

## Über Gitterpunkte des mehrdimensionalen Raumes.

Von ENDRE VÁZSONYI in Budapest.

Wir verbinden den Gitterpunkt  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  des  $n$ -dimensionalen Raumes mit den Gitterpunkten  $(x_1 + 1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $(x_1, x_2 + 1, \dots, x_n)$ ,  $\dots$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n + 1)$  durch je eine Kante. Wenn wir dies für alle Gitterpunkte durchführen, erhalten wir den gewöhnlichen Gittergraphen des  $n$ -dimensionalen Raumes; dies ist ein unendlicher Graph, in dessen Knotenpunkten sich je  $2n$  Kanten treffen. Herr D. KÖNIG stellte die folgenden beiden Probleme<sup>1)</sup>:

I. *Hat der Gittergraph des  $n$ -dimensionalen Raumes eine vom Unendlichen ins Unendliche laufende Hamiltonlinie?*

Das Problem befragt, ob es eine beiderseits unendliche Folge von Gitterpunkten

$$\dots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots$$

gibt, in der jeder Gitterpunkt einmal und nur einmal vorkommt und die Punkte  $P_i, P_{i+1}$  für jedes  $i$  benachbarte Punkte sind. (Unter benachbarten Punkten verstehen wir die beiden Endpunkte einer Kante des Graphen.)

II. *Hat der Gittergraph des  $n$ -dimensionalen Raumes eine vom Unendlichen ins Unendliche laufende Eulerlinie?*

D. h. gibt es eine beiderseits unendliche Folge

$$\dots, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots$$

von Kanten, in der jede Kante des Graphen einmal und nur einmal vorkommt und jede Kante  $k_i$  einen Endpunkt von  $k_{i-1}$  mit einem Endpunkt von  $k_{i+1}$  verbindet?

In seinem zitierten Werk gibt KÖNIG eine Hamiltonlinie und eine Eulerlinie für  $n=2$  an und erwähnt, daß für  $n=3$  diese

<sup>1)</sup> D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936), S. 32.

Linien von T. GRÜNWALD bestimmt wurden. Wir bestimmen diese Linien für beliebiges  $n$ . In § 1 behandeln wir die Hamiltonlinie, in § 2 die Eulerlinie und in § 3 ein drittes verwandtes Problem.

### § 1.

Wir wollen eine Hamiltonlinie des  $n$ -dimensionalen Gittergraphen mit Hilfe einer Hamiltonlinie des  $n - 1$ -dimensionalen Gittergraphen bestimmen. Die Methode zeigen wir zuerst für den Fall  $n = 3$ .

Es sei also

$$\dots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots$$

eine Hamiltonlinie des ebenen Gittergraphen (Fig. 1). Dann ist also jeder Gitterpunkt  $(x_1, x_2)$  mit einem  $P_h$  identisch;  $h$  ist hier eine Funktion  $h = h_2(x_1, x_2)$  von  $x_1$  und  $x_2$ . Jetzt bilden wir die Gitterpunkte des dreidimensionalen Raumes ein-eindeutig auf die Gitterpunkte der  $(u, v)$ -Ebene mit Hilfe der Gleichungen

$$u = h_2(x_1, x_2), v = x_3$$

ab. (Diese Abbildung bedeutet eigentlich die Abwicklung des Zylindermantels der Fig. 2 in die  $(u, v)$ -Ebene.) Punkte, die benachbarten Gitterpunkten der  $(u, v)$ -Ebene entsprechen, sind auch im Raume benachbart, denn

a) den Punkten  $(u, v)$  und  $(u, v + 1)$  entsprechen bzw. die benachbarten Punkte  $(x_1, x_2, x_3)$  und  $(x_1, x_2, x_3 + 1)$ , wo  $x_1, x_2, x_3$  aus  $h_2(x_1, x_2) = u, x_3 = v$  zu bestimmen sind;

b) die den Punkten  $(u, v)$  und  $(u + 1, v)$  entsprechenden Punkte  $(x_1, x_2, x_3)$  und  $(x'_1, x'_2, x_3)$  mit  $x_3 = v$  sind ebenfalls benachbart, denn die Punkte  $(x_1, x_2, 0)$  und  $(x'_1, x'_2, 0)$  sind wegen

$$h_2(x'_1, x'_2) = u + 1 = h_2(x_1, x_2) + 1$$

offenbar benachbart.

