Sur les groupes transitifs de la droite.

Par B. DE KERÉKJÁRTÓ à Budapest.

A M. L. E. J. Brouwer
en témoignage de haute estime.

Introduction.

Un groupe G de transformations topologiques d'une variété V en elle-même est appelé *n-uplement transitif* sur V, si à deux systèmes quelconques de n points de $V: (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ et $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ correspond une transformation T du groupe G et une seule qui change le premier système en le second (de telle manière qu'à A_ν correspond le point image A'_ν). Le groupe n-uplement transitif G est dit *continu* si la transformation T varie continuement avec le système $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$.

Dans le § 1 du présent mémoire je démontre que *tout groupe simplement transitif de la droite, de même que tout groupe n-uplement transitif de la droite, en tant qu'un tel groupe existe, est continu.* Cependant la droite n'admet que des groupes simplement ou doublement transitifs, et la droite projective des groupes simplement ou triplement transitifs.

M. BROUWER a démontré dans ses travaux importants sur les groupes continus[1]) que *les groupes continus simplement, doublement et triplement transitifs de la droite sont homéomorphes respectivement aux groupes suivants: groupe des translations, groupe des similitudes et groupe des homographies de la droite.*

Dans le § 2 je reproduis la démonstration de M. BROUWER de la caractérisation du groupe simplement transitif. Concernant

[1]) L. E. J. BROUWER, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von LIE, I., *Math. Annalen,* 67 (1909), p. 246—267.

les groupes doublement ou triplement transitifs, M. BROUWER a démontré que les transformations de ces groupes s'expriment par des fonctions dérivables du paramètre canonique d'un sous-groupe d'ordre 1 y contenu. Par la solution des équations différentielles respectives, il a obtenu la caractérisation de ces groupes.

Dans les §§ **3, 4** de ce mémoire je donne des démonstrations nouvelles et élémentaires des théorèmes de M. BROUWER en utilisant des méthodes qui, dans un mémoire antérieur[2]), m'ont permis de caractériser topologiquement le groupe homographique de la sphère.

§ 1. La continuité des groupes transitifs de la droite.

1. 1. *Tout groupe simplement transitif de transformations topologiques de la droite en elle-même est continu.*

Aucune transformation du groupe n'admet un point invariant, sauf l'identité; par suite, toute transformation du groupe conserve le sens de la droite.

Conformément à un sens positif de la droite, nous associons à tout couple de points distincts A, B la relation $A < B$ ou $B < A$, suivant que le segment AB est de sens positif ou négatif.

Soit T une transformation du groupe. Si pour un point A, la relation $A < T(A)$ est valable, on a, pour tout point B, la relation $B < T(B)$; car autrement le segment AB serait transformé par T en une partie de lui-même, et la transformation T aurait donc un point invariant sur le segment AB.

Si pour deux points quelconques A et B la relation $A < B$ est valable, on a, pour toute transformation T du groupe, la relation $T(A) < T(B)$; cette proposition est une conséquence immédiate du fait que T conserve le sens de la droite.

Soit O un point quelconque, et soit $A_1, A_2, \ldots$ une suite monotone de points convergeant vers un point A; supposons, pour fixer les idées, que $A_1 < A_2 < \ldots < A$. Désignons par T et par T_ν les transformations du groupe qui changent le point O en A et en A_ν respectivement. Nous allons démontrer que la suite des transformations $T_1, T_2, \ldots$ converge vers T.

---

[2]) B. DE KERÉKJÁRTÓ, Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère. A paraître dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

Soit Q un point quelconque différent de O; désignons par $B = T(Q)$ et $B_\nu = T_\nu(Q)$ ses images obtenues par T et par T_ν. De la relation $A_\nu < A_{\nu+1}$, on conclut que $B_\nu < B_{\nu+1}$; en effet la transformation $T_\nu^{-1} T_{\nu+1}$ du groupe transforme A_ν en $A_{\nu+1}$ et B_ν en $B_{\nu+1}$. D'une façon similaire on obtient la relation $B_\nu < B$ valable pour tout ν.

Si la suite des points $B_1, B_2, \ldots$ ne converge pas vers B, désignons par B' la limite de cette suite monotone et bornée; on a la relation $B' < B$. Soit T' la transformation du groupe qui change le point Q en B'; désignons par $A' = T'(O)$ l'image du point O obtenue par T'. Des relations $B' < B$ et $B_\nu < B'$ on déduit les relations $A' < A$ et $A_\nu < A'$. On aurait donc, pour tout ν, la relation $A_\nu < A' < A$; c'est en contradiction avec notre hypothèse: $A = \lim A_\nu$.

