Sur la théorie ergodique des espaces abstraits.

Par FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

Introduction.

Dans une note récente, j'ai démontré quelques théorèmes appartenant à la théorie ergodique[1]). Le présent travail s'attache au dernier de ces théorèmes. Il s'agit dans ce théorème de l'espace fonctionnel L^1, formé des fonctions sommables dans un certain ensemble, soit, pour fixer les idées, dans l'intervalle (0, 1). *Envisageons une transformation linéaire T faisant correspondre à chaque élément f de l'espace L^1 un élément Tf du même espace et supposons que $M_T \leqq 1$, c'est-à-dire que*

$$\int_0^1 |Tf|\,dx \leqq \int_0^1 |f|\,dx$$

pour tous les f. Supposons de plus que pour un certain élément f_1, les moyennes arithmétiques des itérés $f_k = T^{k-1} f_1$,

$$\varphi_n = \frac{1}{n} \sum_1^n f_k,$$

admettent des intégrales dont la continuité absolue est uniforme dans leur ensemble, tel étant le cas, entre autres, lorsque les fonctions $|f_k|$ restent inférieures à la même fonction sommable. Dans ces hypothèses, les moyennes arithmétiques

$$\varphi_{m,n} = \frac{1}{n-m} \sum_{m+1}^n f_k$$

convergent en moyenne d'ordre 1 vers une fonction φ,

$$\int_0^1 |\varphi - \varphi_{m,n}|\,dx \to 0,$$

---

1) F. RIESZ, Some mean ergodic theorems, *Journal London Math. Society*, 13 (1938), pp. 274—278.

lorsque $n-m \to \infty$ et cette fonction φ est invariante par rapport à la transformation T.

A la fin de la note j'ai promis d'étendre ce théorème, dans un second travail, à un certain type d'espaces abstraits, les espaces (L), envisagés peu avant par M. GARRETT BIRKHOFF[2]), afin de perfectionner le résultat établi par cet auteur. Je me hâte d'avouer que c'est le résultat de M. BIRKHOFF qui m'a inspiré l'idée du théorème que je viens de rappeler. Qu'il nous suffise de dire, pour l'instant, que le type d'espace (L) embrasse entre autres notre espace L^1 et qu'il admet comme celui-ci des transformations linéaires T et alors l'analogue des moyennes φ_n. C'est pour ces moyennes que M. BIRKHOFF établit, sous certaines conditions, une sorte de convergence faible, savoir la convergence des suites numériques $A\varphi_n$ et cela pour toute opération linéaire numérique A.

En étudiant la note de M. BIRKHOFF, il me fallait m'apercevoir et certes l'auteur s'en est aperçu également que, malgré l'admirable finesse du raisonnement, le résultat final attend encore d'être perfectionné en plusieurs directions. Ainsi par exemple il n'y est pas question de l'existence, dans un sens approprié, d'un élément limite φ, tel qu'il intervient dans les théorèmes classiques de MM. G. D. BIRKHOFF et J. DE NEUMANN[3]). Aussi faut il se demander si la convergence faible ne se remplace pas par une sorte de convergence forte? Cherchant à répondre, c'était bien naturel de faire le premier pas en examinant le cas de l'espace fonctionnel L^1 et c'est ainsi que je suis arrivé au théorème ci-dessus.

Ce premier pas fait, je me suis aperçu aussitôt que le passage aux espaces (L), bien que laborieux ici et là, ne présente aucune difficulté sérieuse et qu'on peut le faire par plusieurs voies différentes. Une de ces voies, peut-être la plus courte, consiste à montrer que l'espace (L) ou plutôt un certain sous-espace du même type, le seul qui importe pour le problème actuel, peut être représenté sur l'espace L^1 ou sur un sous-espace de L^1 et cela de sorte que toutes les quantités et toutes les relations qui inter-

---

[2]) G. BIRKHOFF, Dependent probabilities and spaces (L), *Proceedings National Academy USA*, **24** (1938), pp. 154—158.

[3]) Cf. par exemple: G. D. BIRKHOFF and B. O. KOOPMAN, Recent contributions to the ergodic theory, *Proceedings National Academy U. S. A.*, **18** (1932), pp. 279—282.

viennent dans le problème soient conservées. On aboutit à une telle représentation par exemple en combinant quelques détails du présent travail avec un théorème de M. FREUDENTHAL[4]) ou avec un théorème voisin de M. B. DE SZ. NAGY[5]) concernant la réalisation de l'espace H de HILBERT par l'espace fonctionnel L^2 ou par un sous-espace de ce dernier, et cela sous la condition que les fonctions positives correspondent à des éléments de l'espace H fixés d'avance.

On arrive à la même représentation en la faisant asseoir sur la décomposition spectrale des éléments d'un lattis linéaire. Cet ordre d'idées fut découvert indépendamment et esquissé en quelques lignes par M. KAKUTANI dans une note récente[6]). Le passage de (L) à L^1 devient encore plus simple si, au lieu de passer aux fonctions sommables dans un intervalle, on s'arrête dans l'espace à une infinité dénombrable de dimensions.

Dans le présent travail, au lieu de me reporter au théorème particulier concernant l'espace L^1, je préfère de suivre une voie différente, peut-être plus longue mais facile à parcourir puisqu'elle passe, si même à prix d'un détour, par une sorte d'espace de HILBERT, plongé dans l'espace (L) de la même façon que l'espace fonctionnel L^2 l'est dans l'espace L^1. On y parvient en définissant le „carré" et le „produit" des éléments de l'espace (L) comme je l'ai fait il y a quelques années dans la théorie générale des opérations linéaires[7]). En tout cas je pense que la définition nouvelle du carré adoptée dans le présent travail et la facilité avec laquelle on en tire toutes les conséquences, méritent une attention intrinsèque. C'est pour cela que je ne me suis pas efforcé d'épargner quelques détails que l'on aurait pu éluder, par exemple en n'introduisant le carré et le produit que pour les éléments bornés par rapport à une unité préfixée.

---

[4]) H. FREUDENTHAL, Teilweise geordnete Moduln, *Proceedings Academy Amsterdam*, 39 (1936), pp. 641—651.

