Über die reellen Nullstellen gewisser Polynome mit Parametern.

Von GYULA (JULIUS) v. SZ. NAGY in Kolozsvár.

1. Einleitung.

Bei der Darstellung algebraischer Kurven vom Maximalindex in mehrdimensionalen Räumen habe ich einige algebraische Sätze gefunden, die mir als neu und nicht ohne gewissem Interesse zu sein scheinen.

Der Grund dieser Sätze liegt im folgenden leicht beweisbaren Satze:

I. *Bedeuten $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ und $G(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten und sind a_h und a_i solche reelle Nullstellen von $f(x)$, zwischen denen eine ungerade bzw. gerade Anzahl der Nullstellen von $g(x)$ bzw. $F(x)$ liegt, so hat das Polynom*

$$\varphi(x) = g(x)F(x) - f(x)G(x)$$

im abgeschlossenen Intervall (a_h, a_i) mindestens eine Nullstelle.

Aus diesem Satze läßt sich (unter anderem) auch der Satz ableiten:

II. *Sind $f_m(x)$, $g_{m-1}(x)$, $F_k(x)$ und $G_{k-1}(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten und vom Grade m, $m-1$, k bzw. $k-1$ $(k<m)$ und hat das Polynom $f_m(x)$ nur reelle und verschiedene Nullstellen, die von den ebenfalls reellen Nullstellen des Polynoms $g_{m-1}(x)$ getrennt werden, so hat das Polynom*

$$\varphi(x) = g_{m-1}(x)F_k(x) - f_m(x)G_{k-1}(x)$$

zwischen der kleinsten und größten Nullstelle von $f_m(x)$ mindestens $m-k-1$ Nullstellen. Das Polynom $\varphi(x)$ hat also für beliebige Polynome $F_k(x)$ und $G_{k-1}(x)$ mit reellen Koeffizienten höchstens $m+k-1$ und mindestens $m-k-1$ reelle Nullstellen (vorausgesetzt, daß nicht jeder Koeffizient von $F_k(x)$ und $G_{k-1}(x)$ verschwindet).

Aus diesem Satze folgt der Satz:

III. *Sind* $f_m(x)$, $F_k(x)$ *und* $G_{k-1}(x)$ *Polynome mit reellen Koeffizienten und vom Grade* m, k *bzw.* $k-1$ $(k<m)$ *und hat das Polynom* $f_m(x)$ *nur reelle Nullstellen, so hat das Polynom*

$$\varphi(x)=f'_m(x)\,F_k(x)-f_m(x)\,G_{k-1}(x)$$

für beliebige $F_k(x)$ *und* $G_{k-1}(x)$ *mit reellen Koeffizienten mindestens* $m-k-1$ *und höchstens* $m+k-1$ *reelle Nullstellen.*

Die für die Minimalanzahl der reellen Nullstellen ausgesprochenen Sätze lassen sich ohne Weiteres auf stetige Funktionen von entsprechenden Eigenschaften verallgemeinern.

2. **Beweis der Sätze I, II und III.**

Nach den Annahmen des Satzes I bestehen die Ungleichungen

$$(1) \qquad g(a_h)\,g(a_i)\leqq 0 \text{ und } F(a_h)\,F(a_i)\geqq 0,$$

weil das Polynom $g(x)$ bzw. $F(x)$ im Innern des Intervalles (a_h, a_i) eine ungerade bzw. gerade Anzahl von Nullstellen hat.

Ist nun

$$g(a_h)\,g(a_i)\,F(a_h)\,F(a_i)\neq 0,$$

so haben

$$\varphi(a_h)=g(a_h)\,F(a_h) \text{ und } \varphi(a_i)=g(a_i)\,F(a_i)$$

nach (1) entgegengesetzte Vorzeichen. Dann hat also $\varphi(x)$ im Innern des Intervalles (a_h, a_i) eine ungerade Anzahl von Nullstellen, also mindestens eine Nullstelle.

Ist aber

$$g(a_h)\,F(a_h)\,g(a_i)\,F(a_i)=\varphi(a_h)\,\varphi(a_i)=0,$$

so ist mindestens ein Endpunkt des Intervalles (a_h, a_i) eine Nullstelle des Polynoms $\varphi(x)$.

