Über Potenzreihen mit monotoner Koeffizientenfolge.

Von S. SIDON in Budapest.

Potenzreihen, deren Koeffizienten eine k-fach monotone Nullfolge bilden ($k>0$ und ganz), sind Gegenstand mehrerer in letzterer Zeit erschienenen Arbeiten des Herrn L. FEJÉR[1]). Da eine solche Potenzreihe die Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sigma_n^{k-1}(z), \qquad p_n > 0 \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

zuläßt, wobei $\sigma_n^l(z)$ das n-te arithmetische Mittel l-ter Ordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ bezeichnet, kann ein Teil der dort behandelten Fragestellungen (Wurzelfreiheit einer Potenzreihe oder einer ihrer Derivierten in einem Gebiete, der sogenannte Kakeyasche Problemkreis) prinzipiell durch das folgende, dem Wesen nach von KEMPNER[2]) herrührende Lemma erledigt werden.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegebene komplexe Zahlen, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die entsprechenden Punkte der Gaußschen Zahlenebene mit dem Nullpunkt O. Die Gleichung

$$\sum_{l=1}^{n} p_l a_l = 0 \tag{1}$$

in den Unbekannten p_l hat dann und nur dann eine von der trivialen verschiedene positive Lösung (d. h. eine Lösung mit $p_l \geqq 0$

---

1) Siehe die in gewisser Hinsicht zusammenfassende Darstellung: L. FEJÉR, Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, *diese Acta,* **8** (1936), S. 89—115.

2) A. J. KEMPNER, Über die Separation komplexer Wurzeln algebraischer Gleichungen, *Math. Annalen,* **85** (1922), S. 49—59.

für $l=1, 2, \ldots, n$; $p_1+p_2+\ldots+p_n>0$), *wenn die Halbstrahlen $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ nicht im Innern einer und derselben Halbebene liegen*[3]. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat (1) auch solche positive Lösungen, für welche nur drei von den p_l von Null verschieden sind.

Ich zeige an zwei Beispielen die praktische Anwendbarkeit der soeben dargelegten Methode.

1. Der wohlbekannte Eneström—Kakeyasche Satz: *Ist $c_l>c_{l+1}$ für $l=0, 1, \ldots, n-1$, $c_n\geqq 0$, so gilt*

$$\sum_{l=0}^{n} c_l z^l \neq 0$$

im Kreise $|z|<1$, ist eine Folge[4] der Tatsache, daß dort

$$\Re\left((1-z)\,\sigma_l^0(z)\right)=\Re(1-z^{l+1})\geqq 0.$$

Zugleich ergibt sich, daß *die Nullstellen der Polynome der nämlichen Klasse die Menge derjenigen Werte z ausfüllen, für welche die Ungleichungen*

$$\Re\left((1-z^l)\,e^{i\alpha}\right)>0, \qquad l=1, 2, \ldots, n+1,$$

für kein reelles α gleichzeitig erfüllt sind.

2. Das folgende Resultat stammt von Herrn Fejér[5]: *Ist $c_1, c_2, \ldots$ eine vierfach monotone Nullfolge, so ist die durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ definierte Funktion im Kreise $|z|<1$ schlicht.* Ich zeige nun, daß *hier die Monotonitätsbedingung für die Koeffizienten sich nicht durch die der zweifachen Monotonität ersetzen läßt*[6]. In der Tat hat das Polynom

$$(2) \qquad P(z)=\sum_{l=1}^{n} p_l\,\sigma_l^1(z), \qquad p_l\geqq 0 \text{ für } l=1, 2, \ldots, n,$$

---

[3] Die geometrische Bedeutung der positiven Lösbarkeit von (1) liegt darin, daß der Nullpunkt in dem von $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bestimmten kleinsten konvexen Bereich liegt.

[4] Herr Paul Turán teilte mir mit, daß ihm der obige Beweis des Eneström—Kakeyaschen Satzes, in dem nur der erste, ganz triviale Teil des Kempnerschen Lemmas zur Anwendung gelangt, schon vor einigen Jahren bekannt war. Hier ergibt er sich naturgemäß.

[5] L. Fejér, loc. cit. [1], S. 90 (Satz II); vgl. auch S. 92.

[6] Das erste Beispiel einer, nach einem von dem hier angewandten verschiedenen Verfahren konstruierten, für $|z|<1$ nicht schlichten Potenzreihe, deren Koeffizienten eine konvexe Nullfolge bilden, rührt von Herrn G. Szegő her (mitgeteilt August 1936 in einem Briefe an Herrn L. Fejér).

als Potenzreihe betrachtet, eine konvexe Koeffizientenfolge. Es lassen sich Werte z mit $|z| < 1$ angeben, z. B. $z = (1-\delta)e^{\frac{i\pi}{6}}$, wenn $\delta > 0$ und hinreichend klein ist, für welche die Bedingung der positiven Lösbarkeit der Gleichung

$$P'(z) = \sum_{l=1}^{n} p_l (\sigma_l^1(z))' = 0$$

bezüglich der p_l erfüllt ist. Wird nämlich

$$(l+1)(1-z)^3(\sigma_l^1(z))' = l(1-z^{l+2}) - (l+2)(z-z^{l+1}) = \tau_l(z)$$

gesetzt, so gilt, wie man leicht nachrechnet,

$$\tau_2(e^{\frac{i\pi}{6}}) = (3-2\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})\, i,$$

$$\tau_4(e^{\frac{i\pi}{6}}) = 8-6\sqrt{3},$$

$$\tau_{15}(e^{\frac{i\pi}{6}}) = \left(\frac{13}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\frac{17}{2}\sqrt{3} - 16\right) i$$

und die entsprechenden Halbstrahlen liegen nicht in einer Halbebene. Daraus folgt die Existenz von Polynomen (2), deren Derivierte im Kreise $|z| < 1$ nicht wurzelfrei ist.

(Eingegangen am 5. Juni 1937; umgearbeitet am 18. August 1939.)