[5]) B. DE SZ. NAGY, On the set of positive functions in L_2, *Annals of Math.*, 39 (1938), pp. 1—13.

[6]) SH. KAKUTANI, Mean ergodic theorem in abstract (L)-spaces, *Proceedings Imperial Academy Tokyo*, 15 (1929), pp. 121—123.

[7]) F. RIESZ, A lineáris operációk elméletének néhány alapvető fogalomalkotásáról, *Math. és Term.-tud. Értesítő, Budapest*, 56 (1937), pp. 1—46. Une version française, avec quelques modifications, est imprimée dans les *Annals of Math.*, 41 (1940), pp. 173—206; cependant, dans cette version, l'analyse du carré et du produit est remplacée par un calcul fonctionnel général.

Il convient d'ajouter qu'on pourrait aussi faire entrer nos théorèmes comme cas particuliers sous un énoncé de forme générale de M. Yosida[8]) ou sous un autre, encore plus général, établi tout récemment par MM. Alaoglu et Garrett Birkhoff[9]); leur travail arrive au moment où je finis mon manuscrit. Cependant, pour le faire, il faudrait tout d'abord analyser la notion de convergence faible dans l'espace (L) et une telle analyse se base en substance sur les méthodes du présent travail.

Enfin qu'il me soit permis de dire que le délai dans la publication des idées que je vais exposer, est causé par le fait que je les ai réservées pour une conférence que j'étais invité à faire à l'occasion du congrès international qui aurait dû avoir lieu cette année aux Etats-Unis.

I. Les espaces (L).

1. Dans ce premier Chapitre nous énumérons les faits les plus essentiels concernant les lattis linéaires et en particulier les espaces (L), faits dont la plupart se trouvent exposés dans divers travaux sur le sujet[10]).

Nous convenons de désigner les éléments d'un espace abstrait (L) par les lettres f, g, h, φ et ψ.

Les espaces (L) se définissent par les hypothèses suivantes.

1° (L) est une *variété linéaire réelle,* c'est-à-dire qu'il comprend les combinaisons linéaires à coefficients numériques réels de ses éléments, l'addition des éléments et leur multiplication par des facteurs numériques obéissant aux règles ordinaires du Calcul vectoriel.

2° (L) est à la fois un *lattis linéaire,* c'est-à-dire qu'il est partiellement ordonné et cela en considérant comme non-négatifs (ou plus brièvement positifs) certains éléments f, en formule $f \geqq 0$, et en écrivant $f \geqq g$ ou $g \leqq f$ quand $f-g \geqq 0$. On suppose que

a) $f_1 \geqq 0$, $f_2 \geqq 0$ entraînent $f_1+f_2 \geqq 0$;

---

[8]) K. Yosida, Mean ergodic theorem in Banach spaces, *Proceedings Imperial Academy Tokyo,* 14 (1937), pp. 292—294.

[9]) L. Alaoglu and G. Birkhoff, General ergodic theorems, *Annals of Math.,* 41 (1940), pp. 293—309.

[10]) Cf. outre l. c. [2]) et [5]): L. V. Kantorovich, Lineare halbgeordnete Räume, *Recueil math. (Mat. sbornik) Moscou,* 44 (1937), pp. 121—168.

b) $f \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$ où λ est un facteur numérique, entraînent $\lambda f \geqq 0$ et inversement $f \geqq 0$, $f \neq 0$ et $\lambda f \geqq 0$ entraînent $\lambda \geqq 0$;

c) pour deux éléments quelconques f_1, f_2 il y a toujours un *plus petit majorant* $g_0 = \sup(f_1, f_2)$, caractérisé par les relations $g_0 \geqq f_1$, $g_0 \geqq f_2$ et $g_0 \leqq g$ pour tout autre g jouissant de la même propriété.

3⁰ (L) est un *espace complet*[11]) dans la métrique définie par une certaine *norme linéaire* $|f|$; cela veut dire que çette norme coïncide, pour f positif, avec une opération linéaire positive fixée If et que, en général, la norme est donnée par la valeur $I(|f|)$ où $|f|$, le *module* de f, est défini par $\sup(f, -f)$.

2. Voici quelques conséquences plus ou moins immédiates de la définition.

Lorsque $f \geqq g$ on a aussi $f+h \geqq g+h$ et $-f \leqq -g$; d'une façon plus générale on a $\lambda f \geqq$ ou $\leqq \lambda g$ suivant que $\lambda \geqq$ ou $\leqq 0$.

Avec une notation évidente, deux éléments quelconques f_1, f_2 admettent un *plus grand minorant* $\inf(f_1, f_2) = -\sup(-f_1, -f_2)$ et l'on a

$$\inf(f_1, f_2) + \sup(f_1, f_2) = f_1 + f_2. \tag{1}$$

En effet, en écrivant φ et ψ pour les deux termes du premier membre, on a $\varphi \leqq f_1$ et $\leqq f_2$, donc aussi $f_1+f_2-\varphi \geqq f_2$ et $\geqq f_1$ et alors $f_1+f_2-\varphi \geqq \sup(f_1, f_2)$, ce qui donne $f_1+f_2 \geqq \varphi+\psi$. L'inégalité opposée $f_1+f_2 \leqq \varphi+\psi$ s'obtient d'une manière analogue en partant de ψ, et les deux inégalités donnent l'égalité (1) qu'il fallait prouver.

3. On a évidemment $|\lambda f| = |\lambda|\,|f|$.

On a par définition $|f| \geqq f$ et $\geqq -f$; en ajoutant et en divisant par 2, on obtient $|f| \geqq 0$. De plus, lorsque $f \geqq 0$, on a aussi $f \geqq -f$ et par conséquent $|f| = f$. L'inverse est évident.

