Sur le théorème de Jordan.

Par FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

Introduction.

Le théorème de JORDAN affirme que *toute ligne continue et fermée sans point double,* brièvement toute courbe de JORDAN, *décompose le plan en deux domaines différents.* La démonstration de ce théorème que nous allons ajouter dans la présente note aux nombreuses démonstrations connues, fondée sur l'idée de l'ordre (ou indice) par rapport à la courbe des points n'appartenant pas à cette dernière, emprunte plusieurs détails à des démonstrations antérieures et ne fait entrer en substance que deux idées nouvelles. La première, d'ailleurs familière en topologie combinatoire, c'est de ne distinguer *a priori* que deux possibilités et cela en classifiant les points selon la *parité* de leur ordre sans s'occuper de la valeur exacte de ce dernier. La seconde idée c'est de réduire l'un des deux cas à l'autre à l'aide d'une *inversion.*

Notre méthode s'applique aussi au problème plus général de la décomposition du plan par un ensemble fermé d'ailleurs quelconque et en particulier, par une ligne continue admettant des points multiples. Je n'ai pas réussi à décider si les résultats que j'obtiens dans cet ordre d'idées sont nouveaux ou non. En tout cas je les développe ici pour illustrer la portée de notre méthode.

1. Démonstration du théorème de Jordan.

Rappelons d'abord les faits les plus simples concernant l'ordre d'un point par rapport à une ligne continue fermée. Étant donnée une ligne continue quelconque l, fermée ou non, allant du point A au point B, avec ou sans point double, et un point P

n'appartenant pas à la ligne l, on sait que la variation de l'argument du vecteur PM, quand M parcourt la ligne l, est une quantité finie et bien déterminée. Cette variation, évidemment additive par rapport à une décomposition de la ligne l en des arcs partiels, se calcule par exemple en partageant la ligne l en des arcs $M_{i-1}M_i$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ M_0=A,\ M_n=B)$ de sorte que leurs diamètres soient inférieurs à la distance entre P et l, puis en ajoutant les angles $M_{i-1}PM_i$ aigus et affectés du signe qui leur convient. Lorsque $A=B$, cette somme est évidemment égale à $2m\pi$ où m est entier, positif, négatif ou zéro, et c'est cet entier m qu'on appelle l'ordre du point P par rapport à la ligne fermée l. Cet ordre ne change pas quand P varie d'une manière continue sans rencontrer la ligne l; il varie justement d'une unité lorsque P traverse un segment de ligne droite, faisant partie de l, et cela sans rencontrer l'arc complémentaire. On en déduit presque immédiatement le cas particulier du théorème de JORDAN, relatif aux lignes polygonales fermées sans point double, le domaine extérieur étant formé par les points d'ordre 0 et l'intérieur par ceux d'ordre ± 1 selon le sens de parcours. Enfin, dans le cas général, on a $m=0$ pour tous les points P suffisamment éloignés, entre autres toujours quand la ligne entière l est vue de P sous un angle inférieur à π ou ce qui revient au même, lorsque l et P peuvent être séparés par une droite.

Cela étant, supposons que l soit une courbe de JORDAN, c'est-à-dire une ligne continue fermée sans point double. Pour démontrer le théorème de JORDAN, on commence par faire voir qu'*il existe des points d'ordre zéro ainsi que des points d'ordre unité par rapport à la ligne l et que de cette sorte la ligne sépare le plan en deux domaines distincts au moins.* Tous les points suffisamment éloignés étant d'ordre zéro, il ne s'agira que de trouver des points d'ordre unité. A cet effet, nous n'avons qu'à répéter un raisonnement dû en substance à M. HADAMARD et que nous rappelons sous la forme très simple due à M. E. SCHMIDT[1]). Soit P un point séparé de la ligne l par une droite d et soient a, b, c trois demi-droites issues de P et rencontrant la ligne l, leurs premiers points de rencontre étant désignés respectivement par

[1]) E. SCHMIDT, Über den Jordanschen Kurvensatz, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften,* 1923, phys.-math. Klasse, pp. 318—329, en particulier § 2.