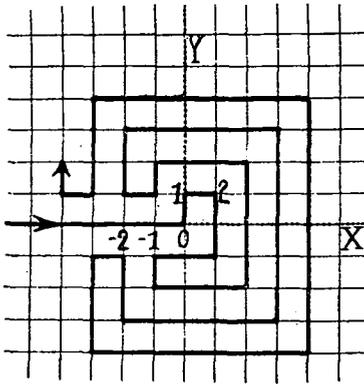


Fig. 1.

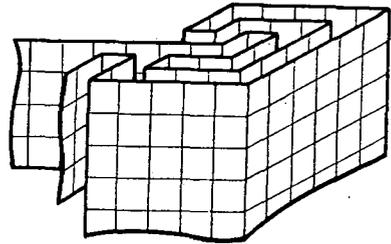


Fig. 2.

Daraus folgt, daß die Linie, welche der Hamiltonlinie des Gittergraphen der  $(u, v)$ -Ebene entspricht, eine Hamiltonlinie des dreidimensionalen Gittergraphen ist.

Wenn wir nun die eben gewonnene Hamiltonlinie des dreidimensionalen Gittergraphen durch eine Funktion  $h_3(x_1, x_2, x_3)$  charakterisieren (im gleichen Sinne, wie oben für die Ebene), so besteht

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = h_2(h_2(x_1, x_2), x_3).$$

Vollkommen analog ist der Übergang von dem  $n-1$ -dimensionalen Raum auf den  $n$ -dimensionalen. Wenn wir annehmen, daß es eine Hamiltonlinie im  $n-1$ -dimensionalen Raume gibt, dann können wir ähnlich wie oben die Funktion  $h_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  einführen. (Diese  $n-1$ -stellige Funktion nimmt also jeden ganzzahligen Wert einmal und nur einmal an.) Die Gitterpunkte des  $n$ -dimensionalen Raumes bilden wir ein-eindeutig auf die Gitterpunkte der  $(u, v)$ -Ebene mit Hilfe der Gleichungen

$$u = h_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), v = x_n$$

ab. Das Urbild einer Hamiltonlinie des Gittergraphen der  $(u, v)$ -Ebene ist dann eine Hamiltonlinie des  $n$ -dimensionalen Gittergraphen. Für die entsprechende Funktion  $h_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  erhalten wir

$$h_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = h_2(h_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n).$$

Anmerkung. Auf ähnliche Weise läßt sich auch der folgende Satz beweisen:

*Der Gittergraph des  $n$ -dimensionalen Raumes hat eine aus dem Punkt  $O = (0, 0, \dots, 0)$  ausgehende einseitig unendliche Hamiltonlinie.*

Der Gittergraph der Ebene besitzt nämlich eine aus dem Punkt  $O$  ausgehende Hamiltonlinie (Fig. 3). Es sei diese Hamiltonlinie

$$P_0, P_1, P_2, \dots,$$

dann ist also jeder Gitterpunkt  $(x_1, x_2)$  mit einem  $P_k$  identisch;  $k$  ist hier eine nichtnegative ganzzahlige Funktion  $k = h'_2(x_1, x_2)$ . Wie oben, lassen sich die Gitterpunkte des dreidimensionalen Raumes ein-

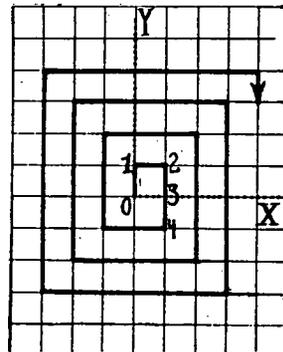


Fig. 3.

eindeutig auf die Gitterpunkte der  $(u, v)$ -Halbebene  $u \geq 0$  abbilden, mit Hilfe der Gleichungen

$$u = h'_2(x_1, x_2), v = x_3;$$

dabei entsprechen benachbarten Punkten der  $(u, v)$ -Ebene auch im Raume benachbarte Punkte. Nun hat der Gittergraph der  $(u, v)$ -Halbebene  $u \geq 0$  eine aus dem Punkt  $O$  ausgehende Hamiltonlinie (Fig. 4); wenn wir diese Hamiltonlinie auf den dreidimensionalen Raum abbilden, erhalten wir eine aus dem Punkt  $O$  ausgehende Hamiltonlinie des dreidimensionalen Gittergraphen.

