Über ein geometrisches Extremalproblem.

Von BÉLA V. SZ. NAGY in Szeged.

1. Herr SZEKERES hat in der vorstehenden Arbeit einen Beweis für einen schon von Herrn G. GRÜNWALD vermuteten Satz mitgeteilt[1]). Seine Methode beruht auf der Anwendung eines speziellen Vergrößerungsprozesses für konvexe Figuren. Wir wollen hier einen anderen Beweis skizzieren, der gleichzeitig mit demjenigen von Herrn SZEKERES gefunden wurde. Dieser Beweis stützt sich auf einen Verjüngungsprozeß, der schon von Herrn F. RIESZ (zur Behandlung eines anderen Problems) benützt wurde[2]) und auf dessen Anwendbarkeit auf das Grünwaldsche Problem er uns freundlicherweise aufmerksam machte.

Wir beweisen den Satz zugleich in der folgenden verschärften Form:

Satz. *Es sei in der Ebene eine aus endlich vielen Kontinuen bestehende Menge M gegeben, $|M|$ sei ihr (zweidimensionales) Maß. M_α sei die (orthogonale) Projektion von M auf eine Gerade der Richtung α, $|M_\alpha|$ bezeichne das (lineare) Maß von M_α. Es sei ferner $\mathfrak{A}(|M_\alpha|)$ das arithmetische Integralmittel von $|M_\alpha|$ gebildet über $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$, es sei endlich $m = \min\limits_{\alpha} |M_\alpha|$. Dann gilt die Ungleichung*

$$|M| \leqq \frac{\pi}{4} \{[\mathfrak{A}(|M_\alpha|)]^2 - [\mathfrak{A}(|M_\alpha|) - m]^2\} = \frac{\pi}{4} [2\mathfrak{A}(|M_\alpha|)m - m^2],$$

in der die Gleichheit nur dann besteht, wenn M eine rennbahnförmige Menge[3]) *ist.*

---

[1]) G. SZEKERES, Ein Problem über mehrere ebene Bereiche, *diese Acta,* 9 (1939), S. 247—252.

[2]) F. RIESZ, Sur une inégalité intégrale, *Journal of the London Math. Society,* 5 (1930), S. 162—168.

[3]) D. h. die Menge derjenigen Punkte, deren Abstand von einer Strecke (oder von einem Punkte) $\leqq r$ ist (r gegeben, > 0).

Wir gebrauchen den folgenden

Hilfssatz. *Es sei S eine aus endlich vielen Bogen bestehende Teilmenge einer konvexen Kurve. S_α sei die Projektion von S auf eine Gerade der Richtung α. Wenn $|S|$ das Bogenmaß von S und $|S_\alpha|$ das lineare Maß von S_α bezeichnen, dann gilt die Ungleichung*

$$|S| \leqq \pi \mathfrak{A}(|S_\alpha|),$$

in der die Gleichheit nur dann besteht, wenn S die ganze Kurve ist.

Da S auf einer konvexen Kurve liegt, kann ein Punkt von S_α das Bild von höchstens zwei verschiedenen Punkten von S sein[4]). S'_α sei die Menge derjenigen Punkte von S_α, die das Bild zweier verschiedener Punkte von S sind, $|S'_\alpha|$ sei ihr Maß. Besteht S nur aus Geradenstücken, so kann man die Beziehung

$$(1) \qquad |S| = \frac{\pi}{2} [\mathfrak{A}(|S_\alpha|) + \mathfrak{A}(|S'_\alpha|)]$$

leicht rechtfertigen. Durch Polygonapproximation kann man dann (1) für beliebiges S einsehen. Ist S die ganze konvexe Kurve, so ist offenbar $\mathfrak{A}(|S_\alpha|) = \mathfrak{A}(|S'_\alpha|)$. Ist aber S nicht die ganze Kurve, so gibt es immer ein Intervall $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, so daß für diese α S'_α eine echte Teilmenge von S_α ist; folglich ist $\mathfrak{A}(|S'_\alpha|) < \mathfrak{A}(|S_\alpha|)$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Im Beweis des Satzes darf man offenbar annehmen, daß M aus *konvexen* Figuren besteht, ihre Anzahl sei k.

C sei die kleinste konvexe Kurve, die M einschließt; $C(t)$ sei ihre im Abstand t verlaufende innere Parallelkurve. $S(t)$ sei der gemeinsame Teil von $C(t)$ und M, $M(t)$ sei die Menge derjenigen Punkte von M, die nicht außerhalb $C(t)$ liegen.