A_1, B_1, C_1 et leurs points de rencontre avec la droite d par A, B, C: on suppose les notations choisies de sorte que les points A, B, C se suivent dans l'ordre indiqué. Soit en outre B_2 le dernier point de rencontre de la demi-droite b avec l'arc $A_1B_1C_1$ de l et soit B' un point choisi sur la même demi-droite au delà de B_2 et cela de sorte que le segment B_2B' ne rencontre pas l'arc complémentaire C_1A_1. Alors, un tel point B' est d'ordre zéro par rapport à la ligne fermée $l_1 = A_1B_1C_1CAA_1$, formée de l'arc $A_1B_1C_1$ et des segments C_1C, CA et AA_1; en effet, en continuant de suivre la demi-droite b au delà de B', on passe à l'infini sans rencontrer la ligne l_1. De plus, le point B' est d'ordre unité par rapport à la ligne fermée $l_2 = A_1ACC_1A_1$, composée des mêmes segments de droite que l_1, mais parcourus dans le sens inverse, et de l'arc complémentaire C_1A_1 de l. En effet, en parcourant d'abord le segment PB_1, puis la partie B_1B_2 de l'arc $A_1B_1C_1$ et enfin le segment de droite B_2B', on passe du point P, évidemment d'ordre zéro par rapport à l_2, au point B' et cela en ne rencontrant l_2 qu'au point B où l'on traverse le segment AC, ce qui change l'ordre d'une unité. En résumé, le point B' est d'ordre zéro par rapport à l_1 et d'ordre unité par rapport à l_2; il s'ensuit par addition et comme les chemins C_1CAA_1 et A_1ACC_1 se détruisent que le point B' est d'ordre unité par rapport à la ligne l.

Cela étant, pour faire voir que la ligne l sépare le plan précisément en deux domaines différents, nous allons montrer que *deux points d'ordre pair par rapport à l appartiennent toujours au même domaine et qu'il en est de même de deux points quelconques d'ordre impair.* D'abord, quant au premier cas, il est manifeste qu'il suffit de prouver que de tout point P d'ordre pair on peut passer à l'infini sans rencontrer la ligne l. A cet effet, soit 2ε la distance entre le point P et la ligne l et supposons qu'on ait choisi la quantité positive δ de sorte que $\delta < \varepsilon$ et que de plus, pour tout couple de points A, B sur l tels que $\overline{AB} < 2\delta$, le diamètre de l'un des arcs AB de l soit inférieur à ε.[2]) Cela

[2]) Voici une démonstration simple du fait bien connu qu'un tel choix est toujours possible. En considérant la circonférence $|z| = 1$ comme l'image continu et biunivoque de la courbe l, il vient qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut attacher un $\eta > 0$ de sorte que, pour tout couple de points M, N sur la ligne l dont la distance des images M', N' est inférieure à η, on ait $\overline{MN} < \varepsilon$. D'autre part, à la quantité η on peut faire correspondre un $\delta > 0$ de façon que l'hy-

étant, couvrons le plan par un réseau de triangles équilatéraux, de côté δ, et envisageons le domaine formé par ceux des triangles qui ont des points en commun avec la ligne l, soit à l'intérieur soit sur leur périphérie[8]). Soit $p = A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ le contour extérieur de ce domaine, polygone simple fermé aux sommets A_i; d'une façon précise, nous avons marqué par A_i les noeuds de réseau appartenant au contour p et numérotés dans l'ordre dans lequel ils se suivent sur ce contour. Chaque côté $A_i A_{i+1}$ appartient à un des triangles envisagés adjacent à ce côté et ayant un point au moins en commun avec la ligne l. Soit B_i un tel point. Envisageons les périphéries des triangles $A_i A_{i+1} B_i$ ainsi que les lignes fermées $B_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$, ces dernières étant composées des segments $B_i A_{i+1}$, $A_{i+1} B_{i+1}$ et d'un des arcs $B_{i+1} B_i$ de la ligne l, choisi de sorte que son diamètre reste inférieur à ε. Un tel choix est possible, la distance $\overline{B_i B_{i+1}}$ étant au plus égale à $\overline{B_i A_{i+1}} + \overline{A_{i+1} B_{i+1}} < 2\delta$. Or, on voit immédiatement que l'axe de symétrie du segment PB_i sépare le point P du triangle $A_i A_{i+1} B_i$ ainsi que de la ligne fermée $A_{i+1} B_{i+1} B_i$ et que, par conséquent, le point P est d'ordre zéro par rapport à toutes ces lignes fermées. Or, en parcourant ces $2n$ lignes et en supprimant les segments $A_i B_i$ et $A_{i+1} B_i$ que l'on a parcourus dans les deux sens, il ne reste que deux parcours fermés, savoir le contour p et la ligne $B_n B_{n-1} \ldots B_1 B_n$ composée des arcs $B_{i+1} B_i$ de la ligne l. Il s'ensuit que le point P est de même ordre par rapport au polygone p qu'à la ligne fermée $B_1 B_2 \ldots B_n B_1$. Or, la parité de l'ordre de P par rapport à cette dernière ne change pas quand on remplace l'un ou l'autre des arcs $B_i B_{i+1}$ par son complémentaire; en effet, un tel changement revient à ajouter un parcours complet des deux arcs, c'est-à-dire de la ligne entière l, parcours fait dans un sens convenable, et le point P étant supposé d'être d'ordre pair par rapport à la ligne l, l'ordre ne sera changé que par un nombre pair. Par conséquent, on ne restreint pas la généralité en supposant que tous les arcs

