Bibliographie.

G. Thomsen, Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung (Hamburger Math. Einzelschriften, 15. Heft) VIII + 88 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1933.

Das vorliegende Heft gibt eine Kennzeichnung der euklidischen ebenen Bewegungsgruppe mittels der in ihr enthaltenen involutorischen Elemente, das sind die Halbdrehungen (m. a. W. Spiegelungen an Punkten) und die Spiegelungen an Geraden. Außer den allgemeinen Gruppenaxiomen werden vier Zusatzaxiome über die beiden Arten involutorischer Elemente angenommen; diese Axiome sind sehr einfach bezüglich ihrer gruppentheoretischen Bedeutung, zwar ist ihr geometrischer Inhalt weniger übersichtlich. Die beiden Arten involutorischer Elemente werden in der aufzubauenden Geometrie als Punkte und Geraden, und die zwischen den Gruppenelementen bestehenden Beziehungen als Ausdruck der grundlegenden geometrischen Beziehungen gedeutet; so werden der Reihe nach: vereinigte Lage von Punkt und Gerade, senkrechte und parallele Lage von Geraden, Kongruenz von Strecken (d. i. von Punktepaaren) erklärt, und die grundlegenden Sätze der ebenen Elementargeometrie, einschließlich des Pascalschen Satzes, auf Grund der eingeführten Axiome bewiesen. Es geht hervor, daß die gewählten gruppentheoretischen Axiome zum Aufbau der ebenen Elementargeometrie im wesentlichen hinreichen. Es wird noch die gruppentheoretische Kennzeichnung der räumlichen euklidischen und der hyperbolischen Geometrie kurz erläutert.

Das interessante und wertvolle Werk des früh hingeschiedenen Verfassers eignet sich vorzüglich als eine Anleitung zur axiomatischen Methode. Manche vom Verfasser angegebene Probleme deuten den Weg zum weiteren Aufbau dieser schönen Theorie an.

B. v. K.

D. J. Struik, Theory of Linear Connections (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, dritter Band, Heft 2), VII + 68 S., Berlin, J. Springer, 1934.

The author presents a short summary of the theory of linear connections. His intention was not to inform us exactly and minutely of every smaller detail in this line but to give a short and easily intellegible summing up of the results as well as of the way the theory had to go in order to reach these results. He succeded brilliantly in both. The work deals with the starting points and results of the three main courses: the theory of parallel transporation in the sense of LEVI-CIVITA, then that working with the second order differential equations of VEBLEN and EISENHARDT, and finally the theory of CARTAN that links up the first of these theories with the second. Technically it can be divided into six parts: 1. Vector and tensor algebra; 2. Affin connections; 3. Connections associated with differential equations; 4. Hermitean connections; 5. Projective connections; 6. Induction. The sixth part deals with applications to the theory of surfaces and curves in the space of n dimensions. An excellent bibliography is added.

A. Rapcsák.

Karl Reinhardt, Methodische Einführung in die höhere Mathematik, V + 270 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Seine Eigenart erhält vorliegendes Buch durch die der Differentialrechnung vorangehende und von ihr unabhängige Entwicklung der Integralrechnung. Nach Kenntnis des Referenten werden hier die Quadraturen der elementaren Funktionen (Potenz, Logarithmus, Exponentialfunktion, trigonometrische und zyklometrische Funktionen sowie deren Ableitungen) zum erstenmal sämtlich unmittelbar durchgeführt. Dies sind an und für sich interessante Beispiele. Wir halten es aber für übertrieben, die Integralrechnung völlig unabhängig von der Differentialrechnung darstellen zu wollen. Die Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen und die Produktintegration, ohne Anwendung des Begriffes der Ableitung, sind besonders schwerfällig. Bei den erwähnten Flächenbestimmungen wird entweder der Grenzwert der oberen oder der unteren Rechteckssumme berechnet. Anschaulicher wäre es, zu zeigen, daß beide Rechteckssummen, die den zu bestimmenden Flächeninhalt einschließen, einem gemeinsamen Grenzwert zustreben. Die Rechnung bei der Quadratur von $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bzw. $y=\frac{1}{1+x^2}$, S. 35—40, würde sich auch einfacher gestalten auf Grund der leicht beweisbaren Ungleichungen $s_n < n \sin\frac{b_1}{n} < S_n$ bzw. $s_n < n \operatorname{tg}\frac{b_1}{n} < S_n$ (wobei s_n die Untersumme, S_n die Obersumme bedeutet), aus denen wegen $S_n - s_n \to 0$ folgt $\lim s_n = \lim S_n = b_1$.