L'inégalité

$$|f_1+f_2| \leqq |f_1| + |f_2|, \tag{2}$$

qui s'écrit aussi

$$|f| - |g| \leqq |f-g|, \tag{3}$$

[11]) Par celą on entend comme d'ordinaire que la condition $|f_m - f_n| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ assure l'existence d'un élément limite f, $f_n \to f$, c'est que $|f - f_n| \to 0$. D'ailleurs l'hypothèse *c)* n'est pas essentielle puisqu'elle peut être réalisée toujours en ajoutant à l'espace des éléments idéaux et de plus, nos résultats s'interprètent sans difficulté pour des espaces incomplets.

est valable dans l'espace (L), de même que l'inégalité

(4) $$|f_2-f_1| \geqq \inf(f_2, g) - \inf(f_1, g).$$

Ces inégalités viennent de l'inégalité évidente

$$\sup(f_1+f_2, g_1+g_2) \leqq \sup(f_1, g_1) + \sup(f_2, g_2),$$

la première en y posant $g_1=-f_1$, $g_2=-f_2$ et la dernière en remplaçant d'abord f_2, g_1 et g_2 respectivement par f_2-f_1, g et 0, puis en observant que $\sup(f_2-f_1, 0) \leqq |f_2-f_1|$ et enfin en changeant les signes de f_1, f_2 et g pour passer des majorants aux minorants.

4. Des inégalités (2) et (3), en y appliquant l'opération I, on passe immédiatement aux suivantes, concernant la norme:

(5) $$\|f_1+f_2\| \leqq \|f_1\| + \|f_2\|,$$

(6) $$\big|\|f\| - \|g\|\big| \leqq \||f|-|g|\| \leqq \|f-g\|.$$

De cette dernière on conclut que si $f_n \to f$, c'est que $\|f-f_n\| \to 0$, on a aussi $|f_n| \to |f|$ et $\|f_n\| \to \|f\|$. D'ailleurs, à plus forte raison, on a aussi $If_n \to If$.

5. Il nous faudra encore envisager ce qu'on entend par plus petit majorant et plus grand minorant quand, au lieu de deux éléments, il s'agit d'un ensemble $\{f\}$ d'éléments f, fini ou infini. Leur définition est exactement la même que pour deux éléments et leur existence est évidente pour un nombre fini d'éléments.

Avant de passer au cas d'une infinité d'éléments, il sera avantageux de formuler une dernière hypothèse ou plutôt une convention qui ne servira qu'à simplifier le langage. Dans le cas de l'espace L^1 des fonctions sommables, cette convention revient à ne pas regarder comme distinctes deux fonctions qui ne diffèrent que dans un ensemble de mesure nulle. Dans le cas général, *nous convenons d'écrire $f=g$ toujours quand $\|f-g\|=0$ et $f \geqq 0$ lorsque $|f|=f$ d'après la convention faite* Une telle convention ne modifie pas l'ordre pour les couples d'éléments pour lesquelles l'ordre était déjà fixé; de plus elle ne se fera pas sentir quand il s'agira de transformations linéaires, des éléments „nuls“ étant transformés toujours en des éléments „nuls“. Notre convention implique entre autres que les suites d'éléments positifs ne peuvent converger que vers des limites positives. En effet, de $0 \leqq f_n \to f$ il s'ensuit par (6) que $f_n = |f_n| \to |f|$, donc $|f|=f$, c'est-à-dire que $f \geqq 0$.

Cela posé, envisageons une *suite croissante* f_n et supposons que la suite numérique If_n soit *bornée*. Alors on voit immédiatement que $|f_n - f_m| = If_n - If_m \to 0$ pour $n > m \to \infty$ et par conséquent f_n *converge vers une limite* f. Comme de plus, pour $n > m$, $f_n - f_m \geqq 0$ et $f_n - f_m \to f - f_m$ avec $n \to \infty$, on a aussi $f - f_m \geqq 0$. Soit d'autre part $g \geqq f_n$ pour tous les n; alors il s'ensuit de la même façon que $g \geqq f$. Ainsi *nous avons montré que*

$$f = \lim f_n = \sup (f_1, f_2, \ldots).$$

6. Soit maintenant $\{f\}$ un ensemble admettant un *majorant* g, c'est-à-dire que $f \leqq g$ pour tous les éléments de l'ensemble. Nous allons montrer que notre ensemble *admet aussi un plus petit majorant*. A cet effet envisageons tous les éléments h du type

$$h = \sup (f_1, \ldots, f_n)$$

où les f_i sont des éléments en nombre quelconque et tirés arbitrairement de l'ensemble. On a évidemment $h \leqq g$, donc $Ih \leqq Ig$ et par conséquent les valeurs Ih admettent une borne supérieure finie μ. Désignons par $h_1, h_2, \ldots$ une suite d'éléments h choisis de sorte que $Ih_i \to \mu$. On pourra aussi supposer que les h_i forment une suite croissante; autrement on n'aurait qu'à remplacer h_i par $\sup (h_1, \ldots, h_i)$. Alors, d'après le N° **5**, les h_i admettent une limite h^* avec $Ih^* = \mu$ et $h^* \leqq g$, quel que soit le majorant g. Soit d'autre part f un élément quelconque de l'ensemble f et posons $h'_i = \sup (h_i, f)$; alors la suite croissante h'_i, du même type que la suite h_i, admettra une limite h' avec $Ih' = \mu$. Or de $h_i \leqq h'_i$ et $f \leqq h'_i$ il s'ensuit immédiatement que $h^* \leqq h'$ et $f \leqq h'$. Donc $|h' - h^*| = Ih' - Ih^* = \mu - \mu = 0$ et par conséquent $h' = h^*$. En somme on a $f \leqq h^* \leqq g$ pour tout élément f et pour tout majorant g de l'ensemble $\{f\}$, c'est-à-dire que h^* fournit précisément $\sup \{f\}$ dont il fallait vérifier l'existence.

II. Carré et produit des éléments.

1. Voici comment on peut introduire le *carré* f^2 d'un élément f et le *produit* $fg = gf$ de deux éléments f et g.

On commence par fixer un élément positif, différent de zéro, que nous désignerons par **1** et qui jouira le rôle d'*unité*. En réalité nous le supprimerons presque toujours dans les formules, en écrivant par exemple $2\lambda f - \lambda^2$ au lieu de $2\lambda f - \lambda^2 \mathbf{1}$.

Nous définissons f^2 par

(7) $$f^2 = \sup(2\lambda f - \lambda^2)$$

où λ varie de $-\infty$ à ∞. Bien entendu on suppose que le second membre ait un sens et s'il en est ainsi on dira que f est *quarrable.* Tel est le cas entre autres lorsque f est *borné* par rapport à l'unité, c'est que $|f| \leqq \alpha = \alpha 1$; en effet, dans cette hypothèse,

$$2\lambda f - \lambda^2 \leqq 2|\lambda|\alpha - \lambda^2 \leqq \alpha^2$$

pour toute valeur de λ, ce qui assure l'existence du second membre de (7).