Nous avons ainsi démontré que, pour tout point Q, la suite des points $T_\nu(Q)$ converge vers le point $T(Q)$. Il résulte des théorèmes connus de la théorie des fonctions monotones que les transformations T_ν convergent uniformément vers la transformation T, c'est-à-dire que, dans une métrique bornée de la droite, à toute quantité positive ε correspond un indice ν_0 tel que, pour tout $\nu > \nu_0$, les transformations T_ν et T diffèrent de moins de ε.

1. 2. *Tout groupe doublement transitif de transformations topologiques de la droite en elle-même est continu.*

Il faut montrer qu'à un couple quelconque de points A, B et à tout nombre positif ε correspond un nombre positif δ tel que toute transformation du groupe donné G qui déplace chacun des points A, B de distances inférieures à δ diffère de l'identité de moins de ε.

Les transformations du groupe G qui laissent invariant le point A et conservent le sens de la droite forment un sous-groupe g_A de G lequel est *simplement transitif* sur la demi-droite AB. En vertu de la proposition 1. 1, on peut déterminer un nombre positif η tel que toute transformation de g_A qui déplace B de moins de η diffère de l'identité de moins de $\varepsilon/2$; il est évident que $\eta < \varepsilon$. D'une façon similaire, on peut déterminer un nombre positif δ $(< \eta/2)$ tel que toute transformation de G qui laisse B invariant et déplace A de distance inférieure à δ diffère de l'identité de moins de $\eta/2$.

Ceci posé, soient A' et B' deux points arbitraires tels que les distances (A, A') et (B, B') soient inférieures à δ. Désignons par T_1 la transformation de G qui laisse B invariant et change A en A'; comme $(A, A') < \delta$, il résulte de nos conditions que la transformation T_1 diffère de l'identité de moins de $\eta/2$. Soit $B'' = T_1^{-1}(B')$; la distance (B', B'') est plus petite que $\eta/2$, et $(B, B') < \delta < \eta/2$, d'où $(B, B'') < \eta$. Il en résulte que la transformation T_2 de G qui laisse le point A invariant et change B en B'' diffère de l'identité de moins de $\varepsilon/2$. Le produit $T_2 T_1$ des transformations T_2 et T_1 change le point A en A' et B en B'; elle diffère de l'identité de moins de $(\eta+\varepsilon)/2 < \varepsilon$.

1. 3. *Il n'y a aucun groupe n-uplement transitif de transformations topologiques de la droite en elle-même, pour $n > 2$.*

Les transformations d'un groupe n-uplement transitif, pour $n > 2$, qui admettent deux points invariants A et B formeraient un sous-groupe qui serait encore transitif sur la droite privée des points A et B. Mais cela est impossible parce que toute transformation topologique de la droite en elle-même qui laisse invariants les points A et B change les points intérieurs au segment AB entre eux.

Concernant la *droite projective* (qui est homéomorphe à un cercle) on déduit par des raisonnements analogues les propositions suivantes:

1. 4. *Tout groupe simplement ou triplement transitif de transformations topologiques de la droite projective en elle-même est continu.*

1. 5. *Il n'y a aucun groupe n-uplement transitif de transformations topologiques de la droite projective en elle-même, pour $n > 3$.*

Nous allons démontrer la proposition suivante:

1. 6. *Il n'y a aucun groupe doublement transitif de transformations topologiques de la droite projective en elle-même.*

Si G est un groupe doublement transitif de transformations topologiques de la droite projective en elle-même, l'identité est la seule transformation de G qui admet deux points invariants. Toute transformation de G conserve, par conséquent, le sens de la droite, parce qu'une transformation topologique de la droite projective changeant le sens en le sens opposé admet deux points invariants.

Soient A et B deux points quelconques; il y a dans le groupe G une transformation et une seule qui change le couple de points A, B en B, A ; désignons cette transformation par σ^{AB} Le carré de σ^{AB} est l'identité, parce qu'il admet deux points invariants, A et B ; la transformation σ^{AB} est donc *involutive.*

Soit C un point différent de A et de B et désignons par σ^{AC} la transformation involutive du groupe G qui échange les points A et C entre eux. Le produit $\tau = \sigma^{AB}\sigma^{AC}$ des transformations σ^{AB} et σ^{AC} change B en C et A en le point $B' = \sigma^{AC}(B)$. Les deux segments de la droite projective déterminés par les points A, C, lesquels nous désignerons par AC et par CA, sont échangés entre eux par la transformation σ^{AC} ; nous concluons de là que le couple de points A, C sépare les points B et B'. L'un des segments de la droite, projective déterminés par les points A, B contient donc les points B' et C ; désignons ce segment par AB. La transformation τ change le segment AB en le segment $B'C$ qui est une partie du segment AB ; il résulte que τ admet un point invariant sur le segment AB. Similairement l'inverse de τ change le segment CB' en le segment BA contenu dans l'intérieur de CB' ; la transformation τ admet, par suite, un point invariant sur le segment BA. La transformation τ admettant deux points invariants devrait être l'identité ; mais, d'autre part, τ change le point B en le point C différent de B. Nous sommes aboutis à une contradiction.