Es folgt aus dem Hilfssatze, daß

$$(2) \qquad |S(t)| \leqq \pi \mathfrak{A}(|S_\alpha(t)|)$$

gilt. Man hat also um so mehr die Ungleichung

$$(3) \qquad |S(t)| \leqq \pi \mathfrak{A}(|M_\alpha(t)|).$$

Lassen wir t von 0 an wachsen, so werden einige der konvexen Figuren immer mehr verjüngt, für einen Wert $t = t_0$ wird endlich eine Figur (oder zugleich mehrere Figuren) auf einen

---

4) Enthält S auch Geradenstücke, so gilt dies allerdings nur dann, wenn die Richtung α auf kein Geradenstück orthogonal ist. In der Bildung von Integralmitteln können wir aber diese (höchstens abzählbar unendlich viele) Richtungen α außer Acht lassen.

Punkt, oder auf eine Strecke zusammenschrumpfen. Für $0 \leqq t \leqq t_0$ hat man offenbar

(4) $$|M_\alpha(t)| \leqq |M_\alpha| - 2t.$$

Ferner gilt die Beziehung

(5) $$-\frac{d|M(t)|}{dt} = |S(t)|.$$

Durch Integration folgt dann aus (3)—(5) die Ungleichung

(6) $$|M| - |M(t_0)| \leqq \pi[\mathfrak{A}(|M_\alpha|)\, t_0 - t_0^2].$$

Ist $k=1$, so ist t_0 gleich dem Radius r des größten eingeschriebenen Kreises und $|M(t_0)|$ ist gleich 0. (6) liefert also für $k=1$ den Satz sogar in noch schärferer Form, da $r \leqq \frac{m}{2}$ ist[5]). Da in (2) und (3) in diesem Falle das Gleichheitszeichen besteht, gilt in (6) die Gleichheit dann, wenn sie in (4) für alle t statthat. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn M rennbahnförmig ist.

Nehmen wir nun an, daß der Satz für Mengen, die aus weniger als k_0 ($k_0 \geqq 2$) konvexen Figuren bestehen, schon bewiesen ist. Dann gilt er auch dann, wenn einer solchen Menge noch Punkte und Strecken hinzugefügt werden. Besteht M aus k_0 nichtausgearteten Figuren, so ist $M(t_0)$ eine Menge dieser Art. Es gilt also (infolge der Induktionsannahme) die Ungleichung

(7) $$|M(t_0)| \leqq \frac{\pi}{4}[2\mathfrak{A}(|M_\alpha(t_0)|)\, m(t_0) - m^2(t_0)]$$

mit $m(t_0) = \min\limits_\alpha |M_\alpha(t_0)|$. Aus (4), (6) (wo jetzt das Ungleichheitszeichen gilt) und (7) folgt dann

$$|M| < \frac{\pi}{4}[2\mathfrak{A}(|M_\alpha|)(m(t_0)+2t_0) - (m(t_0)+2t_0)^2]$$

und hieraus, wegen $m(t_0)+2t_0 \leqq m$ (vgl. (4)), die Gültigkeit des Satzes auch für M.

2. Der Teil des Beweises, wo man aus der Gültigkeit des Satzes für $k < k_0$ auf seine Gültigkeit für $k = k_0$ schließt, könnte auch mit der Vergrößerungsmethode des Herrn Szekeres geführt

[5]) Da für eine konvexe Figur M der Umfang L gleich $\pi\mathfrak{A}(|M_\alpha|)$ ist, so haben wir die von Bonnesen stammende Ungleichung $|M| \leqq rL - \pi r^2$ erhalten. vgl. T. Bonnesen und W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin, 1934; in folgendem als „BF“ zitiert), S. 82, 112—113.

werden. Wir wollen hier zeigen, daß man mit einer Verallgemeinerung der Vergrößerungsmethode für den n-dimensionalen Raum R_n den folgenden Satz beweisen kann.

Satz. *Es sei M eine aus endlich vielen Kontinuen bestehende Menge in R_n $(n \geqq 2)$. M_ω sei die Projektion von M auf eine Gerade der Richtung ω, $|M_\omega|$ sei ihr lineares Maß und $\mathfrak{A}(|M_\omega|)$ sei das arithmetische Integralmittel von $|M_\omega|$ über alle Richtungen ω in R_n. Dann besteht für das (n-dimensionale) Maß $|M|$ von M die Ungleichung*

$$|M| \leqq \frac{\varkappa_n}{2^n} [\mathfrak{A}(|M_\omega|)]^n ,$$

wo $\varkappa_n$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bedeutet. Die Gleichheit gilt nur dann, wenn M eine (n-dimensionale) Kugel ist.