Observons encore que pour f positif, la relation évidente

$$-2\lambda f - \lambda^2 \leqq 2\lambda f - \lambda^2 \qquad (\lambda \geqq 0)$$

permet de se borner, dans la définition qui précède, aux valeurs positives du paramètre λ. Il s'ensuit que *si* $0 \leqq f \leqq g$ *et que* g *est quarrable il en est de même pour* f *et que* $f^2 \leqq g^2$.

Nous allons établir successivement les règles de calcul concernant le carré et le produit des éléments quarrables.

2. *L'élément* f *est quarrable s'il en est ainsi pour son module* $|f|$ *et réciproquement, de plus*

(8) $$f^2 = |f|^2.$$

En effet, on a évidemment

$$f^2 = \sup(2\lambda f - \lambda^2) = \sup[\sup(2\lambda f - \lambda^2, -2\lambda f - \lambda^2)] =$$
$$= \sup[\sup(2|\lambda| f - |\lambda|^2, -2|\lambda| f - |\lambda|^2)] = \sup(2|\lambda|\,|f| - |\lambda|^2) = |f|^2.$$

3. *On a*

(9) $$(\alpha f)^2 = \alpha^2 f^2.$$

Cela vient de la formule

$$2\lambda\alpha f - \lambda^2 = \alpha^2(2\mu f - \mu^2)$$

où l'on a posé $\lambda = \alpha\mu$ et où μ parcourt toutes les valeurs réelles en même temps que λ.

4. *On a*

(10) $$(\alpha f + \beta g)^2 + (\beta f - \alpha g)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(f^2 + g^2)$$

et en particulier

(11) $$(f+g)^2 + (f-g)^2 = 2f^2 + 2g^2.$$

Pour le voir, observons d'abord que le cas général se ramène, en vertu de la formule (9), au cas où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Cela étant, notre assertion ressort de l'identité

$$[2\lambda(\alpha f+\beta g)-\lambda^2]+[2\mu(\beta f-\alpha g)-\mu^2]=[2\lambda' f-\lambda'^2]+[2\mu' g-\mu'^2]$$
où nous avons posé $\lambda'=\alpha\lambda+\beta\mu$, $\mu'=\beta\lambda-\alpha\mu$.

En effet, λ' et μ' parcourent indépendamment toutes les valeurs réelles en même temps que le font λ et μ et pour obtenir (10) on n'aura qu'à passer des termes entre crochets à leur plus petits majorants.

Notre raisonnement implique que, avec f^2 et g^2, le carré $(\alpha f+\beta g)^2$ existe également ou en d'autres termes, que *les éléments quarrables forment une variété linéaire.*

5. En définissant le produit $fg=gf$ par la formule

$$(f+g)^2=f^2+2fg+g^2, \tag{12}$$

il ressort de (11) que l'on a aussi

$$(f-g)^2=f^2-2fg+g^2 \tag{13}$$

et par conséquent

$$f(-g)=-fg. \tag{14}$$

De plus en remplaçant, dans (10), α par 1 et g par βg et en rappelant la formule (9), on obtient

$$(f+\beta^2 g)^2+\beta^2(f-g)^2=(1+\beta^2)(f^2+\beta^2 g^2)$$

et selon (13) il en ressort que

$$(f+\beta^2 g)^2=f^2+2\beta^2 fg+\beta^4 g^2.$$

En remplaçant g par $-g$ et en appliquant (14), on obtient

$$(f-\beta^2 g)^2=f^2-2\beta^2 fg+\beta^4 g^2$$

et enfin, en écrivant α au lieu de $\pm\beta^2$, les deux dernières formules *se réunissent sous la forme*

$$(f+\alpha g)^2=f^2+2\alpha fg+\alpha^2 g^2 \tag{15}$$

où α désigne un nombre réel quelconque.

6. La formule (15) fournit immédiatement

$$f(\alpha g)=\alpha(fg). \tag{16}$$

De plus en remplaçant, dans la formule (11), f par $f+\frac{1}{2}h$ et g par $g+\frac{1}{2}h$ et en rappelant les formules (12) et (13), on obtient

$$(f+g)h=fh+gh.^{12)} \tag{17}$$

---

12) *Cf.* P. Jordan and J. v. Neumann, On inner products in linear metric spaces, *Annals of Math.*, 36 (1936), pp. 719—723.

7. *On a*

$$ff=f^2;\ 0^2=0;\ f0=0; \tag{18}$$

$$f1=f. \tag{19}$$

Les relations (18) viennent presque immédiatement des définitions ou encore des formules (9) et (15), en remplaçant g dans cette dernière respectivement par f et par 0.

La relation (19) ressort de l'identité

$$2\lambda(f+1)-\lambda^2=2\mu f-\mu^2+2f+1$$

où l'on a posé $\lambda=\mu+1$. En effet, en passant dans les deux membres au plus petits majorants, on obtient

$$(f+1)^2=f^2+2f+1. \tag{20}$$

En y posant d'abord $f=0$, on apprend que

$$1^2=1; \tag{21}$$

puis la formule (19) s'ensuit en comparant (20) et (21) avec (12).

8. *Lorsque* $f\geqq 0$, $g\geqq 0$, *on a aussi*

$$fg\geqq 0.$$

Pour le voir, observons d'abord que dans l'hypothèse faite on a $f-g\leqq f+g$, $-f+g\leqq f+g$ et par conséquent $|f-g|\leqq f+g$. De là

$$(f-g)^2=|f-g|^2\leqq(f+g)^2$$

et la relation à vérifier s'ensuit immédiatement.