Der Übergang auf  $n$  Dimensionen geschieht auch hier, wie oben.

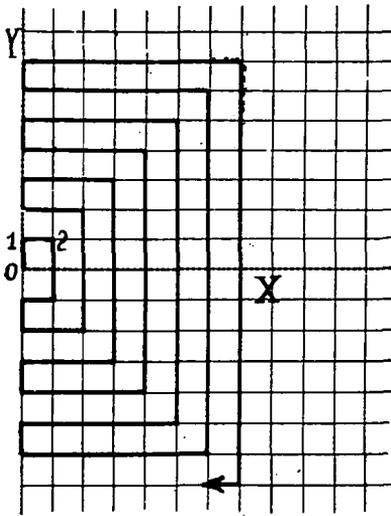


Fig. 4.

§ 2.

Wie in § 1, bestimmen wir eine Eulerlinie des dreidimensionalen Gittergraphen mit Hilfe einer Eulerlinie des zweidimensionalen Gittergraphen.

Es sei also

$$\dots, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots$$

eine Eulerlinie des ebenen Gittergraphen (Fig. 5); dann ist also jede Kante  $[(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)]$  — wo entweder  $x'_1 = x_1$  und  $x'_2 = x_2 + 1$ , oder  $x'_1 = x_1 + 1$  und  $x'_2 = x_2$  ist — mit einem  $k_E$  identisch;  $E$  ist hier eine Funktion

$$E = E_2[(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)]$$

von  $x_1, x_2, x'_1$  und  $x'_2$ . Wir ordnen ferner dem gemeinsamen Gitterpunkte der Kanten  $k_i$  und  $k_{i+1}$  die Zahl  $i$  zu. Da die Eulerlinie durch einen jeden Gitterpunkt zweimal durchgeht, werden jedem Gitterpunkt  $(x_1, x_2)$  zwei Zahlen zugeordnet; die kleinere dieser Zahlen nennen wir  $e_2(x_1, x_2)$ .

Wir bilden nun die Kanten des dreidimensionalen Gitter-

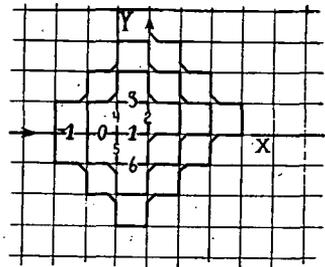


Fig. 5.

graphen ein-eindeutig auf einen Graphen  $\mathfrak{G}'$  der  $(u, v)$ -Ebene ab. Und zwar

a) der Kante  $[(x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x_3)]$  (wobei entweder  $x'_1 = x_1$  und  $x'_2 = x_2 + 1$ , oder  $x'_1 = x_1 + 1$  und  $x'_2 = x_2$ ) ordnen wir jene Kante  $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$  zu, für welche

$$u_1 = E_2[(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)] - 1, \quad u_2 = E_2[(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)], \quad v_1 = v_2 = x_3;$$

b) der Kante  $(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3 + 1)$  ordnen wir jene Kante  $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$  zu, für welche

$$u_1 = u_2 = e_2(x_1, x_2), \quad v_1 = x_3, \quad v_2 = x_3 + 1.$$

Diese Abbildung bedeutet eigentlich die Abwicklung des Zylindermantels Fig. 6 in die  $(u, v)$ -Ebene. Aus dem Gittergraphen  $\mathfrak{G}$  der  $(u, v)$ -Ebene wird dieser Graph  $\mathfrak{G}'$  erhalten, indem man alle Kanten, die auf gewissen, mit der  $v$ -Achse parallelen Geraden liegen, wegläßt (Fig. 7).

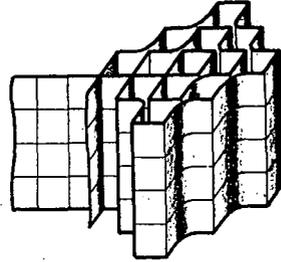


Fig. 6.