In den weiteren Abschnitten werden die Differentiationsregel, der Lagrangesche Mittelwertsatz und der Hauptsatz der Integralrechnung hergeleitet, und dann wird etwas über unendliche Reihen, Produkte und Kettenbrüche auseinandergesetzt. Es wird sogar die Kettenbruchentwicklung von $\operatorname{tg} x$ begründet, was aber dem Anfänger allzuschwer ist und daher unterbleiben dürfte. Es wäre weitaus besser für unendliche Kettenbrüche einige einfache Beispiele zu geben. Auch anstatt eines allgemeinen Konvergenzsatzes über Fouriersche Reihen wäre es viel nützlicher, einige spezielle Fourierentwicklungen herzuleiten. Erst hier folgt eine allgemeine Betrachtung über Extremalwerte und Wendepunkte, wobei wir etwas mehr an interessanten Maximum- und Minimumaufgaben sowie spezielle Kurvendiskussionen für unentbehrlich hielten. Endlich wird für den Fundamentalsatz der Algebra ein neuer Beweis gegeben und zum Schluß der strenge Aufbau des reellen Zahlbereichs kurz angedeutet, die Irrationalität von e und π bewiesen.

Nach Meinung des Referenten ist diese Auswahl und diese Anordnung des Stoffes zur Überbrückung der Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik, wozu das Buch — laut dem Vorwort — beitragen will, nicht geeignet.

P. v. Szász.

J. H. M. Wedderburn, Lectures on Matrices (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XVII), VII + 200 pages, New York, American Mathematical Society, 1934.

The theory of matrices had a great development since the fundamental works of GRASSMANN, CAYLEY and HAMILTON. Considering that this development did not stop till present days and that the theory finds a large application, a work resuming this development deserves much interest. WEDDERBURN's book gives such a recapitulating treatment. His subject is restricted to the finite quadratic matrices mostly with real or complex numbers as elements. The relations to the theory of numbers are not considered.

The theme is very exhaustively elaborated, which is best shown by reviewing the chapters. Chapter I defines the matrices by the aid of vectors and gives the *elementary notions* of the theory of matrices. Chapter II starting from algebrical operations on matrices discusses circumstantially the *characteristic equation,* considers simple and multiple roots and the reduced equation. Chapter III treats the diagonal normal form, the elementary divisors and the invariant vectors. The *equivalence problem* is solved in this chapter only for non-singular matrices. In the next chapter (after a long preparation on vector polynomials and linear sets) the singular case is discussed. Chapter V introduces compound matrices, vector and tensor products and is devoted to the *theory of representation* (of groups). The knowledge of *symmetric, skew* and *hermitean* matrices is comprised in Chapter VI. Chapter VII finally gives the *commutativity theorems* and SYLVESTER's identities.

The remaining chapters have an appendix-like character. Chapter VIII gives a very interesting outline of matrix analysis. This chapter has many connections with different other investigations and gives much possibility to further development. Chapter IX is devoted to the automorphic transformations of bilinear forms. The last chapter exposes the associative algebras from a new point of view and considers especially their connection with the theory of matrices. The book contains an excellent *bibliography.*

The treatment is everywhere exact and clear. Reviewer thinks, that the clearness could have been increased by use of examples and if some (even important) details of the proofs would not be left to the reader. The book is of much use by giving a uniform recapitulation of the theory and is especially suitable for introduction to it.

