left(2\cos\frac{\alpha}{k}\right)^{k-6} + \ldots = 2\cos\alpha,\text{[1]}$$

deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind. Setzt man hierin $\alpha = 2e\pi$, so ergibt sich eine numerische Gleichung mit den Wurzeln

$$1, 2\cos\frac{2\pi}{k}, \quad 2\cos\frac{4\pi}{k}, \ldots, 2\cos\frac{2(k-1)\pi}{k},$$

die sämtlich reelle ganze algebraische Zahlen sind. Im nachfolgenden soll eine algebraische Zahl, deren sämtlichen konjugierten Werte reell sind, *total-reell* genannt werden. Man kann daher von der zyklischen orthogonalen Substitution (1) aussagen, daß *ihre Koeffizienten total-reelle Zahlen sind. Ihre charakteristische Gleichung*

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{2e\pi}{k} - \lambda & \sin\frac{2e\pi}{k} \\ -\sin\frac{2e\pi}{k} & \cos\frac{2e\pi}{k} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - 2\lambda\cos\frac{2e\pi}{k} + 1 = 0$$

hat ganze algebraische Koeffizienten.

---

[1]) S. H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. 1 (erste Auflage: Braunschweig, 1895), S. 435.

Diese beiden Eigenschaften der Koeffizienten: daß sie total-reell sind und daß ferner die aus ihren gebildeten Koeffizienten der charakteristischen Gleichung ganze algebraische Zahlen sind, sollen fernerhin kurz F-Eigenschaft genannt werden. Es ist somit erwiesen, *daß die F-Eigenschaft eine notwendige Bedingung für das zyklische Verhalten der binären orthogonalen Substitutionen ist.*

Ist sie hiezu auch hinreichend? Diese Frage wird durch das folgende Theorem beantwortet:

I. *Haben die Koeffizienten der n-dimensionalen orthogonalen Substitution*

$$(2) \qquad y_i = c_{i1}^{(1)} x_1 + c_{i2}^{(1)} x_2 + \ldots + c_{in}^{(1)} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die F-Eigenschaft, alsdann ist sie zyklisch.

Es sei $K(\vartheta)$ der Körper, in welchem die sämtlichen Koeffizienten $c_{ik}^{(1)}$ eingebettet sind, wobei ϑ einer irreduziblen algebraischen Gleichung

$$\Phi(\vartheta) \equiv \vartheta^m + g_1 \vartheta^{m-1} + \ldots + g_m = 0$$

genügt. Sind

$$\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$$

ihre Wurzeln, alsdann sind

$$(3) \qquad c_{ik}^{(h)} = r_{ik}(\vartheta_h) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n; \quad h = 1, 2, \ldots, m)$$

die konjugierten Werte der $c_{ik}^{(1)}$, wobei dei r_{ik} rationale Funktionen mit rationalen ganzzahligen numerischen Koeffizienten sind. Infolge unserer Annahme sind sämtliche $c_{ik}^{(h)}$ reell-algebraische Zahlen, da ja die $c_{ik}^{(1)}$ als total-reell vorausgesetzt wurden. Man kann nun zeigen, daß die sämtlichen Substitutionen

$$(2^{(h)}) \qquad y_i = c_{i1}^{(h)} x_1 + c_{i2}^{(h)} x_2 \ldots + c_{in}^{(h)} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \; h = 1, 2, \ldots, m)$$

orthogonal sind. Da die Substitution (2) orthogonal ist, bestehen die $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen

$$c_{i1}^{(1)} c_{k1}^{(1)} + c_{i2}^{(1)} c_{k2}^{(1)} + \ldots + c_{in}^{(1)} c_{kn}^{(1)} = \delta_{ik}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n; \; \delta_{ik} = 1 \text{ für } i = k, \; \delta_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k)$$

oder, mit Rücksicht auf (3),

$$r_{i1}(\vartheta_1) r_{k1}(\vartheta_1) + r_{i2}(\vartheta_1) r_{k2}(\vartheta_1) + \ldots + r_{in}(\vartheta_1) r_{kn}(\vartheta_1) = \delta_{ik}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und, da $\Phi(\vartheta)$ irreduzibel ist, auch die Gleichungen

$$r_{i1}(\vartheta_h)r_{k1}(\vartheta_h)+r_{i2}(\vartheta_h)r_{k2}(\vartheta_h)+\ldots+r_{in}(\vartheta_h)r_{kn}(\vartheta_h)=\delta_{ik},$$
$$(i,k=1,2,\ldots,n;\ h=1,2,\ldots,m)$$

die mit den, den orthogonalen Charakter der Substitution ($2^{(h)}$) bezeugenden Gleichungen

$$c_{i1}^{(h)}c_{k1}^{(h)}+c_{i2}^{(h)}c_{k2}^{(h)}+\ldots+c_{in}^{(h)}c_{kn}^{(h)}=\delta_{ik}$$
$$(i,k=1,2,\ldots,n)$$

identisch sind.