§ 2. Les groupes simplement transitifs de la droite.

Théorème. *Tout groupe simplement transitif de transformations topologiques de la droite en elle-même est homéomorphe au groupe des translations.*

La démonstration suivante est due à M. BROUWER ; nous la reproduisons ici en vue de comparaison avec la méthode du **§ 3.**

Soit O un point quelconque de la droite et soit T une transformation du groupe donné, différente de l'identité. Désignons par $A_1 = T(O)$, $A_2 = T^2(O), \ldots, A_n = T^n(O), \ldots$ les images successives de O obtenues par l'itération de T, et par $A_{-1} = T^{-1}(O)$, $A_{-2} = T^{-2}(O), \ldots$ les images de O obtenues par l'itération de l'inverse de T.

La transformation T n'admet aucun point invariant, elle conserve donc le sens de la droite ; par suite, les segments OA_1 et A_1A_2 ont même sens. Il en résulte que l'ordre des points A_n sur la droite est le même que l'ordre naturel des entiers n qui figurent dans leurs indices.

La suite des points $A_1, A_2, \ldots$ est divergente. Autrement le point-limite B de cette suite monotone serait un point invariant de la transformation T; ce serait une contradiction avec nos hypothèses.

Soit X un point variable du segment OA_1 et soit S la transformation du groupe qui change O en X; désignons par Y l'image de X obtenue par la même transformation S. Si X varie d'une façon continue et monotone à partir de O jusqu'à A_1, le point correspondant Y varie d'une façon continue et monotone à partir de O jusqu'à A_2. Il y a donc un point X et un seul du segment OA_1 pour lequel Y coïncide avec le point A_1. Nous désignons ce point par $A_{1/2}$, et la transformation qui change O en $A_{1/2}$ par $T^{1/2}$. D'une façon analogue, nous définissons successivement les points $A_{1/4}, A_{1/8}, \ldots$ et les transformations $T^{1/4}, T^{1/8}, \ldots$ leur correspondant.

La suite des points $A_{1/2}, A_{1/4}, \ldots$ converge vers O. En effet, si A est un point quelconque entre O et $A_{1/2^n}$, et si S est la transformation du groupe qui change O en A, le point $S(A)$ se trouve entre O et $T^{1/2^n}(A)$, et ce dernier point se trouve entre O et $T^{1/2^n}(A_{1/2^n}) = A_{1/2^{n-1}}$. Nous en concluons que, si A est la limite de la suite $A_{1/2^n}$, $S(A)$ est la limite de la suite $A_{1/2^{n-1}}$, d'où $S(A) = A$. De cette relation découle que S est l'identité, et $A = S(O) = O$.

Attribuons à l'élément $T^{p/2^n} = (T^{1/2^n})^p$ le paramètre $\xi = p/2^n$ et au point $T^{p/2^n}(O)$ la coordonnée $x = p/2^n$. L'ordre des coordonnées x est le même que l'ordre des points de la droite leur correspondant. Le produit des transformations de paramètres ξ et ξ' est la transformation qui correspond à la valeur $\xi + \xi'$ du paramètre. L'attribution du paramètre ξ et de la coordonnée x s'étend par continuité à tous les points de la droite. Avec ce système de coordonnée et de paramètre, toute transformation du groupe s'exprime par la formule: $x' = x + \xi$.

§ 3. Les groupes doublement transitifs de la droite.

Théorème. *Tout groupe doublement transitif de transformations topologiques de la droite en elle-même est homéomorphe au groupe des similitudes.*

Soit G un groupe doublement transitif de transformations topologiques de la droite en elle-même.

3. 1. *A un couple quelconque de points A, B correspond une transformation involutive du groupe donné G et une seule qui échange entre-eux les points A et B. Cette transformation admet un seul point invariant C, appartenant à l'intervalle AB.*

Il y a une transformation σ dans le groupe G et une seule qui transforme le couple A, B en le couple B, A. Le carré de σ admet deux points invariants, A et B, il est donc l'identité : $\sigma^2 = I$; σ est, par suite, involutive.