G. Hajós.

Luigi Sobrero, Theorie der ebenen Elastizität unter Benutzung eines Systems hyperkomplexer Zahlen (Hamburger Math. Einzelschriften, 17. Heft), 50 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Eine hyperkomplexe Zahl $z = x + jy + j^2 u + j^3 v$ mit den Einheiten $1, j, j^2, j^3$ und die Rechenoperationen mit solchen Zahlen werden in dieser Arbeit auf Grund der Relation

$$j^4 + 2j^2 + 1 = 0$$

definiert. Wenn man jede der rellen Größen a, b, c, d als Funktionen der vier reellen Größen x, y, u, v auffaßt, so ist

$$Z = a + jb + j^2 c + j^3 d$$

eine Funktion der hyperkomplexen Zahl z. Verlangt man noch daß der Differentialquotient dZ/dz von der Richtung unabhängig sein soll, so ergeben sich zwölf Differentialgleichungen für a, b, c, d, welche dieselbe Rolle spielen, wie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in der gewöhnlichen Funktionentheorie. Auf diese Weise läßt sich eine hyperkomplexe Funktionentheorie aufbauen, wobei eine große Anzahl der Rechengesetze der gewöhlichen Funktionentheorie ihre Gültigkeit behalten. Im Ausnahmsfalle $x = u, y = v$ ist die Multiplikation nicht umkehrbar.

Der Laplaceschen Gleichung entspricht hier die Laplacesche Doppelgleichung: $\Delta\Delta a = 0$, $\Delta\Delta b = 0$, $\Delta\Delta c = 0$, $\Delta\Delta d = 0$. Auf dieser Tatsache beruht die Anwendbarkeit dieses hyperkomplexen Kalküls zur Lösung biharmonischer Randwertaufgaben. Der Verfasser zeigt, wie man die ebene Spannungs- und Formänderungsaufgaben als Aufgaben über solche hyperkomplexe Funktionen interpretieren kann, ähnlich, wie man z. B. die ebene Potentialströmung mit Hilfe der gewöhnlichen Funktionentheorie behandelt. Zur hyperkomplexen Darstellung des ebenen Spannungszustandes werden die Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ mit $-c, a, d$ identifiziert. Der Punkt (x, y) der cartesischen Ebene wird mit der hyperkomplexen Zahl $x + jy$ identifiziert. Als Beispiele werden behandelt: Unendliche Scheibe mit Einzelkraft, Halbebene mit Einzelkraft und die mit kreisförmigem Loch versehene Scheibe.

Aus dem kurzgehaltenen und doch leicht lesbaren Buch wird der Mathematiker und der wissenschaftlich tätige Ingenieur manche Anregung zur weiteren Forschung bekommen. Die Literaturnachweise erleichtern das Auffinden der einschlägigen Arbeiten.

J. Barta.

A. Gloden, Sur les surfaces de Riemann, 95 pages, Luxembourg, Linden et Hansen, 1935.

L'auteur expose les premiers éléments de la théorie des surfaces de RIEMANN dans l'esprit des traités classiques.

B. de K.

O. Schreier und E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, zweiter Band (Hamburger Math. Einzelschriften, 19. Heft), 308 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1935.

Der zweite Band der „Einführung in die analytische Geometrie und Algebra" ist wie der erste (Besprechung s. *diese Acta,* 5 (1930—32), S. 260—261) aus Vorlesungen von O. SCHREIER entsprungen. Das Buch zerfällt in drei Abschnitte, von denen die beiden ersten die Algebra und der letzte die analytische Geometrie zum Gegenstand haben. Der erste Abschnitt behandelt die Elemente der Gruppentheorie und den Basissatz für Abelsche Gruppen. Der zweite enthält den Stoff, mit einigen Umstellungen und Kürzungen, eines schon früher veröffentlichten Bändchens *(Vorlesungen über Matrizen)* des Verfassers. Inhalt des zweiten Abschnittes: Rechnen mit linearen Transformationen; Rechnen mit Matrizen; Minimalpolynom; invariante Teilgebilde; Diagonalgestalt von Matrizen; Elementarteilertheorie der Polynommatrizen; Normalformenproblem für Matrizen (Jordansche Normalform).

Der letzte Abschnitt über n-dimensionale projektive Geometrie behandelt die analytische Geometrie der linearen und quadratischen Formen über dem Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen. Aus dem Stoff dieses Abschnittes erwähnen wir: allgemeine projektive Koordinaten, Hyperebenenkoordinaten; Dualitätsprinzip; Doppelverhältnis; Projektivitäten; Korrelationen; Hyperflächen zweiter Ordnung; projektive Einteilung und Eigenschaften der Hyperflächen zweiter Ordnung; affine und metrische Einteilung der Hyperflächen zweiter Ordnung.