---

pothèse $\overline{MN} < 2\delta$ entraîne que $\overline{M'N'} < \eta$. Alors, si A, B sont des points sur l avec $\overline{AB} < 2\delta$, et que par conséquent $\overline{A'B'} < \eta$, on a aussi $\overline{M'N'} < \eta$ pour tous les points M', N' appartenant au plus petit des arcs $A'B'$, donc $\overline{MN} < \varepsilon$ pour les points de l'arc correspondant AB de la courbe l, ce qu'il fallait prouver.

[8]) *Cf.* pour l'ordre d'idées qui suit, J. Pál, Zur Topologie der Ebene, *ces Acta*, 1 (1923), pp. 226—239, en particulier pp. 230—231.

B_iB_{i+1} sont parcourus dans le même sens et que, de cette sorte, l'ensemble des parcours est équivalent à un nombre fini de parcours de la ligne entière l. Donc le point P est d'ordre pair par rapport à la ligne fermée $B_1B_2 \ldots B_nB_1$ et alors aussi par rapport au polygone p. Or, par rapport à ce dernier, il n'y a de points d'ordre pair que ceux d'ordre zéro, situés à l'extérieur du polygone, c'est-à-dire que P est extérieur au polygone et par conséquent, on en peut passer à l'infini par un chemin continu extérieur à p, donc ne rencontrant pas la courbe l. Nous avons donc démontré que tous les points P d'ordre *pair* par rapport à la ligne l appartiennent au même domaine, savoir à celui qui s'étend à l'infini.

Le cas des points d'ordre *impair* se réduit à celui de tout à l'heure en faisant appel au fait suivant. Faisons subir le plan à l'inversion $z' = {}^1/_z$ et supposons que l'origine n'appartienne pas à la ligne l; soit l' la transformée de l tandis que les points P et Q, n'appartenant pas à la ligne l, soient transportés respectivement en P' et Q'. Je dis que la différence des ordres de P et de Q par rapport à l reste inaltérée, c'est-à-dire que cette différence ne change pas quand on remplace P, Q et l respectivement par P', Q' et l'. Il nous suffira d'ailleurs de considérer le cas particulier où le point Q coïncide avec l'origine et de faire voir que dans ce cas, l'ordre de P' par rapport à l' est fourni par la différence des ordres respectifs de P et de l'origine par rapport à l.

Désignons par w l'affixe du point P, l'affixe du point P' étant alors ${}^1/_w$. De plus, soit z_1z_2 un arc de la courbe l choisi de sorte que deux quelconques de ses points soient vus de l'origine et de P sous des angles inférieurs à ${}^{\pi}/2$ et qu'il en soit de même pour l'arc transformé et le point P'. Or, le rapport anharmonique étant invariant par l'inversion, $(z_1wz_20) = \left(\frac{1}{z_1}\,\frac{1}{w}\,\frac{1}{z_2}\,\infty\right)$, son argument devra rester inaltéré mod 2π. C'est-à-dire que la différence des angles aigus sous lesquels on voit z_1z_2 du point P et de l'origine ne pourra différer de l'angle aigu sous lequel on voit ${}^1/_{z_1}$ et ${}^1/_{z_2}$ de P' que par un multiple entier de 2π et comme tous ces angles sont supposés aigus, les deux différences s'égalent au sens précis. Ce fait une fois démontré, pour en passer à notre assertion concernant la ligne fermée l, on n'aura qu'à partager cette ligne en des arcs du type envisagé et la démonstration du fait allégué s'achèvera d'une manière évidente.

Appliquons notre résultat au cas où l'origine et P sont tous les deux d'ordre impair par rapport à l. Alors par ce que nous venons de voir, le point P' sera d'ordre pair par rapport à la ligne l', elle-même une courbe de JORDAN et par conséquent, grâce à ce que nous avons montré pour les points d'ordre pair, on pourra cheminer de P' à l'infini sans rencontrer l'. En refaisant l'inversion, on obtiendra donc un chemin continu passant de P à l'origine sans rencontrer la ligne l. C'est-à-dire que tous les points d'ordre impair appartiennent au même domaine déterminé par la ligne l, tout comme ceux d'ordre pair.