Francesco Brioschi hat den Satz aufgestellt[2]) und Frobenius ihn bewiesen[3]), daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer reellen orthogonalen Substitution den absoluten Wert 1 haben und daß ferner alle ihre Elementarteiler einfach sind.

Die charakteristische Gleichung von ($2^{(h)}$) ist

$$\Psi_h(\lambda)\equiv|c_{ik}^{(h)}-\delta_{ik}\lambda|=0$$
$$(i,k=1,2,\ldots,n).$$

Bildet man die Gleichung

$$\text{Norm } \Psi_1(\lambda)=\Psi_1(\lambda)\,\Psi_2(\lambda)\ldots\Psi_m(\lambda)=0,$$

so ist in dieser der Koeffizient von λ^{nm} gleich 1, alle anderen Koeffizienten sind ganze rationale Zahlen, ihre Wurzeln haben alle den absoluten Wert 1. Im Sinne des bekannten Satzes von Kronecker[4]) sind daher ihre sämtlichen Wurzeln Einheitswurzeln; daher sind auch die Wurzeln von $\Psi_1(\lambda)=0$ Einheitswurzeln und da auch alle ihrer Elementarteiler einfach sind, ist erwiesen, daß die orthogonale Substitution (2) zyklisch ist, da nach einem von Frobenius zuerst bewiesenen Satz[5]) ist für die zyklische Beschaffenheit einer linearen Substitution notwendig und hinreichend, daß die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung Einheitswurzeln, und ihre sämtlichen Elementarteiler einfache seien.

Für binäre orthogonale Substitutionen ist demnach die *F*-Eigenschaft der Koeffizienten notwendig und hinreichend für ihre

---

[2]) F. Bioschi, Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches, *Journal de math. pures et appliquées*, 19 (1854), S. 253—256.

[3]) G. Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für die reine und angewandte Math.*, 84 (1878), S. 1—63, insb. S. 52.

[4]) L. Kronecker, Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, *Journal für die reine und angewandte Math.*, 53 (1857), S. 173—175.

[5]) G. Frobenius, a. a. O., S. 16.

zyklische Beschaffenheit. Auch für n-dimensionale orthogonale Substitutionen hat sie sich als hinreichend erwiesen. Ist sie hiezu auch notwendig? Eine einfache Überlegung überzeugt uns, daß dies nicht der Fall ist. Es sei C eine zyklische orthogonale Substitution mit reellen algebraischen Koeffizienten, so daß

$$C^k = E \qquad (k \text{ ganz und rational})$$

ist. Ferner sei Q eine beliebige reelle orthogonale Substitution mit transzendenten Koeffizienten. Es ist dann

$$D = Q^{-1}CQ$$

wiederum orthogonal und zyklisch, da

$$D^k = Q^{-1}C^kQ = Q^{-1}EQ = Q^{-1}Q = E$$

ist. Gleichwohl sind ihre Koeffizienten im allgemeinen durch transzendente Zahlen infiziert und besitzen daher die F-Eigenschaft nicht.

Für n-dimensionale orthogonale Substitutionen gilt der folgende Satz:

II. *Für die zyklische Beschaffenheit einer reellen orthogonalen Substitution C ist die Existenz einer reellen orthogonalen Substitution P notwendig und hinreichend, für die die Koeffizienten der Substitution*

$$\bar{C} = P^{-1}CP$$

die F-Eigenschaft besitzen.