Diesen zweiten Band des Werkes charakterisiert auch, wie den ersten, die Verschmelzung der geometrischen und algebraischen Gesichtspunkte. Die Beweisführungen werden durchwegs sehr sorgfältig und ausführlich geführt und verleihen dem Buch den Charakter einer Vorlesung. (Besonders einfach und anschaulich ist die Darstellung im Abschnitt über Matrizen.) Die leicht faßliche Darstellung des Stoffes, die zahlreichen Übungsaufgaben machen das Buch besonders geeignet für Anfänger.

St. Lipka.

Emil Müller, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, vollständig neu bearbeitet von ERWIN KRUPPA, vierte Auflage in drei Teilen, erster Teil: Projektion auf eine Bildebene; zweiter Teil: Zugeordnete Normalrisse, Krumme Flächen; dritter Teil:

Axonometrie, Perspektive, Landkartenentwürfe, VII+VII+VII+390 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1936.

Dieses moderne Lehrbuch der darstellenden Geometrie ist unter Benutzung des bekannten Werkes von E. MÜLLER entstanden. Verfasser setzte durch Weglassen weniger wichtiger Einzelheiten und durch sachliche Vereinfachungen den Umfang des ursprünglichen Werkes von MÜLLER wesentlich herab. Das Buch wurde in drei Teile gegliedert. Der erste Teil behandelt die Projektion auf eine Bildebene und besteht aus folgenden Kapiteln: 1. Abbildung ebener Figuren. 2. Kurven, Flächen und ihre Abbildungen auf eine Ebene. 3. Kotierte Grundrisse und Seitenrisse (Kotierte Projektion). 4. Kurven, Kegel und Zylinder zweiter Ordnung. — Die Projektion auf eine einzige Bildebene wurde aus systematischen Gründen an die Spitze gestellt.

Der zweite Teil behandelt die Zweibildermethode und enthält folgende Kapitel: 1. Zugeordnete Normalrisse. 2. Darstellende Geometrie besonderer Flächengattungen. 3. Darstellende Geometrie der Flächenkrümmung. — *Die Behandlung der Flächenkrümmung* (Sätze von MEUSNIER und EULER) ist methodisch neu.

Der dritte Teil behandelt die Axonometrie, die Perspektive, die Landkartenentwürfe in den folgenden Kapiteln: 1. Schiefe Axonometrie. 2. Normale Axonometrie. 3. Parallelperspektive. 4. Perspektive. 5. Reliefperspektive. 6. Landkartenentwürfe.

Eine vollständige Umarbeitung erfuhren in diesem neuen Lehrbuch die Kurven- und Flächentheorie und die konstruktive Behandlung der Kurven und Flächen. Verfasser schaltete das Operieren mit unendlichkleinen Größen und unendlichbenachbarten Elementen vollständig aus und ersetzte dies durch exakte Grenzübergänge. Der Aufbau des Stoffes hat damit einen analytischen Charakter gewonnen. Das Buch enthält noch eine Reihe von Anwendungsbeispielen (z. B. aus dem Maschinenbau).

St. Lipka.

E. Trefftz, Graphostatik (Teubners math. Leitfäden, Band 42), IV + 90 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1936.

Die Darstellung der Statik mit geometrischen Mitteln nennt man Graphostatik. Ihre Bedeutung war früher so groß, daß sie sich mit der technisch-angewandter Statik sozusagen deckte. Sie ist auch heute ein unentbehrliches Zweig der Statik; ihre Bedeutung ist aber hauptsächlich auf wissenschaftliches und didaktisches Gebiet beschränkt worden, da für den gewandten Ingenieur die rechnerischen Methoden bequemere und genauere Mitteln bieten.

Das vorliegende Buch enthält die Elemente der Graphostatik: die Darstellung von Kräften in der Ebene, von Fachwerken und Balken. Weiter beschäftigt es sich mit der Ermittlung des Schwerpunktes, sowie des Momentes erster und zweiter Ordnung von Flächenstücken. Inhaltlich wird also derjenige Teil der Graphostatik umfaßt, welcher heutzutage an den meisten technischen Hochschulen in den Vorlesungen über Mechanik für Anfänger Platz findet.