Le théorème de JORDAN est donc démontré.

2. Décomposition du plan par un ensemble fermé et en particulier par une ligne continue quelconque.

Passons à un ordre d'idées plus général en envisageant la décomposition du plan par un ensemble e borné et fermé, d'ailleurs arbitraire. L'ensemble e détermine un nombre fini ou une infinité dénombrable de domaines contigus. Soient P et Q deux points appartenant à l'un quelconque de ces domaines et soit c un chemin continu allant de P à Q tout en restant dans le domaine considéré. Soit ε la distance entre ce chemin et l'ensemble e. Considérons une ligne polygonale fermée $p = A_1 A_2 \dots A_n A_1$ dont les sommets appartiennent à l'ensemble e et dont les côtés $A_i A_{i+1}$ $(A_{n+1} = A_1)$ sont inférieurs à ε. Alors nous sommes sûrs que le chemin c ne rencontre pas la ligne p; il s'ensuit que les points P et Q sont du même ordre par rapport à la ligne p. C'est-à-dire qu'une condition nécessaire pour que P et Q appartiennent au même domaine, consiste en ce que les deux points soient du même ordre par rapport à toute ligne polygonale fermée p inscrite à l'ensemble e et dont les côtés sont suffisamment petits; bien entendu, l'ordre peut changer avec la ligne p. Je dis que cette condition est aussi suffisante; de plus, au lieu d'exiger que les ordres soient égaux, on n'a qu'à supposer que ces ordres soient de la même parité.

Pour démontrer cet énoncé, envisageons d'abord un point P dont l'ordre s'annule par rapport à toutes les lignes polygonales inscrites dont les côtés sont suffisemment petits. De tels points existent assurément: tels sont entre autres tous les points séparés par une droite de l'ensemble entier e. Soit $2\varepsilon_1$ la distance entre P et l'ensemble e; dès lors en partant comme plus haut d'un réseau de triangles équilatéraux de côté $\delta < \varepsilon_1$, envisageons ceux des triangles qui ont des points en commun avec l'ensemble e. Ces triangles forment un ou plusieurs domaines polygonaux; soient $p_1, p_2, \ldots, p_m$ les contours extérieurs de ces domaines. Considérons, pour fixer les idées, le contour $p_1 = A_1A_2 \ldots A_nA_1$ où nous avons marqué par A_i les noeuds de notre réseau appartenant au contour p_1 et numérotés dans l'ordre dans lequel ils se suivent sur ce contour. Le triangle adjacent au côté A_iA_{i+1} $(A_{n+1} = A_1)$ et intérieur à p_1 a au moins un point B_i en commun avec l'ensemble e. Alors, l'ordre du point P étant zéro par rapport aux triangles $A_iA_{i+1}B_i$ et $A_{i+1}B_{i+1}B_i$, il vient que l'ordre du point P par rapport au contour p_1 est le même que par rapport à la ligne polygonale $B_1B_2 \ldots B_nB_1$ inscrite à l'ensemble e; donc, par l'hypothèse faite, cet ordre s'annule. Il en est de même de l'ordre de P par rapport aux contours $p_2, \ldots, p_m$. C'est-à-dire que le point P est extérieur à tous ces polygones et par cette raison, P peut être joint à l'infini par un chemin continu ne pénétrant à l'intérieur d'aucun des polygones p_i, donc sans point commun avec l'ensemble e.

Le cas de deux points quelconques P et Q satisfaisant à notre condition se réduit au cas que nous venons d'envisager, tout comme pour les courbes de Jordan, en faisant subir toute la figure à une inversion de centre Q.

En résumé, nous venons de démontrer qu'*une condition nécéssaire et suffisante pour que les points P et Q ne soient pas séparés par l'ensemble borné et fermé e, consiste en ce que les ordres de ces points par rapport aux lignes polygonales fermées inscrites à l'ensemble e, de côtés suffisemment petits, soient de la même parité* (cette parité dépendant d'ailleurs, en général, du choix de la ligne polygonale).

Observons que l'hypothèse que l'ensemble e soit borné, peut être aisément supprimée.

Considérons le cas particulier où e n'est que l'ensemble des points, simples et multiples, d'une ligne continue l,

$$x = x(t),\ y = y(t) \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

De la condition que nous venons d'énoncer nous allons déduire une autre relative à la ligne l et embrassant, entre autres, le fait qu'une courbe de JORDAN ne décompose le plan qu'en deux domaines au plus ainsi que le théorème qu'un arc simple de JORDAN ne le découpe pas de tout.