Der Beweis stützt sich auf einen Satz, den LUDWIG STICKELBERGER in seiner inhaltreichen Abhandlung: Über reelle orthogonale Substitutionen, *Programm der eidgenössischen polytechnischen Schule für das Schuljahr 1877/78,* S. I—XVI, insb. S. V—VI, hergeleitet hat. Dieser lautet folgendermaßen:

Ist

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine reelle orthogonale Substitution, so kann man eine reelle orthogonale Substitution P von der Beschaffenheit finden, daß $P^{-1}CP = \bar{C}$ zu der folgenden zerlegbaren Substitution führt:

$$
(\bar{C})\left\{\begin{array}{lllllll}
y_1 & = x_1\cos\vartheta_1 - x_2\sin\vartheta_1 & & & & & \\
y_2 & = x_1\sin\vartheta_1 + x_2\cos\vartheta_1 & & & & & \\
y_3 & = & x_3\cos\vartheta_2 - x_4\sin\vartheta_2 & & & & \\
y_4 & = & x_3\sin\vartheta_2 + x_4\cos\vartheta_2 & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
y_{2\lambda-1} & = & & x_{2\lambda-1}\cos\vartheta_\lambda - x_{2\lambda}\sin\vartheta_\lambda & & & \\
y_{2\lambda} & = & & x_{2\lambda-1}\sin\vartheta_\lambda + x_{2\lambda}\cos\vartheta_\lambda & & & \\
y_{2\lambda+1} & = & & & x_{2\lambda+1} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
y_{2\lambda+\mu} & = & & & & x_{2\lambda+\mu} & \\
y_{2\lambda+\mu+1} & = & & & & & -x_{2\lambda+\mu+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_n & = & & & & & -x_n.
\end{array}\right.
$$

Zunächst soll gezeigt werden, daß die in II aufgestellte Bedingung eine notwendige ist. Wir nehmen an, daß C zyklisch sei, also eine Gleichung

$$C^k = E$$

besteht. Die Substitution

$$\bar{C}^k = (P^{-1}CP)^k = P^{-1}C^kP = P^{-1}EP = P^{-1}P = E$$

kann eingedenk der Zerlegbarkeit von $\bar{C}$ folgendermaßen angesetzt werden:

$$
(4)\qquad \begin{array}{lll}
y_1 = x_1\cos k\vartheta_1 - x_2\sin k\vartheta_1 & & \\
y_2 = x_1\sin k\vartheta_1 + x_2\cos k\vartheta_1 & & \\
y_3 = & x_3\cos k\vartheta_2 - x_4\sin k\vartheta_2 & \\
y_4 = & x_3\sin k\vartheta_2 + x_4\sin k\vartheta_2 & \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Demnach ist (4) die identische Substitution, daher

$$k\vartheta_1 \equiv k\vartheta_2 \equiv \ldots \equiv k\vartheta_\lambda \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

und

$$\cos\vartheta_1,\ \cos\vartheta_2, \ldots \cos\vartheta_\lambda,\ \sin\vartheta_1,\ \sin\vartheta_2, \ldots, \sin\vartheta_\lambda,$$

die Koeffizienten von $\bar{C}$, sind total-reelle algebraische Zahlen. Da C als zyklisch vorausgesetzt ist, so sind die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung Einheitswurzeln und daher ihre Koeffizienten als elementare symmetrische Funktionen von ganzen algebraischen Zahlen, selber ganze algebraische Zahlen. Für zyklische C haben also die Koeffizienten von $\bar{C}$ die F-Eigenschaft, diese ist demnach notwendig für das zyklische Verhalten von C.

Daß sie auch hinreichend ist, zeigt die folgende einfache Überlegung. Haben die Koeffizienten von $\bar{C}$ die F-Eigenschaft, so ist diese zufolge des Theorems I zyklisch. Es besteht demnach eine Gleichung

$$\bar{C}^k = E;$$

andererseits ist

$$\bar{C}^k = (P^{-1}CP)^k = P^{-1}C^kP;$$

es ist daher

$$P^{-1}C^kP = E$$

und hieraus folgt

$$C^k = PEP^{-1} = PP^{-1} = E,$$

daß also C zyklisch ist. Hiermit ist die Richtigkeit des Theorems II vollkommen nachgewiesen.

Daß für binäre orthogonale Substitutionen die F-Eigenschaft der Koeffizienten nicht bloß hinreichend sondern auch notwendig für ihre zyklische Beschaffenheit ist, geht daraus hervor, daß binäre orthogonale Substitutionen mit der Determinante gleich 1 stets vertauschbar sind, so daß

$$P^{-1}CP = CP^{-1}P = C$$

wird.

(Eingegangen am 22. April 1938.)