Denjenigen, die Statik lernen, oder ihre älteren Kenntnisse auffrischen wollen, wird dieses Buch zweifellos gute Dienste leisten. Für den Praktiker scheinen aber die rein graphischen Methoden schon etwas überholt zu sein.

St. Menyhárd.

Wilhelm Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, erstes Heft (Hamburger Math. Einzelschriften, 20. Heft), zweite Auflage, IV + 60 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1936.

Den Rahmen des Buches bildet die ebene Euklidische Geometrie. Die Bausteine der Integralgeometrie sind gewisse Differentialformen, die als Dichten bezeichnet werden und zuerst wohl in der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten aufgetreten sind. In der ebenen Integralgeometrie, um die allein es sich hier handelt, sind diese Dichten: die „Punkt-", „Geraden-" und „kinematische Dichte". Die Punktdichte ist dabei das gewöhnliche Flächenelement eines Punktes, Geraden- und kinematische Dichte stehen zur Geraden und dem orientierten Achsenkreuz in entsprechender Beziehung wie der Punkt zu seinem Flächenelement. Durch Integration über einen bestimmten Bereich dieser Gebilde erhält man neben dem „Punkmaß" (Flächeninhalt) noch das „Geraden-" und „kinematische Maß". Diese Integrale — und entsprechend ihre Dichten — sind durch eine Reihe von Invarianzforderungen bestimmt. Die wesentlichste unter ihnen ist diejenige, die eigenlich unsere ganze euklidische Geometrie ausmacht, nämlich die Bewegungsinvarianz. Der Gegenstand, der in diesem Buche behandelt wird, besteht nun in den Beziehungen dieser Integrale zueinander.

Verfasser benützt in der Darstellung konsequenter Weise alternierende Differentialformen, gemäß dem von H. GRASSMANN, H. POINCARÉ und E. CARTAN geschaffenen Kalkül der alternierenden Differentialformen. Daß dies der für diese Untersuchungen angepässte Rechenkalkül ist, geht schon daraus hervor, daß die alternierenden Differentialformen eine Eigenschaft besitzen, die auch von den Dichten gefordert wird.

An Einzelnen werden in §§ 1—9 Anwendungen der Punkt- und Geradendichte auf eine Reihe von geometrischen Fragen, insbesondere der Theorie der konvexen Bereiche, gemacht, die einen besonders engen Zusammenhang mit der Integralgeometrie haben. §§ 9—14 behandeln das kinematische Maß. Von den zahlreichen dort behandelten Fragen mögen zwei hervorgehoben werden, die beide auf L. A. SANTALÓ zurückgehen. Die erste betrifft einen neuen Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises, der dadurch bemerkenswert ist, daß hier mit Gleichungen (statt Ungleichungen) gearbeitet wird. Aus ihnen folgt dann ohne weiteres die klassische Ungleichhung sowie Bonnesens Verschärfung derselben. Die zweite Anwendung ist eine Formel, die die Anzahl der Eibereiche angibt, die einen festen vorgegebenen treffen.

Neu gegenüber der ersten Auflage ist die vom Verfasser gefundene

„kinematische Hauptformel“ (§ 17, § 18). Sie stellt eine weitgehende Verallgemeinerung der von SANTALÓ für zwei Eibereiche gefundenen Formel dar. Es werden hier zwei beschränkte Bereiche betrachtet, die von beliebigen stetig gekrümmten Jordankurven berandet sind. Die bewegte Kurve hat bei der Integration noch ein Gewicht, nämlich das Integral der Gesammtkrümmung des jeweiligen Durchschnittes der beiden Bereiche. Aus diesem Resultat ergibt sich ein großer Teil der integralgeometrischen Formeln als Spezialfall.

Daß die Voraussetzungen, unter denen die Sätze der Integralgeometrie gelten, weit reduziert werden können, hat K. MAAK gezeigt. Auch hierüber wird der Leser (in § 21) orientiert.

Das Buch bildet eine gute Einführung in Fragestellungen der ebenen Integralgeometrie.