Es ist daher klar, daß dieser Graph (topologisch) wieder ein ebener Gittergraph ist und deshalb eine Eulerlinie besitzt. Mit Rücksicht darauf, daß benachbarten Kanten des Graphen  $\mathfrak{G}'$  der  $(u, v)$ -Ebene auch im

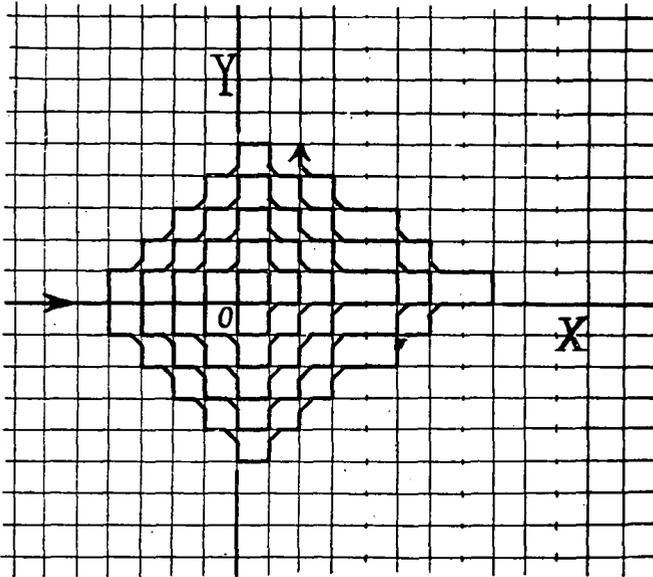


Fig. 7.

Raume benachbarte Kanten entsprechen, ist es ohne weiteres klar, daß die inverse Abbildung einer Eulerlinie<sup>4</sup> des Graphen  $\mathcal{G}'$  eine der gesuchten räumlichen Eulerlinien liefert.

Genau auf dieselbe Weise wird eine Eulerlinie im  $n$ -dimensionalen Raume bestimmt, wenn eine Eulerlinie des  $n-1$ -dimensionalen Gittergraphen bekannt ist. Wir numerieren, genau wie früher, die Kanten des  $n-1$ -dimensionalen Gittergraphen und bezeichnen die Ordnungszahl der Kante, die durch die Nachbarpunkte  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  und  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$  bestimmt wird, durch  $E_{n-1}[(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})]$ . Wir ordnen ferner dem gemeinsamen Gitterpunkte der  $l$ -ten und  $l+1$ -ten Kante die Zahl  $l$  zu. Auf diese Weise werden jedem Gitterpunkt  $n-1$  Zahlen zugeordnet, da die Eulerlinie durch jeden Gitterpunkt genau  $n-1$ -mal durchgeht; wir bezeichnen die kleinste dieser  $n-1$  Zahlen mit  $e_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ . (Die Funktion  $e_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  nimmt offenbar nicht alle ganzzahlige Werte an.) Nun bilden wir die Kanten des  $n$ -dimensionalen Gittergraphen ein-eindeutig auf einen Graphen der  $(u, v)$ -Ebene ab. Wir ordnen nämlich

a) der Kante  $[(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n), (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, x_n)]$  (wo  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$  und  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, x_n)$  benachbarte Gitterpunkte des  $n$ -dimensionalen Raumes, daher auch  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  und  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})$  benachbarte Gitterpunkte des  $n-1$ -dimensionalen Raumes sind) die Kante  $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$  mit

$$u_1 = E_{n-1}[(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})] - 1,$$

$$u_2 = E_{n-1}[(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})], \quad v_1 = v_2 = x_n;$$

b) der Kante  $[(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + 1)]$  die Kante  $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$  mit

$$u_1 = u_2 = e_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad v_1 = x_n, \quad v_2 = x_n + 1$$

zu.

Auf diese Weise erhalten wir einen Graphen, welcher aus jenen Kanten des Gittergraphen der  $(u, v)$ -Ebene besteht, die nicht auf solchen Geraden  $u=c$  liegen, wo  $c$  ein von der Funktion  $e_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  ausgelassener Wert ist. In der Tat,

a) die Kanten  $(u_1, x_n), (u_2, x_n)$  mit

$$u_1 = E_{n-1}[(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})] - 1,$$

$$u_2 = E_{n-1}[(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1})]$$

sind sämtliche zur  $u$ -Achse parallele Kanten des ebenen Gittergraphen;

b) die Kanten  $(u, x_n), (u, x_n + 1)$  mit

$$u = e_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

machen die zur  $v$ -Achse parallele Gittergeraden aus, mit Ausnahme der oben genannten Geraden  $u = c$ .