Si le point variable X décrit l'intervalle AB, l'image $X' = \sigma(X)$ de X obtenue par σ décrit le même intervalle dans le sens opposé. Il y a un point C et un seul, appartenant à l'intervalle AB, pour lequel $C = \sigma(C)$. Nous appelons *C milieu du segment AB*. Nous venons de montrer que *tout segment a un milieu et un seul.*

3. 2. *A tout point P de la droite correspond une transformation involutive de G et une seule admettant le point invariant P.*

Soit A, B un couple quelconque, soit $\bar{\sigma}$ la transformation involutive qui échange entre eux les points A et B, et soit C le point invariant de $\bar{\sigma}$ (voir 3. 1). Désignons par T une transformation du groupe G qui change le point C en P; la transformée de $\bar{\sigma}$ par T, c'est-à-dire la transformation $\sigma = T^{-1}\bar{\sigma}T$ est involutive et admet le point invariant $T(C) = P$. Il y a, par conséquent, au moins une transformation involutive dans G qui admet le point invariant P.

Si σ' était une autre transformation involutive de G qui admet le point invariant P, désignons par $B' = \sigma'(A)$ l'image d'un point arbitraire A obtenue par σ', et par $A' = \sigma(B')$ l'image de B' obtenue par σ. Soit T la transformation de G qui change A en A' et laisse B' invariant. La transformée de σ' par $T: \sigma'' = T^{-1}\sigma' T$ échange entre eux les points A' et B' de même que σ; il résulte de là que σ est identique à σ''. Par suite le point invariant $P' = T(P)$ de σ'' est identique à P. La transformation T admet deux points invariants B' et P, donc $T = I$, et $\sigma = \sigma'' = T^{-1}\sigma' T = \sigma'$.

Nous désignerons par σ_P la transformation involutive du groupe G dont P est le point invariant ; nous l'appellerons *symétrie* par rapport au point P.

3. 3. *Si une transformation T de G change les points A, B en A', B', elle change le milieu C du segment AB en le milieu C' du segment A'B'.*

Soit en effet σ_C la symétrie par rapport à C. Sa transformée

$T^{-1}\sigma_C T$ est la symétrie par rapport à $C' = T(C)$; elle échange entre eux les points A' et B'.

Désignons par O un point quelconque de la droite. Les transformations du groupe G qui laissent invariant le point O forment un sous-groupe que nous désignons par G_O. Les transformations de G_O qui conservent le sens de la droite forment un sous-groupe g_O de G_O qui est *simplement transitif* sur l'une quelconque des demi-droites déterminées par le point O. D'après le théorème démontré dans le § **2**, le groupe g_O est homéomorphe au groupe des translations $y' = y + y_0$; en introduisant un autre paramètre par les formules: $X = e^y$, $X_0 = e^{y_0}$, on peut exprimer g_O par la formule: $X' = XX_0$ $(X_0 > 0)$. On conclut de là, en particulier, que *le groupe g_O est commutatif.*

Par multiplication des éléments du groupe g_O par la symétrie σ_O, nous obtenons toutes les transformations de G_O n'appartenant pas à g_O. *Le groupe g_O est échangeable avec σ_O*, c'est-à-dire que $\sigma_O\mu = \mu\sigma_O$, pour tout élément μ de g_O. Soit en effet A un point quelconque, $A' = \sigma_O(A)$, $B = \mu(A)$, $B' = \mu(A')$. D'après 3. 3, O est le milieu du segment BB', d'où $\sigma_O(B) = B'$. Pour un point arbitraire A, on a donc les relations $\sigma_O\mu(A) = \mu\sigma_O(A)$. Nous avons ainsi démontré la proposition suivante:

3. 4. *Les transformations du groupe G qui laissent invariant le point O forment un sous-groupe commutatif G_O. Le groupe G_O est formé par le sous-groupe g_O de G_O, conservant le sens de la droite, et par le produit de g_O par la symétrie σ_O relative au point O.*

3. 5. *Le produit de deux symétries n'admet aucun point invariant.*

Soient en effet O et A deux points distincts quelconques; si le produit $\sigma_O\sigma_A$ des symétries σ_O et σ_A laisse le point P invariant, soit $P' = \sigma_O(P)$, on a donc $\sigma_A(P') = P$. Les points P et P' sont distincts. Comme σ_O et σ_A sont involutives, on a aussi $\sigma_O(P') = P$ et $\sigma_A(P) = P'$; par suite, le point P' est un autre point invariant de $\sigma_O\sigma_A$. Il en résulte que $\sigma_O\sigma_A$ est l'identité ce qui est une contradiction.