9. *L'hypothèse* $|f_1|\leqq f$, $|g_1|\leqq g$ *entraîne*

$$|f_1g_1|\leqq fg. \tag{22}$$

En effet

$$f_1g_1=fg-\frac{1}{2}(f-f_1)(g+g_1)-\frac{1}{2}(f+f_1)(g-g_1)$$

et par l'hypothèse faite $f\pm f_1\geqq 0$, $g\pm g_1\geqq 0$; donc selon ce qui précède,

$$(f\mp f_1)(g\pm g_1)\geqq 0;$$

par conséquent $f_1g_1\leqq fg$. Enfin, en remplaçant f_1 par $-f_1$, on obtient $-f_1g_1\leqq fg$ et les deux dernières inégalités se réunissent sous la forme (22).

III. Norme quadratique et produit scalaire; l'espace H.

1. Outre la norme $|f| = I|f|$ envisagée jusqu'à présent que nous appellerons dans la suite, pour distinguer, la *norme linéaire* de f, introduisons pour les f quarrables, la *norme quadratique*

$$\|f\| = [I(f^2)]^{1/2}.$$

D'après (8) on a évidemment $\||f|\| = \|f\|$.

Nous envisageons aussi le *produit scalaire*

$$(f, g) = (g, f) = I(fg),$$

se réduisant à $\|f\|^2$ pour $f = g$.

D'après (15), l'expression

$$\|f + \alpha g\|^2 = \|f\|^2 + 2\alpha(f, g) + \alpha^2\|g\|^2$$

est une forme quadratique positive de la variable α; il s'ensuit que

(23) $$|(f, g)| \leqq \|f\|\,\|g\|.$$

On en déduit aussi, par un raisonnement bien connu, l'inégalité

(24) $$\|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|.$$

2. Lorsque $f \geqq 0$, $g \geqq 0$, on a aussi, d'après **I, 8,**

(25) $$(f, g) \geqq 0.$$

Inversement, la relation (25), *supposée remplie pour tout* $g \geqq 0$, *entraîne* $f \geqq 0$.

Pour le voir, posons $g = |f| - f$; alors notre hypothèse donne

$$I(f|f| - f^2) = (f, g) \geqq 0$$

d'où, d'après (8),

$$I(|f| - f)^2 = I(2f^2 - 2f|f|) \leqq 0;$$

par conséquent $I(|f| - f)^2 = 0$ et $f = |f|$.

3. Soit $f \geqq 0$ et en écrivant $f^{(\nu)} = \inf(f, \nu)$, supposons que $\|f^{(\nu)}\| \leqq A$ pour toute valeur entière positive de ν. Je dis que, *dans cette hypothèse, f est quarrable et $\|f\| \leqq A$.*

En effet, il ressort de l'hypothèse faite que, pour $\nu \to \infty$, les $f^{(\nu)2}$ tendent en croissant vers une limite

$$g = \sup(f^{(\nu)2}),$$

avec $Ig \leqq A^2$.

D'autre part, les $f^{(\nu)}$ eux-mêmes convergent vers f, c'est-à-dire que $|f - f^{(\nu)}| \to 0$. Cela s'ensuit de l'inégalité

$$f = \frac{1}{4\nu} f^2 + \nu - \frac{1}{4\nu}(f - 2\nu)^2 \leqq \frac{1}{4\nu} f^2 + \nu \quad (\nu > 0),$$

dont on conclut que

$$\sup(f, \nu) \leqq \frac{1}{4\nu} f^2 + \nu$$

et alors, d'après (1),

$$0 \leqq f - f^{(\nu)} = \sup(f, \nu) - \nu \leqq \frac{1}{4\nu} f^2,$$

ce qui donne $f^{(\nu)} \to f$.

Enfin

$$2\lambda f^{(\nu)} - \lambda^2 \leqq f^{(\nu)2} \leqq g$$

et pour $\nu \to \infty$ il s'ensuit, d'après ce qui précède, que

$$2\lambda f - \lambda^2 \leqq g;$$

par conséquent f est quarrable et $f^2 \leqq g$, donc aussi $If^2 \leqq Ig \leqq A^2$ ce qu'il fallait démontrer.

4. *Supposons que $f_n \to f$, c'est-à-dire que $|f - f_n| \to 0$ et que $\|f_n\| \leqq A$ pour tous les n; alors f est quarrable et $\|f\| \leqq A$.*

Pour le voir, observons tout d'abord qu'on ne restreint pas la généralité en supposant que $f \geqq 0$, $f_n \geqq 0$. En effet, $\|f\|$ et $\|f_n\|$ ne sont pas changés quand on remplace f et f_n par leurs modules; de plus, grâce à l'inégalité (6), l'hypothèse $f_n \to f$ entraîne $|f_n| \to |f|$.

Supposons donc que $f \geqq 0$ et $f_n \geqq 0$ et posons comme tout à l'heure,

$$f^{(\nu)} = \inf(f, \nu), \; f_n^{(\nu)} = \inf(f_n, \nu).$$

Avec ces notations on a, d'après **II, 9** et la formule (19),

$$|f^{(\nu)2} - f_n^{(\nu)2}| = |(f^{(\nu)} + f_n^{(\nu)})(f^{(\nu)} - f_n^{(\nu)})| \leqq 2\nu |f^{(\nu)} - f_n^{(\nu)}|,$$

donc

$$f_n^{(\nu)2} \to f^{(\nu)2}; \quad A \geqq \|f_n\| \geqq \|f_n^{(\nu)}\| \to \|f^{(\nu)}\|$$

et par conséquent $\|f^{(\nu)}\| \leqq A$. De là notre assertion s'ensuit selon le N° précédent.

5. Envisageons enfin une suite d'éléments quarrables f_n tels que

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

Nous allons montrer qu'*il existe un f quarrable de sorte que*

$$\|f - f_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Quant à f, celui-ci n'est que la limite des f_n au sens $|f-f_n|\to 0$. En effet, d'après (23),

$$|f_n-f_m|=(|f_n-f_m|, 1)\leqq \|f_n-f_m\|\,\|1\|\to 0$$

et cela, avec notre hypothèse 3⁰, assure la convergence des f_n vers une limite f.

Cela étant, soit ε une quantité positive arbitrairement petite et choisissons m suffisamment grand pour que

$$\|f_n-f_m\|\leqq \varepsilon \tag{26}$$

pour tout $n>m$; alors on aura d'après (24)

$$\|f_n\|\leqq \|f_m\|+\|f_n-f_m\|\leqq \|f_m\|+\varepsilon$$

et par conséquent, d'après le N° précédent, l'élément f est quarrable. De plus comme, pour $n\to\infty$, $f_n-f_m\to f-f_m$, on conclut de (26) par les mêmes raisons

$$\|f-f_m\|\leqq \varepsilon$$

et enfin

$$\|f-f_m\|\to 0 \qquad (m\to\infty),$$

ce qu'il fallait démontrer.