O. Varga.

W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie. zweites Heft (Hamburger Math. Einzelschriften, 22. Heft), VI+127—60 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

In diesem Heft ist auf verhältnismäßig engem Raum eine große Fülle Stoffes behandelt. Wenn auch dieser Band hauptsächlich, in unmittelbarer Fortsetzung des ersten Heftes, dem (dreidimensionalen) Raum Euklids gewidmet ist, findet man in den gut gewählten Aufgaben die wichtigsten Fragen der Integralgeometrie auf der Kugeloberfläche, ferner Resultate derjenigen Untersuchungen, die sich ergeben, wenn man im Raum nur die Schiebungsgruppe zuläßt. Dabei tritt zwangsläufig der Begriff des „gemischten Rauminhaltes“ auf, der dann auf den Zusammenhang mit dem Ideenkreis Minkowskis über konvexe Gebilde hinweist. Dazu kommt noch, daß die räumliche Integralgeometrie viel mannigfaltiger ist als die der Ebene, entsprechend der größeren Anzahl von bewegungsinvarianten Integralen.

Das Heft zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil werden zunächst diejenigen Integrale eingeführt, die zur „Punkt-“, „Geraden-“, „Ebenen-“ und „kinematischen Dichte“ gehören. Daneben werden auch Dichten eingeführt, die zu anderen bewegungsinvarianten Figuren gehören, wie Linienelement, Flächenelement usw. Die Herleitung dieser Differentialformen erfolgt absteigend. Den Ausgang bildet die Differentialform höchsten Grades, nämlich die kinematische Dichte (eine sechsfache Differentialform). Dabei ist es leicht das Verfahren zur Bildung von Dichten zu übersehen, so daß der Leser hieraus ohne weiteres den Ausdruck der Dichte für eine lineare Untermannigfaltigkeit eines beliebig-dimensionalen euklidischen oder nichteuklidischen Raum entnehmen kann. In der weiteren Entwicklung dieses Teiles wird das kinematische Maß nicht mehr in Betracht gezogen. Es werden dann die zahlreichen Resultate, die sich seit der Entwicklung der Integralgeometrie durch die Arbeiten von M. W. CROFTON (1868) bis zu einer (nicht veröffentlichten) Vorlesung von G. HERGLOTZ (1933) ergeben haben, dargestellt. Sie beziehen sich ausschließlich auf konvexe Körper (Crofton-Herglotzsche Formel, Cauchys Formeln usw.).

Der zweite Teil behandelt die Anwendungen des kinematischen Maßes. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht wieder die „kinematische Hauptformel" für den Raum. Verfasser beschränkt sich dabei, um nur die einfachsten Voraussetzungen machen zu müssen, auf Vielflache. Doch finden sich wieder in den Beispielen diejenigen Untersuchungen eingestreut, die die Ausdehnung dieser Begriffe auf krumme Flächen geben. Der Grundgedanke der Hauptformel ist die „Zählung" der Lagen, in denen ein bewegliches Vielflach ein festes vorgegebenes trifft. Bei dieser „Zählung" tritt noch ein Gewicht hinzu: die Eckenkrümmung des jeweiligen Durchschnittes der beiden Körper.

Das Buch ist ein unentbehrlicher Wegweiser für jeden, der sich mit dem Gegenstand bekanntmachen will.

O. Varga.

Konrad Knopp, Elemente der Funktionentheorie (Sammlung Göschen, 1109), 144 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Die in dieser Sammlung erschienenen wohlbekannten und verbreiteten Bändchen des Verfassers über Funktionentheorie setzen schon die Kenntnis der ersten Elemente voraus. Das vorliegende Bändchen soll nun diese Elemente behandeln. Nach der Einführung der komplexen Zahlen und des Rechnens mit denselben werden der Begriff der Zahlenmengen, der Grenzbegriff, sowie die Lehre der unendlichen Reihen ins Komplexe übertragen. Dann werden Stetigkeit und Differenzierbarkeit für komplexwertige Funktionen eines komplexen Veränderlichen erklärt, und die Eigenschaften der durch Potenzreihen dargestellten Funktionen diskutiert. Das Büchlein enthält auch eine nähere Behandlung der elementaren Funktionen. Die Übertragung der Integralrechnung ins Komplexe wird dagegen nicht berührt.