Wir haben somit den  $n$ -dimensionalen Gittergraphen auf einen Graphen der  $(u, v)$ -Ebene abgebildet, der selbst ein zweidimensionaler Gittergraph ist, also notwendigerweise eine Eulerlinie besitzt. Die inverse Abbildung führt diese Linie in eine Eulerlinie des  $n$ -dimensionalen Gittergraphen über.

### § 3.

KÜRSCHÁK hat bewiesen, daß die Gitterpunkte der Ebene durch eine nach beiden Seiten unendliche Folge von Rösselsprüngen durchlaufen werden können und zwar so, daß ein jeder Gitterpunkt in der Folge einmal und nur einmal vorkommt<sup>2)</sup>.

In diesem Paragraphen wird ein neuer Beweis des Kürschákschen Satzes gegeben, der zugleich eine Verallgemeinerung für den  $n$ -dimensionalen Fall liefert.

Es seien  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Q = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  zwei Gitterpunkte des  $n$ -dimensionalen Raumes. Wir sagen,  $P$  und  $Q$  seien in Bezug auf Rösselsprung benachbart (oder auch:  $PQ$  bilde einen Rösselsprung), falls für ein gewisses Zahlenpaar  $(i, j)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ )

$$x'_i = x_i \pm 1,$$

$$x'_j = x_j \pm 2$$

und für  $k \neq i, k \neq j, k = 1, 2, \dots, n$

$$x'_k = x_k$$

ausfällt. Nun gilt der Satz:

*Die Gitterpunkte des  $n$ -dimensionalen Raumes lassen sich durch eine nach beiden Seiten unendliche Folge von Rösselsprüngen durchlaufen und zwar so, daß in der Folge jeder Gitterpunkt einmal und nur einmal vorkommt.*

Zuerst beweisen wir den Satz für  $n = 2$ , d. h. wir geben einen neuen Beweis des Kürschákschen Satzes.

<sup>2)</sup> J. KÜRSCHÁK, Lóugrás a végtelen sakkáblán, *Matematikai és Fizikai Lapok*, 33 (1926), S. 117—119.

Wir bilden die Gitterpunkte  $(x_1, x_2)$  der Ebene ein-eindeutig auf die Gitterpunkte  $(y_1, y_2, y_3)$  mit  $0 \leq y_3 \leq 2$  des Raumes durch die Gleichungen

$$x_1 = 2y_1 + y_2 + 2y_3,$$

$$x_2 = y_1 + 2y_2 - y_3$$

ab. Jedem Gitterpunkt des Raumes entspricht ein und nur ein Gitterpunkt der Ebene; aber auch umgekehrt, jedem Gitterpunkt  $(x_1, x_2)$  der Ebene entspricht ein und nur ein Punkt  $(y_1, y_2, y_3)$

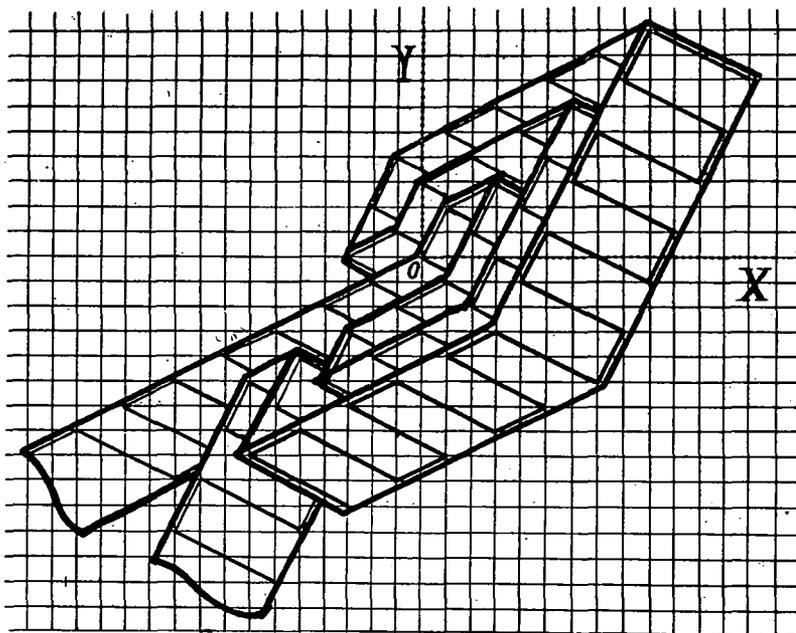


Fig. 8.