3. 6. *Soit $\tau = \sigma_O\sigma_A$ le produit de deux symétries. Les images successives P, $\tau(P)$, $\tau^2(P)$, ... d'un point quelconque P obtenues par les puissances de τ forment une suite divergente.*

La transformation τ sans point invariant conserve le sens de la droite; la suite P, $\tau(P)$, $\tau^2(P)$, ... est donc monotone. Si elle avait un point limite, celui serait un point invariant de τ.

3. 7. *A tout couple de points A, B correspond une transformation τ de G sans point invariant qui transforme A en B.*

Soit C le milieu du segment AB. La transformation $\tau = \sigma_A \sigma_C$ change A en B et n'admet pas de point invariant (3. 5).

Nous entendons par *chaîne* d'origine $O = A_0$, engendrée par le point A_1 la suite de points

$$A_1, A_2, \ldots$$

telle que, pour tout ν, A_ν soit le milieu du segment $A_{\nu-1}A_{\nu+1}$.

Soit $A_{-1} = \sigma_O(A_1)$ le symétrique de A_1 par rapport à O, et

$$A_{-1}, A_{-2}, \ldots$$

la chaîne d'origine O engendrée par le point A_{-1}.

3. 8. *La symétrie σ_O par rapport à O change le point A_n en A_{-n}.*

A_1 est le milieu du segment OA_2; d'après la proposition 3. 3 $\sigma_O(A_1) = A_{-1}$ est le milieu du segment limité par les points $\sigma_O(O) = O$ et $\sigma_O(A_2)$; il résulte de là que $\sigma_O(A_2) = A_{-2}$. Par une induction de n à $n+1$ on déduit que $\sigma_O(A_n) = A_{-n}$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Le même raisonnement fournit le résultat suivant:

3. 9. *La symétrie par rapport au point A_k change le point A_n en A_{2k-n}.*

3. 10. *Le produit de la symétrie par rapport à O et de la symétrie par rapport à A_k transforme donc le point A_n en A_{n+2k}.*

Entre les chaînes d'origine O et les transformations du groupe G_O admettant le point invariant O, la relation suivante est valable:

3. 11. *Si la transformation T du groupe G_O change le point A_1 en A_1', elle change le n-ième élément de la chaîne d'origine O, engendrée par A_1, en le n-ième élément de la chaîne d'origine O, engendrée par A_1' ($n = 1, 2, 3, \ldots$).*

Soient $A_1, A_2, \ldots$ et $A_1', A_2', \ldots$ les éléments des deux chaînes en question. D'après la proposition 3. 3, le point $A_1' = T(A_1)$ est le milieu du segment limité par les points $O = T(O)$ et $T(A_2)$; A_1' est aussi le milieu du segment OA_2'; il en résulte que $A_2' = T(A_2)$. Par une induction de n à $n+1$, on déduit similairement que $A_n' = T(A_n)$, pour tout n.

Nous introduisons sur la droite une *coordonnée* x de la façon suivante. Soient O et A_1 deux points quelconques, A_{-1} le symétrique de A_1 par rapport à O, et soient $A_1, A_2, \ldots$ et $A_{-1}, A_{-2}, \ldots$ les chaînes d'origine O, engendrées par les points A_1 et A_{-1}, respectivement. Nous attribuons à O la coordonnée $x=0$, et à A_n la coordonnée $x=n$ $(n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Désignons, pour tout entier positif n, par T_n la transformation du groupe G_O qui transforme le point A_1 en A_n. Nous désignons par $A_{1/n}$ l'image de A_1 obtenue par l'inverse de la transformation T_n, et par $A_{m/n}$ l'image de $A_{1/n}$ obtenue par la transformation T_m. Nous attribuons à $A_{m/n}$ la coordonnéc $x=m/n$, et à son symétrique par rapport à O la coordonnée $x=-m/n$.

3. 12. *La suite des points* $A_{1/2}, A_{1/3}, A_{1/4}, \ldots$ *converge vers* O.