Béla v. Sz. Nagy.

Konrad Knopp, Funktionentheorie, erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen (Sammlung Göschen, 668), fünfte Auflage, 136 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Die leicht lesbare, klare, aber durchaus gründlich und streng dargestellte Knoppsche Taschen-Funktionentheorie ist eine der meistbenutzten Einführungen in dieses Gebiet. Der erste Band, der nunmehr in der fünften Auflage vorliegt, setzt nur die Kenntnis der Elemente der reellen Analysis und der analytischen Geometrie voraus. Ein einleitender Teil faßt die grundlegenden Begriffe zusammen, für deren ausführlichere Darstellung der Leser auf die oben berichteten *Elemente der Funktionentheorie* hingewiesen wird. Den im Verhältnis zum Umfang reichen Inhalt des Büchleins zeigen schon die folgenden Kapitel-Titel: Das Integral einer stetigen Funktion; Cauchyscher Integralsatz; Cauchysche Integralformeln; Reihen mit veränderlichen Gliedern; Die Entwicklungen analytischer Funktionen in Potenzreihen; Analytische Fortsetzung; Ganze transzendente Funktionen; Laurentsche Entwicklung; Die verschiedenen Arten singulärer Stellen. — Neben zahlreichen kleineren Verbesserungen und Umordnungen des Textes der früheren Auflagen begrüßt man in dieser neuesten Auflage besonders die Hinzufügung eines neuen Paragraphen über den Monodromiesatz und eines über die Umkehrung analytischer Funktionen.

Béla v. Sz. Nagy.

Ludwig Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung (Sammlung Göschen, 768), dritte Auflage, 137 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Die vorliegende dritte Auflage des bekannten kleinen Bieberbachschen Buches ist mit einem Paragraphen über die Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Gebiete auf Normalgebiete ergänzt. Die übrigen Teile sind fast ungeändert geblieben.

Trotz dem kleinen Umfang des Buches ist es dem Verfasser gelungen, eine gute Übersicht des gesamten Problemkreises darzubieten und neben den allgemeinen Sätzen auch zahlreiche Beispiele zu behandeln.

Béla v. Sz. Nagy.

Günther Schulz, Formelsammlung zur praktischen Mathematik (Sammlung Göschen, 1110), 147 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Eine sehr brauchbare kurze Zusammenstellung derjenigen Formeln und Rechnungsverfahren, die in praktischen Auswertungen die häufigste Verwendung finden. Die sieben Abschnitte des Büchleins behandeln allgemeine Hilfsmittel, Ausgleichungsrechnung, Auflösung von Gleichungen, Interpolation, Quadratur und Summation, Annäherung willkürlicher Funktionen durch Reihen gegebener und Integration von Differentialgleichungen.

Béla v. Sz. Nagy.

Max Zacharias, Das Parallelenproblem und seine Lösung, eine Einführung in die hyperbolische nichteuklidische Geometrie (Math.-Phys. Bibliothek, Reihe I, Bd. 92) 44 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

Ziel des vorliegenden Büchleins ist den Anfänger in die Grundelemente der hyperbolischen Geometrie einzuführen. Verfasser setzt nur die durchschnittlichen Schulkenntnisse voraus und behandelt nach einer geschichtlichen Einleitung auf leichtverständliche Weise das Parallelenproblem, die Winkelsumme und den Flächeninhalt des Dreiecks, die Linien gleichen Abstandes und die Kreislehre. Das Büchlein schließt mit einigen philosophischen Betrachtungen und einer kurzen Darstellung der elliptischen Geometrie. St. Lipka.

Robert Sauer, Projektive Liniengeometrie (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Band 23), 194 S., Berlin und Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1937.