Pour énoncer cette condition, convenons d'appeler *lacet* tout arc de l correspondant à un intervalle $t_1 \leqq t \leqq t_2$ pour lequel $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$, c'est-à-dire que les extrémités de l'arc coïncident. Alors, *pour que les points P et Q ne soient pas séparés par la ligne l, il faut et il suffit que l'ordre de ces points soit de la même parité par rapport à tout lacet de la ligne l* (la parité dépendant d'ailleurs, en général, du choix particulier du lacet).

La nécéssité de la condition est évidente. Pour montrer qu'elle est suffisante, nous commençons par établir un lemme préliminaire. *Etant donnée une quantité $\varepsilon > 0$, je dis que l'on y peut attacher une quantité δ de sorte que pour tout couple A, B de points appartenant à la ligne l et dont la distance est inférieure à δ, il existe sur la ligne un point C tel que l'un des arcs AC et l'un des arcs BC au moins admettent des diamètres inférieurs à ε.* En effet, dans l'hypothèse contraire on pourrait choisir deux suites $\{t_i\}$ et $\{t_i'\}$ de valeurs du paramètre, tendant vers des limites t^* et t^{**} et telles que la distance des points A_i, B_i qui correspondent respectivement à t_i et t_i', tendrait vers zéro, tandis que la propriété alléguée dans notre lemme ne serait pas réalisée pour les points A_i et B_i. Alors aux valeurs t^* et t^{**} du paramètre il correspondrait, sur la ligne l, le même point C, limite commune des A_i et des B_i, et les arcs A_iC, B_iC, correspondant aux intervalles t_it^*, $t_i't^{**}$ dont la longueur tend vers zéro, devraient, par des raisons de continuité, admettre des diamètres convergeant également vers zéro, contrairement à l'hypothèse faite.

Cela étant, envisageons deux points P, Q tels que leurs ordres soient de la même parité pour tout lacet faisant partie de la ligne l et supposons que leurs distances à la ligne l soient supérieures à 2ε. Soit δ la quantité correspondant par notre lemme à la quantité ε. Je dis que l'ordre des points P, Q est de la même parité par rapport à toute ligne polygonale fermée $p = A_1A_2 \dots A_nA_1$ inscrite à la ligne l et dont les côtés sont inférieurs à δ et que par conséquent, d'après le théorème général que nous venons de démontrer, les deux points ne sont pas séparés par la ligne l. En effet, d'après notre lemme, on peut choisir les valeurs t_i, t_i', t_i'' et t_i''' du paramètre t de sorte que, sur la ligne l, le point A_i corresponde à t_i et aussi à t_i' et que de plus, à t_i'' et t_i''' il corresponde un point C_i tel que les arcs A_iC_i et C_iA_{i+1}, correspondant aux intervalles $t_i't_i''$ et $t_i'''t_{i+1}$, admettent des diamètres inférieurs à ε. Il s'ensuit que les points P et Q sont d'ordre zéro par rapport aux lignes fermées $A_iA_{i+1}C_iA_i$, composées du segment A_iA_{i+1} et des arcs $A_{i+1}C_i$ et C_iA_i que nous venons d'envisager et que, par conséquent, pour montrer que les ordres des points P, Q par rapport à la ligne polygonale p sont de la même parité, nous n'avons qu'à prouver qu'il en est ainsi par rapport à la ligne fermée $A_1C_1A_2C_2 \ldots A_nC_nA_1$, composée des arcs A_iC_i et C_iA_{i+1}. Or, grâce à l'hypothèse faite, rien ne change quand on intercale encore les lacets A_iA_i et C_iC_i qui correspondent aux intervalles t_it_i' et $t_i''t_i'''$; en effet, on n'ajoute ainsi, aux ordres considérés, que des nombres de la même parité. Or, les arcs desquels se compose la ligne l_1 ainsi obtenue, correspondent à des intervalles du paramètre formant un circuit complet et il s'ensuit d'une manière évidente que les points P et Q (de même que tout autre point n'appartenant pas à la ligne l) sont d'ordre zéro par rapport à la ligne l_1 et que de cette sorte, leurs ordres par rapport à p sont de la même parité, ce qu'il fallait démontrer.

Voici enfin un corollaire immédiat. *Si deux points ne sont séparés par aucun des lacets d'une ligne continue, ils ne le sont point par la ligne entière.*

(Reçu le 25 janvier 1938)