Sur le problème traité par MM. Szekeres et B. de Sz. Nagy.

Par J. FAVARD à Grenoble.

1. Nous allons montrer dans ce travail que les propriétés des corps convexes, auxquelles se réfèrent les mémoires précédents de MM. SZEKERES et B. DE SZ. NAGY[1]), peuvent être présentées sous une forme un peu plus synthétique, les ramenant à une des inégalités isopérimétriques classiques pour un corps que nous allons construire.

La méthode employée a, semble-t'il, l'avantage d'indiquer une voie où des généralisations possibles, relatives aux moyennes des aires des ombres de plusieurs corps convexes (et non plus aux largeurs), doivent être cherchées. — On m'excusera de ne rien présenter de plus précis sur ce dernier sujet: la date et le lieu indiqués à la fin expliquent suffisamment, je crois, cette carence.

2. Prenons, dans l'espace à trois dimensions par exemple, n corps convexes $C_1, C_2, \dots, C_n$ de volumes $V_1, V_2, \dots, V_n$; soit B_i^d la largeur du corps C_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ dans la direction de projection d.

Désignons maintenant par $C_{i,j}$ $(i \neq j)$ l'enveloppante convexe des deux corps C_i et C_j, par $C_{i,j,k}$ l'enveloppante convexe des trois corps C_i, C_j, C_k $(i \neq j \neq k)$ et ainsi de suite; soient $B_{i,j}^d, B_{i,j,k}^d, \dots$, les largeurs de ces corps dans la direction d. A partir d'une origine fixe O, construisons les domaines vectoriels $C_i^V, C_{i,j}^V, \dots$ des corps $C_i, C_{i,j}, \dots$; puis, en prenant pour centre O, les corps:

$$(1) \qquad \sum C_i^V,\ \sum{}' C_i^V + \sum{}'' C_{i,j}^V,\ \dots,\ C_{1,2,\dots,n}^V$$

---

[1]) G. SZEKERES, Ein Problem über mehrere ebene Bereiche, *ces Acta*, 9 (1940), pp. 247—252; B. VON SZ. NAGY, Über ein geometrisches Extremalproblem, *ces Acta*, 9 (1940), pp. 253—257.

où, dans chacune des sommations ci-dessus, chaque indice figure une fois et une seule, et où toutes les sommations possibles sont à effectuer[2]).

La partie commune de tous les corps précédents est un nouveau corps convexe Γ, centré en O, de volume V; nous allons montrer que:

$$V \geqq 8 \sum_1^n V_i. \tag{2}$$

3. Procédons par récurrence; le résultat est en effet connu pour un seul corps convexe, car il s'agit alors d'une propriété du corps vectoriel; nous le supposons donc vrai pour $(n-1)$ corps.

Suivant M. Szekeres, considérons le corps:

$$C_i^\lambda = C_i + \lambda C_i^V$$

de largeur $B_i^d(1+2\lambda)$ dans la direction d, et dont le corps vectoriel construit à partir de l'origine est: $C_i^V(1+2\lambda)$.

Construisons aussi les corps vectoriels des enveloppantes convexes des corps C_i^λ, deux à deux, trois à trois, etc. ...; puis considérons les sommes analogues à (1) et la partie commune Γ^λ à tous ces corps.

Lorsque nous passons des corps $C_{i,j}, \ldots$ aux enveloppantes des corps $(C_i^\lambda, C_j^\lambda), \ldots$, nous multiplions leurs largeurs $B_{i,j}^d, \ldots$ dans une direction d, par une quantité non supérieure à $(1+2\lambda)$; il s'ensuit donc que le corps Γ^λ est à l'intérieur du corps $\Gamma(1+2\lambda)$ et que, quant à son volume V^λ, on a:

$$V^\lambda \leqq V(1+2\lambda)^3. \tag{3}$$

4. Lorsque λ est tel que deux corps C_i^λ, au moins, viennent en contact, l'hypothèse de récurrence donne, en remarquant que le volume d'une enveloppante n'est pas inférieur à la somme des volumes des corps enveloppés:

$$V^\lambda \geqq 8 \sum_1^n V_i^\lambda \tag{4}$$

où V_i^λ désigne le volume du corps C_i^λ.

Or, les inégalités classiques de Minkowski donnent immédiatement:

$$V_i^\lambda \geqq V_i(1+2\lambda)^3. \tag{5}$$

---

[2]) Ainsi, dans le cas de trois corps C_1, C_2, C_3, nous considérons les corps: $C_1^V + C_2^V + C_3^V$; $C_1^V + C_{2,3}^V$; $C_2^V + C_{3,1}^V$; $C_3^V + C_{1,2}^V$; $C_{1,2,3}^V$.

La comparaison des inégalités (3) à (5) donne:

$$V(1+2\lambda)^3 \geqq V^\lambda \geqq 8(1+2\lambda)^3 \sum_1^n V_i.$$

L'inégalité (2) en découle immédiatement.

5. Pour terminer, il nous suffit de remarquer que la largeur du corps Γ dans une direction d, ne dépasse jamais le double de la somme des segments de projection des corps C_i dans la direction d.

Si l'on écrit alors l'inégalité isopérimétrique entre le volume et la moyenne des largeurs du corps Γ, on obtient l'inégalité qui fait l'objet des travaux précédents. On a aussi sans peine la forme améliorée et on éclaircit facilement le cas d'égalité.

AUX ARMÉES
Octobre 1939.

(Reçu le 20 novembre 1939)