Dans le cas contraire, soit Q un point, et $n_1, n_2, \ldots$ une suite d'entiers positifs tels que Q se trouve entre O et A_{1/n_ν}, pour tout $\nu: O<Q<A_{1/n_\nu}$. Il résulte de là: $O<T_{n_\nu}(Q)<T_{n_\nu}(A_{1/n_\nu})=A_1$. Soit T la transformation du groupe G_O qui change Q en A_1; désignons par A_1' l'image de A_1 obtenue par T. Considérant que les transformations T et T_{n_ν} du groupe G_O sont échangeables (3. 4), il résulte: $T_{n_\nu}T(Q)=TT_{n_\nu}(Q)=T_{n_\nu}(A_1)=A_{n_\nu}$. De la relation ci-dessus $O<T_{n_\nu}(Q)<A_1$ découle donc $O<T_{n_\nu}T(Q)<T(A_1)=A_1'$, d'où $O<A_{n_\nu}<A_1'$, pour tout ν. C'est en contradiction avec la proposition 3. 6.

Désignons par $\tau_{1/n}$ le produit de la symétrie par rapport à O et de la symétrie par rapport au point $A_{1/2n}$. Il résulte de la proposition 3. 10 que la transformation $\tau_{1/n}$ change le point $A_{m/n}$ en $A_{(m+1)/n}$. Comme la transformation $\tau_{1/n}$ conserve l'ordre des points sur la droite, nous concluons que l'ordre des points $A_{m/n}$ sur la droite est le même que celui des nombres rationnels m/n leur correspondant.

D'après 3. 10, la transformation τ_1 change le point A_0 en A_1; comme la suite $A_{1/n}$ converge vers O (3. 12), il résulte de la continuité de la transformation τ_1 que la suite $A_{(n+1)/n}$ converge vers A_1. La transformation $\tau_{1/n}$ change le point O en $A_{1/n}$ et le point A_1 en $A_{(n+1)/n}$; en conséquence de la continuité du groupe G, la transformation $\tau_{1/n}$ diffère de l'identité d'aussi peu que l'on veut, si n est suffisamment grand. Comme $\tau_{1/n}$ transforme le point $A_{m/n}$ en $A_{(m+1)/n}$, il résulte que la distance de deux points consécutifs quelconques de la suite

$$\ldots, A_{-2/n}, A_{-1/n}, O, A_{1/n}, A_{2/n}, \ldots, A_1, \ldots$$

est inférieure à un nombre positif arbitrairement petit, si n est assez grand.

De nos résultats découle immédiatement que *l'ensemble des points* $A_{m/n}$ *est partout dense sur la droite.* Nous pouvons donc étendre la coordonnée x continuement à tous les points de la droite.

Nous entendons par *translation* τ le produit de la symétrie σ_O et d'une autre symétrie quelconque. Désignons, en particulier, par $\tau_{m/n}$ le produit de la symétrie σ_O et de la symétrie par rapport au point $A_{m/2n}$. De la proposition 3. 10 nous obtenons que la translation $\tau_{m/n}$ change le point de coordonnée m'/n' en le point de coordonnée $m'/n'+m/n$. Par continuité, nous obtenons l'expression suivante de la translation $\tau_{m/n}$: $x'=x+m/n$. Cette formule s'étend par continuité à toutes les translations. Nous avons ainsi obtenu la proposition suivante:

3. 13. *Les translations contenues dans le groupe G s'expriment avec la coordonnée x par la formule:* $x'=x+b$.

En ce qui concerne l'expression des transformations du groupe G_O avec la même coordonnée, la proposition suivante est valable:

3. 14. *Les transformations du groupe* G_O *s'expriment avec la coordonnée x par la formule:* $x'=ax$.

Soient d'abord $r=m/n$ et $r'=m'/n'$ deux nombres rationnels quelconques; appliquons la proposition 3. 11 aux chaînes $A_{\nu/n'}$ et $A_{\nu m/n'n}$ $(\nu=1, 2, \ldots)$; il en résulte que la transformation de G_O qui transforme A_1 en A_r change le point $A_{r'}$ en $A_{r'r}$. En tenant compte de la continuité du groupe G_O et de celle de la coordonnée x, nous aboutissons de là au résultat que la transformation de G_O qui change A_1 en le point de coordonnée a, change le point de coordonnée x en le point de coordonnée ax.

3. 15. *Toute transformation du groupe G est le produit d'une transformation du groupe* G_O *et d'une translation.*

Soit P un point différent de O, et soit T une transformation quelconque du groupe G. Désignons par A et B les images de O et de P obtenues par T. En vertu de 3. 7 il y a une translation τ dans G qui transforme O en A. Soit ϱ la transformation de G_O qui change P en le point $\tau^{-1}(B)$. Chacune des transformations T et $\varrho\tau$ transforme O en A, et P en B; il en résulte que $T=\varrho\tau$.

L'expression de ϱ est $x'=ax$ (3. 14) et celle de $\tau: x'=x+b$

(3. 13). La transformation T s'exprime donc par la formule: $x' = ax + b$.