des Raumgitters mit  $y_3 = 0, 1$  oder  $2$ . In der Tat ist zunächst  $y_3$  aus der Kongruenz

$$x_1 + x_2 \equiv y_3 \pmod{3}$$

eindeutig bestimmt; ferner sind  $y_1, y_2$  aus den Gleichungen

$$2y_1 + y_2 = x_1 - 2y_3,$$

$$y_1 + 2y_2 = x_2 + y_3$$

zu bestimmen; es ist klar, daß  $y_1$  und  $y_2$  stets ganzzahlig ausfallen.

Es ist leicht einzusehen, daß die Bildpunkte von benach-

barten Gitterpunkten des Raumes in Bezug auf Rösselsprung benachbarte Punkte der Ebene sind. In der Tat,

- a) erhöht man  $y_1$  durch 1, so wird  $x_1$  um 2,  $x_2$  um 1 größer;
- b) erhöht man  $y_2$  durch 1, so wird  $x_1$  um 1,  $x_2$  um 2 größer;
- c) erhöht man endlich  $y_3$  durch 1, so wird  $x_1$  um 2 größer,  $x_2$  um 1 kleiner.

Wenn also der durch  $0 \leq y_3 \leq 2$  bestimmte Teilgraph des räumlichen Gittergraphen eine Hamiltonlinie besitzt, so erhält man

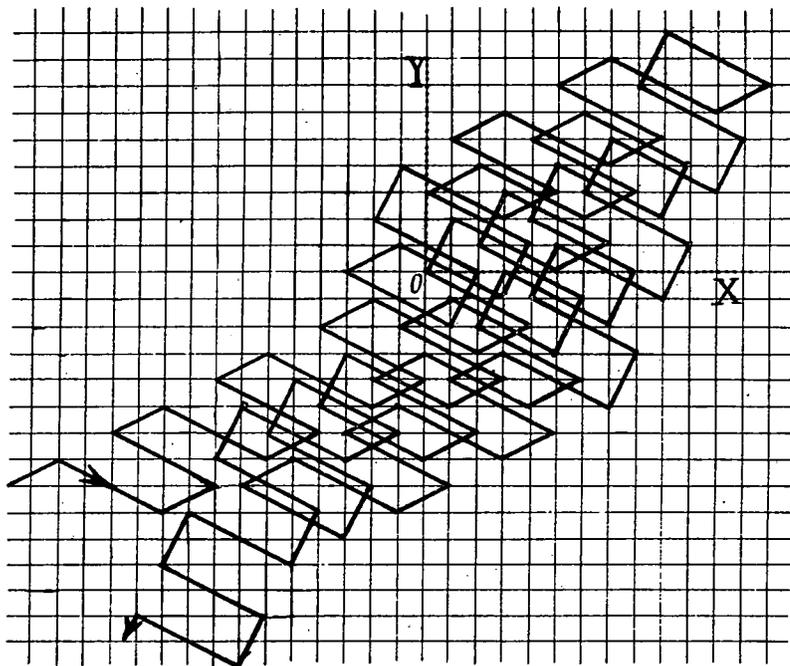


Fig. 9.

daraus durch die inverse Abbildung die gesuchte Rösselsprungsfolge. Nun ergibt sich aber durch eine kleine Abänderung des im § 1 gegebenen Beweises, daß auch dieser Teilgraph eine Hamiltonlinie besitzt. (Im Beweis ist die Abbildung auf die durch die Ungleichung  $0 \leq v \leq 2$  bestimmten Punkte der  $(u, v)$ -Ebene durchzuführen.)