Beim Beweis kann man wiederum annehmen, daß M aus *konvexen* Körpern besteht, ihre Anzahl sei k.

Für $k = 1$ ist der Satz bekannt[6]).

Es sei der Satz für $k < k_0$ $(k_0 \geqq 2)$ schon bewiesen, und betrachten wir nun den Fall $k = k_0$. Wir dürfen offenbar annehmen, daß diese k_0 konvexen Körper alle nichtausgeartet sind. Wir gebrauchen für sie die vektorielle Schreibweise $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_{k_0}$ (der Anfangspunkt 0 sei beliebig, aber fest gewählt)[7]).

Es sei $\mathfrak{K}_i'$ das Spiegelbild von $\mathfrak{K}_i$ in Bezug auf 0. $\mathfrak{K}_i^* = \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_i + \mathfrak{K}_i')$ ist dann der Zentralsymmetrisierte von $\mathfrak{K}_i$. Für die Volumina gilt die Ungleichung[8])

$$V(\mathfrak{K}_i^*) \geqq V(\mathfrak{K}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k_0). \tag{8}$$

Ist $\lambda \geqq 0$, so bedeute $\mathfrak{K}_i(\lambda)$ die Linearkomposition $\mathfrak{K}_i + 2\lambda\mathfrak{K}_i^*$. $\mathfrak{R}_i(t) = (1 + 2\lambda)^{-1}\mathfrak{K}_i(\lambda)$ ist dann eine lineare Schar mit dem Scharparameter $t = (1 + 2\lambda)^{-1}$, und man hat $\mathfrak{R}_i(0) = \mathfrak{K}_i^*$, $\mathfrak{R}_i(1) = \mathfrak{K}_i$. Nach dem Brunn-Minkowskischen Satz[9]) gilt die Beziehung

$$\sqrt[n]{V(\mathfrak{R}_i(t))} \geqq (1-t)\sqrt[n]{V(\mathfrak{K}_i^*)} + t\sqrt[n]{V(\mathfrak{K}_i)},$$

also, wegen (8),

$$V(\mathfrak{R}_i(t)) \geqq V(\mathfrak{K}_i).$$

---

[6]) Er stammt von P. Urysohn, vgl. BF, S. 109.

[7]) Für die vektorielle Schreibweise, sowie für die Bildung von Linearkompositionen konvexer Körper verweisen wir auf BF.

[8]) Vgl. BF, S. 73.

[9]) Vgl. BF, S. 88.

Hieraus folgt endlich die Ungleichung

$$V(\mathfrak{K}_i(\lambda)) \geqq (1+2\lambda)^n V(\mathfrak{K}_i). \tag{9}$$

Es sei λ_0 der kleinste Wert von λ, für den bereits zwei Körper einander berühren. Für die vergrößerte Menge $M(\lambda_0)$ gilt schon der Satz (gleicher Schluß, wie bei Herrn SZEKERES):

$$|M(\lambda_0)| \leqq \frac{\varkappa_n}{2^n} [\mathfrak{A}(|M_\omega(\lambda_0)|)]^n,$$

oder, durch $(1+2\lambda_0)^n$ dividiert,

$$(1+2\lambda_0)^{-n} |M(\lambda_0)| \leqq \frac{\varkappa_n}{2^n} [\mathfrak{A}((1+2\lambda_0)^{-1} |M_\omega(\lambda_0)|)]^n.$$

Die linke Seite ist hier $\geqq |M|$ (nach (9)). Die rechte Seite ist aber $< \frac{\varkappa_n}{2^n} [\mathfrak{A}(|M_\omega|)]^n$, da $|M_\omega(\lambda_0)| \leqq (1+2\lambda_0)\, |M_\omega|$ ist (gleicher Schluß, wie bei Herrn SZEKERES) und da es Richtungsbereiche gibt, für die $|M_\omega(\lambda_0)|$ diese Höchstgrenze *nicht* erreicht. Damit ist die Gültigkeit des Satzes auch für M gezeigt.

(Eingegangen am 20. August 1939.)