Die Liniengeometrie ist jener Zweig der räumlichen Geometrie, der statt des Punktes oder der Ebene als Grundelement die Gerade benützt. Das vorliegende Buch hat zum Gegenstand vorwiegend diejenigen liniengeometrische Beziehungen, die bei projektiven Abbildungen invariant bleiben. Ziel des Verfassers ist die Invariantentheorie der projektiven Transformationen in Geradenkoordinaten analytisch zu entwickeln, in ähnlicher Weise wie man in der kartesischen Geometrie die Bewegungsinvarianten in Punktkoordinaten aufstellt. Der erste Abschnitt behandelt die Grundbegriffe der algebraischen Liniengeometrie mit einigen Beispielen wie Regelflächen 3. Grades, Raumkurven 3. und 4. Ordnung, quadratische Geradensysteme und Geradenkomplexe (2- und 3-parametrige Geradenmengen). Der größte Teil des Buches — Abschnitte II—VI — behandelt die differentielle Liniengeometrie, und zwar die Differentialgeometrie der Geradenscharen, Geradensysteme, Geradenkomplexe und des Geradenraums. „Bei der Behandlung der Torsen und der parabolischen Geradensysteme wird die projektive Differentialgeometrie der Kurven und Flächen mit erledigt, für die die Linienkoordinaten angepaßter sind als die Punkt- und Ebenenkoordinaten. In diesem Sinne ist das Buch eine Ergänzung zum 22. Band derselben Sammlung, in dem E. SALKOWSKI die affine Differentialgeometrie der Kurven und Flächen dargestellt hat."

Verfasser benützt die nämlichen analytischen Hilfsmittel, die W. BLASCHKE in der Lieschen Kugelgeometrie anwendet, er legt jedoch das Hauptgewicht nicht auf das analytische Werkzeug, sondern auf den geometrischen Inhalt.

Das Buch enthält noch sehr lehrreiche und schöne Anwendungen aus der Mechanik: Fachwerke, Ballsche Schraubentheorie, Spannungsverteilung in Membranen. Die jungen Mathematiker werden viel Anregung aus diesem schönen Werk schöpfen. St. Lipka.

A. Buhl, Nouveaux éléments d'analyse, Calcul infinitésimal, Géométrie, Physique théorique (Cours de la Faculté des Sciences de Toulouse), Tome I: Variables réelles; Tome II: Variables complexes, VII + 204 resp. VI + 214 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1937 et 1938.

„Personne ne s'est jamais étonné de trouver la Géométrie, en bonne place, dans les Traités d'Analyse. Or, les progrès de la Science montrent que les équations fondamentales de la Physique peuvent, ainsi que celles de la Géométrie, se révéler non pas précisément comme une application, mais comme l'une des formes mêmes des principes mathématiques. C'est ce que je me suis attaché à mettre en évidence dans cet Ouvrage..." — dit l'Auteur dans la préface du premier tome et l'on doit admettre qu'il a développé un effort considérable pour réaliser cette proposition.

Ainsi, on trouve les „incertitudes de HEISENBERG" mentionnées déjà sur les premières pages, dans le cadre d'un chapitre sur „ensembles, mesures, microstructures". C'est d'ailleurs à regretter que l'Auteur a laissé tant d'obscurités dans ce chapitre, même quelques fautes sérieuses dont nous ne mentionnons que la définition erronée de l'ensemble triadique de CANTOR, l'assertion qu'il y auraient d'ensembles parfaits dénombrables (page 4) et l'exposition tout à fait incorrecte et obscure de la notion de l'intégrale de STIELTJES (pages 16—18). On devrait ici soigneusement séparer les notions purement mathématiques des conceptions physiques, choses tout à fait différentes, au lieu de les confondre.

Des beaux chapitres suivent traitant les formules d'intégrale de STOKES, GAUSS et GREEN, puis des différentes questions de la Géométrie différentielle des surfaces, de la théorie des groupes continues, ainsi que de la mécanique classique et relativiste.

Le deuxième tome contient des chapitres habilement choisis de la théorie des fonctions analytiques à une variable complexe, comme par exemple une introduction à la théorie de la sommabilité taylorienne des fonctions méromorphes.

Le dernier chapitre de l'Ouvrage est intitulé: „CHARLES HERMITE et la physique théorique", et contient quelques remarques sur les théories des quanta.

Les exercices ajoutés à la fin des chapitres aident à les comprendre et à diriger le lecteur vers l'étude plus approfondie des problèmes touchés dans cet Ouvrage, qui, malgré ses faiblesses indéniables, est une intéressante lecture et une tentative remarquable.

Béla de Sz. Nagy.