Fig. 8 ist in zwei verschiedenen Weisen zu deuten: als räumliche Figur zeigt sie die Hamiltonlinie, welche die auf dem durch die fetteren Linien begrenzten Band liegenden Gitterpunkte

$(y_1, y_2, y_3)$  ( $0 \leq y_3 \leq 2$ ) enthält. Wenn man hingegen die fetteren Linien wegläßt und die Figur als zweidimensional betrachtet (vgl. Fig. 9), so erhält man die gesuchte Rösselsprungsfolge.

Somit ist unser Satz für  $n=2$  bewiesen.

Der Übergang auf  $n$  Dimensionen geschieht durch vollständige Induktion. Wir setzen voraus, daß der Satz für  $n-1$  gilt. Die Anzahl der Rösselsprünge, durch welche man den Punkt  $P=(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  des  $n$ -dimensionalen Gitters aus dem Anfangspunkte  $O$  erreicht, positiv oder negativ genommen, je nachdem  $P$  in der betrachteten Rösselsprungsfolge nach oder vor  $O$  steht, bezeichnen wir mit  $R_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ . Wir bilden die Gitterpunkte des  $n$ -dimensionalen Raumes mit Hilfe der Gleichungen

$$u = R_{n-1}(x_1 - 2x_n, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}), \quad v = x_n$$

ein-eindeutig auf die Gitterpunkte der  $(u, v)$ -Ebene ab. Wir behaupten, daß die Bilder von Nachbarpunkten des ebenen Gitters in Bezug auf Rösselsprung benachbarte Punkte des  $n$ -dimensionalen Raumes sind. In der Tat,

a) den Punkten  $(u, v)$ ,  $(u, v+1)$  entsprechen bzw. die Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  mit

$$u = R_{n-1}(x_1 - 2x_n, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) = R_{n-1}(x'_1 - 2x'_n, x'_2, x'_3, \dots, x'_{n-1}), \\ v = x_n, \quad v+1 = x'_n,$$

so daß

$$x_1 - 2x_n = x'_1 - 2x'_n, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad \dots, \quad x_{n-1} = x'_{n-1}, \quad x_n = x'_n - 1,$$

d. h.

$$x_1 = x'_1 - 2, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad \dots, \quad x_{n-1} = x'_{n-1}, \quad x_n = x'_n - 1;$$

b) den Punkten  $(u, v)$ ,  $(u+1, v)$  entsprechen bzw. die Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  mit

$$u = R_{n-1}(x_1 - 2x_n, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}), \\ u+1 = R_{n-1}(x'_1 - 2x'_n, x'_2, x'_3, \dots, x'_{n-1}),$$

$$v = x_n = x'_n,$$

so daß die Punkte  $(x_1 - 2x_n, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$  und  $(x'_1 - 2x'_n, x'_2, x'_3, \dots, x'_{n-1})$  in Bezug auf Rösselsprung benachbart sind; daher gilt dasselbe für die Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, x'_n)$ . Also gilt unsere Behauptung in beiden Fällen.

Durch die inverse Abbildung erhält man also aus einer vom Unendlichen ins Unendliche laufenden Hamiltonlinie des zwei-

dimensionalen Gittergraphen die gesuchte Rösselsprungsfolge im  $n$ -dimensionalen Raume.

Definieren wir die Funktion  $R_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  für die soeben konstruierte Rösselsprungsfolge in ähnlicher Weise wie oben  $R_{n-1}$ , so ist offenbar

$$R_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = h_2(R_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n),$$

wobei  $h_2$  die im § 1 eingeführte Funktion ist.

Anmerkung. KÜRSCHÁK hat auch bewiesen, daß die Gitterpunkte der Ebene durch eine aus dem Punkte  $O$  ausgehende einseitig unendliche Folge von Rösselsprüngen durchlaufen werden können<sup>3)</sup>. Auch dieser Satz läßt sich verallgemeinern:

*Die Gitterpunkte des  $n$ -dimensionalen Raumes lassen sich durch eine aus dem Punkt  $O$  ausgehende einseitig unendliche Folge von Rösselsprüngen durchlaufen.*

(Eingegangen am 21. März 1936.)

---

<sup>3)</sup> J. KÜRSCHÁK, Rösselsprung auf dem unendlichen Schachbrette, *diese Acta*, 4 (1928—29), S. 12—13.