Le groupe G de même que le groupe des similitudes: $x' = ax + b$ sont doublement transitifs sur la droite; toute transformation $x' = ax + b$ $(a \neq 0)$ appartient, par suite, au groupe G. En résumé, *les transformations du groupe G s'expriment par la formule $x' = ax + b$ où a et b sont des nombres réels quelconques,* $a \neq 0$. C'est le théorème énoncé au début de ce paragraphe.

§ 4. Les groupes triplement transitifs de la droite projective.

Par le raisonnement du § 2 on obtient le théorème suivant:

Théorème. *Tout groupe simplement transitif de transformations topologiques de la droite projective en elle-même est homéomorphe au groupe des rotations d'une circonférence.*

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Tout groupe triplement transitif de transformations topologiques de la droite projective en elle-même est homéomorphe au groupe homographique d'une variable réelle.*

Soit U un point quelconque de la droite projective; nous l'appellerons *point à l'infini.* Désignons par G_U le sous-groupe du groupe donné G formé par les transformations qui laissent invariant le point U. Le groupe G_U est *doublement transitif sur la droite* obtenue en omettant le point à l'infini de la droite projective.

A tout point O (différent de U) correspond une transformation involutive de G_U et une seule qui laisse le point O invariant (3. 2). Le groupe G contient donc une transformation involutive et une seule qui admet les points invariants O et U; nous l'appelons *involution* σ_{OU}.

Si A, B est un couple quelconque de points, il y a au moins une transformation T de G qui change O en A et U en B. La transformée $T^{-1}\sigma_{CU}T$ de σ_{OU} par T est involutive et laisse invariants les points A et B; nous appelons cette transformation *involution* σ_{AB}.

Les involutions sont liées entre elles par la *réciprocité* suivante:

4. 1. *Si l'involution σ_{AB} échange entre eux les points C et D, l'involution σ_{CD} échange entre eux les points A et B.*

Soit ϱ la transformation du groupe G qui change le triple de points (A, B, C) en (C, D, A). Comme le couple de points A, B sépare les points C et D, se correspondant par l'involution σ_{AB}, les points B et D appartiennent à un même segment AC de la droite projective. La transformation ϱ, qui échange entre eux les points A et C et transforme B en D, change, par conséquent, chacun des deux segments déterminés par les points A et C en lui-même et admet sur chacun de ces segments un point invariant, P et Q. Le carré de ϱ admet quatre points invariants: P, Q et A, C, d'où $\varrho^2 = I$.

La transformation involutive ϱ échange entre eux les points A et C, d'une part, et les points B et D, d'autre part. La transformée $\varrho^{-1}\sigma_{AB}\varrho$ de l'involution σ_{AB} par ϱ est involutive, ses points invariants sont C et D. Il résulte de là

$$\varrho^{-1}\sigma_{AB}\varrho = \sigma_{CD}.$$

L'expression à gauche montre que l'involution σ_{CD} échange entre eux les points A et B.

4. 2. *Toute transformation du groupe G qui n'appartient pas au sous-groupe G_U est le produit d'un élément T de G_U et d'une involution σ_{AB}.*

Soit S une transformation de G n'appartenant pas à G_U. Désignons par C l'image du point U obtenue par S, et soient A et B deux points qui se correspondent par l'involution σ_{CU}. Désignons par A' et B' les images de A et de B obtenues par l'inverse de la transformation S; les points A, B, A', B' sont différents de U. Si T est la transformation de G_U qui change A' en A et B' en B, et σ_{AB} l'involution ayant les points invariants A et B, qui, d'après 4. 1, échange entre eux les points C et U, la transformation $T.\sigma_{AB}$ transforme le triple de points (A', B', U) en (A, B, C); par suite $T.\sigma_{AB}$ est identique à S.

Introduisons sur la droite projective une *coordonnée* x telle qu'au point U correspond $x = \infty$, et que les transformations du groupe G_U s'expriment avec cette coordonnée par la formule $x' = ax + b$ (voir § 3).

4. 3. *Toute involution contenue dans le groupe G s'exprime par une transformation linéaire de la coordonnée x.*[3])

[3]) Concernant la méthode suivante cf. B. DE KERÉKJÁRTÓ, Sur les inversions dans un groupe commutatif, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris,* **210** (1940), p. 288—289.