6. En résumé, l'ensemble des éléments quarrables, par rapport à une unité fixée, de l'espace (L) et pour lesquels on définit la distance de f et g par la norme quadratique $\|f-g\|$ ou, ce qui revient au même, le produit scalaire par $(f,g)=I(fg)$, jouit de toutes les propriétés caractéristiques de l'*espace réel de* HILBERT sauf d'une seule; c'est que sa dimension n'est limitée dans aucune direction. Autrement dit, ces éléments forment un *espace euclidien* H à un nombre fini ou à une infinité de dimensions, séparable ou non.

IV. Quelques lemmes.

1. Pour distinguer, convenons d'appeler *convergence en norme quadratique,* brièvement convergence (q) celle qui s'exprime par la relation

$$\|f-f_n\|\to 0$$

comme nous venons de l'envisager et *convergence en norme linéaire* ou convergence (l) celle définie par la relation

$$|f-f_n|\to 0.$$

Un troisième type de convergence dont nous aurons à nous servir, la *convergence faible,* se définit par la relation

$$(f_n, g) \to (f, g),$$

supposée remplie pour tout élément g de l'espace H.

La convergence (q) *implique la convergence* (l) *et aussi la convergence faible;* cela s'ensuit immédiatement de l'inégalité (23).

2. Dans ce qui suit, nous aurons à nous servir de quelques lemmes que nous allons établir. Le premier est bien connu pour l'espace de HILBERT et, à plus forte raison, pour les espaces à dimension finie; le second est compris en substance dans un théorème de MM. BANACH et SAKS[13]); cependant, au lieu de nous reporter à ce dernier, nous préférons de donner une démonstration indépendante.

Lemme 1. *Étant donnée une suite f_n bornée en norme quadratique, $\|f_n\| \leqq A$, on en peut extraire une suite partielle qui converge faiblement.*

Pour le voir, il suffit d'observer que ce fait est bien connu pour l'espace de HILBERT, y inclus les espaces à dimension finie, et que d'autre part, les f_n déterminent un tel espace H_0, qui n'est que le plus petit sous-espace de H qui les comprend. Donc il existe une suite partielle f_{n_k} de sorte que l'on ait

$$(f_{n_k}, g) \to (f, g) \tag{27}$$

pour un certain f appartenant à H_0 et pour tous les g dans H_0. Or il est évident que (27) est vrai aussi pour tous les g dans H qui sont orthogonaux à H_0. Comme enfin on sait que chaque élément de H est la somme de deux composants, l'un dans H_0 et l'autre orthogonal à H_0, la relation (27) est valable pour tout g dans H.

3. Lemme 2. *Lorsque la suite f_n converge faiblement vers l'élément f, ce dernier peut être approché indéfiniment, au sens de la convergence* (q), *par des moyennes arithmétiques du type général des éléments f_n, c'est-à-dire par des combinaisons linéaires*

$$g = \sum_r^s c_k f_k,$$

formées avec des $c_k \geqq 0$, de somme 1. De plus les indices r peuvent être choisis aussi élevés qu'on voudra[14]).

---

[13]) S. BANACH et S. SAKS, Sur la convergence forte dans les espaces L^p, *Studia Math.*, 2 (1930), pp. 51—57.

[14]) Dans la démonstration du théorème 1, ce lemme peut être remplacé par l'énoncé correspondant moins précis, d'ailleurs bien connu pour l'espace de HILBERT, dans lequel rien n'est exigé des coefficients c_k.

En effet, on peut tout d'abord, sans restreindre la généralité, se borner au cas où $r=1$; autrement on n'aurait qu'à envisager la suite $f_r, f_{r+1}, \dots$

Cela étant, soit G l'ensemble des éléments g du type envisagé et soit $\overline{G}$ sa fermeture au sens de la norme quadratique. Ce qu'il faut montrer, c'est que f appartient à cette fermeture $\overline{G}$. Or on sait qu'il existe dans $\overline{G}$ un élément $g=g^*$ qui rend minimum la distance $\|f-g\|$ de f et des éléments de $\overline{G}$.[15]) Je dis que $f=g^*$. Pour le montrer, observons que les éléments f_n, donc aussi les éléments

$$g^*+\lambda(f_n-g^*)=(1-\lambda)g^*+\lambda f_n \qquad (0\leqq\lambda\leqq 1)$$

appartiennent à l'ensemble convexe $\overline{G}$. Par conséquent on a, pour $0\leqq\lambda\leqq 1$,

$$\|f-g^*-\lambda(f_n-g^*)\|\geqq\|f-g^*\|$$

et en développant les carrés des deux membres on obtient

$$-2\lambda(f-g^*, f_n-g^*)+\lambda^2\|f_n-g^*\|^2\geqq 0.$$

De là, en divisant par 2λ et en posant $\lambda=0$, il s'ensuit que

$$(f-g^*, f_n-g^*)\leqq 0$$

et enfin, en vertu de la convergence faible des f_n vers f,

$$\|f-g^*\|^2=(f-g^*, f-g^*)\leqq 0,$$

donc $\|f-g^*\|=0$, ce qui achève la démonstration.

4. Lemme 3. *Lorsque la suite f_n converge faiblement vers f et que $f_n\geqq 0$, on a aussi $f\geqq 0$.*

En effet, dans l'hypothèse faite on a, d'après (25), pour tous les $g\geqq 0$,

$$(f_n, g)\geqq 0$$

et par conséquent

$$(f, g)=\lim(f_n, g)\geqq 0$$

ce qui, d'après **III, 2,** entraîne que $f\geqq 0$.

V. Les théorèmes.

1. Après ces préparatifs nous allons démontrer les deux théorèmes ergodiques que nous avons en vue. Quoique le premier ne soit qu'un cas particulier du second, nous préférons de nous en occuper d'abord séparément.

---

[15]) *Cf.* l. c. [5]), en particulier p. 5 en bas.

Théorème 1. *Soit donnée, dans l'espace abstrait* (L), *une transformation linéaire* T *pour laquelle* $M_T \leqq 1$, *c'est que* $|Tf| \leqq |f|$ *pour tous les* f,[16]) *et supposons que pour un certain élément* f_1, *cet élément et tous ses itérés* $f_n = T^{n-1} f_1$ *ou plus généralement, que les moyennes arithmétiques*

$$\varphi_n = \frac{1}{n} \sum_1^n f_k$$

restent inférieures en module à un élément fixe[17]).

Dans ces conditions, les moyennes arithmétiques

$$\varphi_{m,n} = \frac{1}{n-m} \sum_{m+1}^{n} f_k$$

convergent en norme linéaire, pour $n - m \to \infty$, *vers un élément déterminé* φ, *invariant par rapport à la transformation* T.

Pour le voir, on construit l'espace H en convenant de choisir pour $\mathbf{1}$ l'élément fixe qui figure dans notre théorème; alors on aura évidemment $\|\varphi_n\| \leqq |\mathbf{1}|^{1/2}$. Par conséquent, grâce au lemme 1 du Chapitre précédent, la suite φ_n donne lieu à une suite partielle qui converge faiblement vers un élément φ. D'après le lemme 2, φ peut être approché indéfiniment, au sens de la convergence en norme quadratique, par des éléments g du type

$$g = \sum_r^s c_k \varphi_k \qquad (c_k \geqq 0, \ \sum c_k = 1), \tag{28}$$

avec r aussi grand qu'on voudra. A plus forte raison, lá suite des g et alors celle des transformés Tg converge vers φ aussi en norme linéaire. Or l'équation

$$\varphi_n - T\varphi_n = \frac{1}{n}(f_1 - f_{n+1})$$

donne

$$|g - Tg| = \left| \sum_r^s \frac{c_k}{k}(f_1 - f_{k+1}) \right| \leqq \frac{2}{r} |f_1| \to 0$$

pour $r \to \infty$. De là on conclut que les limites respectives φ et $T\varphi$ de g et Tg coïncident, c'est-à-dire que φ est invariant par rapport à la transformation T. De plus, en introduisant au lieu des φ_n leurs

---

[16]) Observons que l'hypothèse $M_T \leqq 1$ n'intervient que pour assurer que la suite M_{T^n} reste bornée et que, par conséquent, on pourrait la remplacer, ici de même que dans l'énoncé du théorème 2, par cette dernière hypothèse.

[17]) Autrement dit la suite $|\varphi_n|$ admet un majorant ou encore la suite φ_n admet un majorant et un minorant.

expressions par les f_k, on obtient

$$g = \sum_1^s c'_k f_k \qquad (\sum c'_k = 1)$$

et par conséquent on pourra poser

$$\varphi - f_1 = \sum_2^s c'_k (f_k - f_1) + h = \sum_2^s c''_k (f_k - f_{k-1}) + h,$$

où $|h| \leqq \varepsilon$, avec ε arbitrairement petit. De là, en appliquant aux deux membres successivement les transformations $T^m, \ldots, T^{n-1}$ et en formant les moyennes arithmétiques, on obtient

$$\varphi - \varphi_{m,n} = \frac{1}{n-m} \sum_{k=2}^{s} c''_k (f_{k+n-1} - f_{k+m-1}) + \frac{1}{n-m} \sum_{m}^{n-1} T^k h,$$

et il s'ensuit que

$$|\varphi - \varphi_{m,n}| \leqq \frac{2C}{n-m} |f_1| + \varepsilon \qquad \left(C = \sum_2^s |c''_k|\right)$$

et que de cette sorte

$$|\varphi - \varphi_{m,n}| \leqq 2\varepsilon$$

pour $n - m$ suffisamment grand, ce qu'il fallait prouver.

2. Avant de formuler le théorème 2, convenons de dire que la suite f_n est *presque bornée* lorsqu'il y a un élément $g \geqq 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir les constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ de sorte que l'on ait, pour tout n,

$$I \sup (f_n, -\alpha g) \leqq I f_n + \varepsilon, \quad I \inf (f_n, \beta g) \geqq I f_n - \varepsilon.$$

Évidemment, sans restreindre la généralité on pourrait aussi supposer que $\alpha = \beta$.[18])

Dans le cas de l'espace L^1, le fait supposé est équivalent à ce que les intégrales des fonctions $f_n(x)$ sont absolument continues uniformément dans leur ensemble.

Observons que, en même temps que la suite f_n, la suite des moyennes arithmétiques φ_n est aussi presque bornée, ce qui ressort des inégalités évidentes

$$\sup (\varphi_n, -\alpha g) \leqq \frac{1}{n} \sum_1^n \sup (f_k, -\alpha g);$$

$$\inf (\varphi_n, \beta g) \geqq \frac{1}{n} \sum_1^n \inf (f_k, \beta g).$$

---

[18]) On pourrait aussi faire entrer dans la définition les $|f_n|$ au lieu des f_n et remplacer les deux inégalités par une seule.

Cela étant, notre théorème 1 se généralise comme il suit.

Théorème 2. *Soit donnée, dans l'espace abstrait* (L), *une transformation linéaire* T *telle que* $M_T \leqq 1$ *et supposons qu'un certain élément* f_1 *et ses itérés* $f_n = T^{n-1} f_1$ *ou plus généralement, que les moyennes arithmétiques* φ_n *des* f_n *forment une suite presque bornée.*

Dans ces conditions, les moyennes arithmétiques $\varphi_{m,n}$ *convergent en norme linéaire, pour* $n - m \to \infty$, *vers un élément déterminé* φ, *invariant par rapport à la transformation* T.

La démonstration du théorème ne diffère de celle du théorème 1 qu'en un seul point. C'est que la construction de la limite φ et son approximation par des éléments g du type (28) exige des considérations plus laborieuses. Mais à partir de ce point, la démonstration s'achève exactement comme celle du théorème 1 et on n'a pas besoin de la répéter.