Désignons par A et A' les points de coordonnées $x=+1$ et $x=-1$. Soient P et P' les points d'affixes $x=+\xi$, et $x=-\xi$. L'involution σ_{OU} échange entre eux les points A et A' et, de même, les points P et P'. De la proposition 4. 1 il résulte que les points O et U sont échangés entre eux par chacune des deux involutions $\sigma_{AA'}$ et $\sigma_{PP'}$. La transformation $\sigma_{AA'} . \sigma_{PP'} = \mu'$ admet donc les points invariants O et U; elle appartient au sous-groupe G_{OU} formé par les transformations de G qui admettent les points invariants O et U. D'aprés 3. 14 on peut donc exprimer la transformation μ' par une équation de la forme: $x' = \xi' . x$.

Désignons par μ la transformation de G_{OU} définie par la formule: $x' = x/\xi$ qui change P en A et P' en A'. La transformée de l'involution $\sigma_{AA'}$ par μ^{-1} est l'involution $\sigma_{PP'} = \mu\sigma_{AA'}\mu^{-1}$. En multipliant cette relation à gauche par $\sigma_{AA'}$, et en tenant compte de la relation $\sigma_{AA'} . \sigma_{PP'} = \mu'$, nous obtenons la relation

$$\sigma_{AA'} . \mu\sigma_{AA'}\mu^{-1} = \mu'$$

que nous écrirons sous la forme:

$$\sigma_{AA'}\,\mu\,\sigma_{AA'} = \mu'\mu.$$

Désignons par $\sigma_{AA'}(x)$ la coordonnée du point en lequel le point d'affixe x est changé par $\sigma_{AA'}$. La transformation $\sigma_{AA'}\mu\sigma_{AA'}$ change le point d'affixe x en le point $\sigma_{AA'}\left(\sigma_{AA'}(x) . \frac{1}{\xi}\right)$. En effet $\sigma_{AA'}$ change le point x en $\sigma_{AA'}(x)$, μ change ce dernier en $\sigma_{AA'}(x) . \frac{1}{\xi}$, et $\sigma_{AA'}$ le change en $\sigma_{AA'}\left(\sigma_{AA'}(x) . \frac{1}{\xi}\right)$. D'autre part, la transformation $\mu'\mu$ change le point x en $\frac{\xi'}{\xi} . x$. De la relation ci-dessus nous obtenons donc l'égalité suivante:

$$\sigma_{AA'}\left(\sigma_{AA'}(x) . \frac{1}{\xi}\right) = \frac{\xi'}{\xi}\; x,$$

valable pour toutes valeurs réelles x et ξ. Pour déterminer ξ' en fonction de ξ, posons dans cette équation $x=1$; comme $\sigma_{AA'}(1) = 1$, il résulte que

$$\sigma_{AA'}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\xi'}{\xi}.$$

Posons dans l'équation ci-dessus $\xi = 1/x$, conséquemment:

$$\frac{1}{\xi} = x \quad \text{et} \quad \frac{\xi'}{\xi} = \sigma_{AA'}(x);$$

nous obtenons l'équation suivante:

$$\sigma_{AA'}(\sigma_{AA'}(x) . x) = \sigma_{AA'}(x) . x.$$

Cette équation signifie que, pour toute valeur de x, le point de coordonnée $\sigma_{AA'}(x) . x$ est un point invariant de $\sigma_{AA'}$, il coïncide donc ou avec le point $+1$ ou avec -1 c'est-à-dire que $\sigma_{AA'}(x) = \pm 1/x$. Pour $x = 1$, on a $\sigma_{AA'}(x) = +1/x$, et comme $\sigma_{AA'}(x)$ est continue, on obtient, pour toute valeur de x, l'expression suivante:

$$\sigma_{AA'}(x) = + \frac{1}{x}.$$

Soit B, C un autre couple quelconque de points (différents de U). Soit T la transformation du groupe G_U qui change A en B et A' en C. En conséquence de la formule $\sigma_{BC} = T^{-1}\sigma_{AA'}T$, l'involution σ_{BC} est le produit des transformations linéaires T^{-1}, $\sigma_{AA'}$ et T, par suite, σ_{BC} s'exprime aussi par une transformation linéaire.

En tenant compte de la proposition 4. 2 nous concluons que toute transformation du groupe G s'exprime par une transformation linéaire de la coordonnée x. Le groupe G ainsi que le groupe des transformations linéaires $x' = (ax+b)/(cx+d)$ sont triplement transitifs sur la droite projective; toute transformation linéaire appartient donc au groupe G.

Nous avons ainsi démontré que *les transformations du groupe G s'expriment par les transformations linéaires $x' = (ax+b)/(cx+d)$ où a, b, c, d sont des nombres réels quelconques tels que $ad - bc \neq 0$.* C'est le théorème énoncé au début de ce paragraphe.

(Reçu le 24 juin 1940)