Pour établir le point en question, choisissons pour unité 1 l'élément g par rapport auquel les φ_n sont presque bornés et envisageons la suite des $\varphi_{n;\alpha,\beta}$, définis par

$$\varphi_{n;\alpha,\beta} = \sup(\varphi_n, -\alpha) + \inf(\varphi_n, \beta) - \varphi_n, \tag{29}$$

avec $\alpha, \beta \geqq 0$ donnés. En se servant de l'identité (1), on obtient immédiatement que

$$\varphi_{n;\alpha,\beta} = -\alpha + \inf(\varphi_n, \beta) - \inf(\varphi_n, -\alpha) \geqq -\alpha$$

et de même

$$\varphi_{n;\alpha,\beta} \leqq \beta.$$

Il s'ensuit évidemment que la suite est aussi bornée en norme quadratique et que par conséquent, grâce au lemme 1, elle admet une suite partielle qui converge faiblement vers un élément $\varphi^{(\alpha,\beta)}$. Enfin, en faisant varier α et β et en se servant du procédé diagonal bien connu, on arrive à une suite n_k telle que les suites $\varphi_{n_k;\alpha,\beta}$ convergent faiblement, pour $k \to \infty$, vers des limites respectives $\varphi^{(\alpha,\beta)}$ quels que soient les entiers α, β.

Pour passer des $\varphi^{(\alpha,\beta)}$ à l'élément φ qui figure dans notre théorème, observons tout d'abord que la formule (29) par laquelle nous venons de définir les éléments $\varphi_{n;\alpha,\beta}$, montre nettement que $\varphi_{n;\alpha,\beta}$ croît avec α décroissant et aussi avec β croissant. Grâce au lemme 3, ce fait subsiste pour $\varphi^{(\alpha,\beta)}$. Pour aller plus loin, il nous faut envisager la valeur $I\varphi^{(\alpha,\beta)}$. Nous allons montrer qu'elle est comprise entre deux bornes ne dépendant ni de α ni de β.

Nous commençons par calculer de telles bornes pour les valeurs $I\varphi_{n;\alpha,\beta}$, bornes qui seront indépendantes aussi de l'indice n.

Comme, par hypothèse, la suite φ_n est presque bornée par rapport à $g=1$, on peut choisir $\alpha_0>0$ et $\beta_0>0$ de sorte que les différences $I(\sup(\varphi_n, -\alpha_0))-I\varphi_n$ et $I\varphi_n-I(\inf(\varphi_n, \beta_0))$ soient inférieures à l'unité. D'autre part, la formule (29) fournit immédiatement

$$\varphi_{n;\alpha,\beta}=\varphi_{n;\alpha,\beta_0}+\inf(\varphi_n, \beta)-\inf(\varphi_n, \beta_0)\leqq\beta_0+\varphi_n-\inf(\varphi_n, \beta_0)$$

et de là il ressort que

$$I\varphi_{n;\alpha,\beta}\leqq\beta_0|1|+1.$$

Un calcul analogue donne

$$I\varphi_{n;\alpha,\beta}\geqq-\alpha_0|1|-1.$$

C'est-à-dire que $I\varphi_{n;\alpha,\beta}$ est compris entre les deux bornes indiquées, ne dépendant ni de α, ni de β, ni de n. Enfin, comme

$$I\varphi_{n;\alpha,\beta}=(\varphi_{n;\alpha,\beta}, 1)\to(\varphi^{(\alpha,\beta)}, 1)=I\varphi^{(\alpha,\beta)}$$

à cause de la convergence faible, la quantité $I\varphi^{(\alpha,\beta)}$ sera comprise entre les mêmes bornes et cela pour tous les α et β.

Cela établi, pour passer à φ, on n'a qu'à fixer d'abord α, faire β aller à l'infini et envisager la suite croissante $\varphi^{(\alpha,\beta)}$. D'après **I, 5,** cette suite converge en norme linéaire vers un élément $\varphi^{(\alpha)}=\sup\limits_{\beta}\{\varphi^{(\alpha,\beta)}\}$. Les valeurs $I\varphi^{(\alpha)}$, limites de $I\varphi^{(\alpha,\beta)}$, restent aussi entre les bornes indiquées et par conséquent $\varphi^{(\alpha)}$ qui va en décroissant, converge en norme linéaire, pour α infini, vers une limite φ.

Il nous reste d'approcher cette limite φ par des éléments g du type (28). Dans ce but, après avoir donné $\varepsilon>0$, choisissons α et β de sorte que l'on ait à la fois

$$(30)\qquad I\varphi^{(\alpha)}-I\varphi\leqq\frac{\varepsilon}{5};\quad I\varphi^{(\alpha)}-I\varphi^{(\alpha,\beta)}\leqq\frac{\varepsilon}{5}$$

et

$$I(\sup(\varphi_n, -\alpha))-I\varphi_n\leqq\frac{\varepsilon}{5};\quad I\varphi_n-I(\inf(\varphi_n, \beta))\leqq\frac{\varepsilon}{5},$$

donc aussi

$$(31)\qquad |\varphi_n-\varphi_{n;\alpha,\beta}|=|\varphi_n-\sup(\varphi_n, -\alpha)+\varphi_n-\inf(\varphi_n, \beta)|\leqq\frac{2\varepsilon}{5}$$

et cela pour tous les n. Enfin, la suite $\varphi_{n_k;\alpha,\beta}$ convergeant faiblement vers $\varphi^{(\alpha,\beta)}$, il existe, d'après le lemme 2, des combinaisons linéaires

$$g = \sum_{r}^{s'} c_n \varphi_{n;\,\alpha,\beta} \tag{32}$$

avec $c_n \geqq 0$, $\Sigma c_n = 1$ et r arbitrairement élevé, de sorte que

$$|\varphi^{(\alpha,\beta)} - g| \leqq \frac{\varepsilon}{5}. \tag{33}$$

En combinant les formules (30)—(33) on obtient que

$$\left|\varphi - \sum_{r}^{s} c_n \varphi_n\right| \leqq \varepsilon$$

et c'est précisément le point qu'il nous restait d'établir. A partir de là, comme nous l'avons déjà dit, la démonstration s'achève mot à mot comme celle du théorème 1.

(Reçu le 27 mai 1940)

Correction. Page 16, ligne 13 de bas, *au lieu de* converge vers φ *lire* convergent respectivement vers φ et $T\varphi$.