Damit ist der Satz I vollständig bewiesen.

Aus diesem Satz folgt auch der Satz:

IV. *Bedeuten* $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ *und* $G(x)$ *Polynome mit reellen Koeffizienten, sind ferner* a_h *und* a_i *solche reelle Nullstellen von* $f(x)$, *zwischen denen eine ungerade Anzahl der Nullstellen von* $g(x)$ *liegt und hat endlich das Polynom* $\varphi(x)=g(x)\,F(x)-f(x)\,G(x)$ *im abgeschlossenen Intervall* (a_h, a_i) *keine Nullstelle, so hat das*

Polynom $F(x)$ im Intervall (a_h, a_i) eine ungerade Anzahl von Nullstellen, also mindestens eine Nullstelle.

Für den Beweis des Satzes II bezeichnen wir mit $a_1, a_2, \dots, a_m$ die der Größe nach geordneten Nullstellen des Polynoms $f_m(x)$.

Verschwindet das Polynom $F_k(x)$ in keinem der Punkte $a_1, a_2, \dots, a_m$, so können höchstens k der $m-1$ Intervalle (a_1, a_2), $(a_2, a_3), \dots, (a_{m-1}, a_m)$ eine ungerade Anzahl der Nullstellen von $F_k(x)$ enthalten. Es gibt also unter den $m-1$ Intervallen mindestens $m-k-1$, die eine gerade Anzahl der Nullstellen von $F_k(x)$ enthalten. Jedes dieser Intervalle enthält nach Satz I mindestens eine Nullstelle des Polynoms $\varphi(x)$, weil die Polynome $g_{m-1}(x)$ und $F_k(x)$ in den Punkten $a_1, a_2, \dots, a_m$ nicht verschwinden. Im Intervall (a_1, a_m) hat also das Polynom $\varphi(x)$ mindestens $m-k-1$ Nullstellen.

Damit ist Satz II für den Fall $F(a_1)F(a_2)\dots F(a_m) \neq 0$ bewiesen. Es bleibt nur der Fall übrig, daß $F_k(x)$ in einigen der Punkte $a_1, a_2, \dots, a_m$ verschwindet.

Ist $F_k(a_h)=0$, so ist der Punkt a_h offenbar eine Nullstelle des Polynoms $\varphi(x)$.

Fallen nun s Nullstellen des Polynoms $F_k(x)$ mit s Nullstellen von $f_m(x)$ zusammen, so stimmen sie auch mit s Nullstellen von $\varphi(x)$ überein. Zum Beweis des Satzes II können wir annehmen, daß $s < m-k-1$ ist. Die der Größe nach aufeinanderfolgenden Paare der von den Nullstellen des Polynoms $F_k(x)$ verschiedenen $m-s$ Nullstellen von $f_m(x)$ bestimmen $m-s-1$ Intervalle. Unter diesen Intervallen gibt es mindestens $m-2s-1$ solche, die im Innern keine Nullstelle von $f_m(x)$ haben. Unter diesen letzteren Intervallen gibt es also mindestens $(m-2s-1)-(k-s)=(m-k-1)-s$ solche, die nicht nur in den Endpunkten, sondern auch im Innern keine Nullstelle von $F_k(x)$ enthalten. (Das Polynom $F_k(x)$ hat nämlich höchstens $k-s$ solche reelle Nullstellen, die von den Nullstellen von $f_m(x)$ abweichen.) Jedes Intervall von dieser letzteren Eigenschaft enthält nach dem Satze I mindestens eine Nullstelle von $\varphi(x)$ in seinem Innern. Das Polynom $\varphi(x)$ hat also im Intervall (a_1, a_m) mindestens $m-k-1$ reelle Nullstellen, weil sie in den Punkten $a_1, a_2, \dots, a_m$ s Nullstellen und im Innern der Intervalle $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{m-1}, a_m)$ mindestens $m-k-1-s$ Nullstellen besitzt.

Damit ist der Satz II bewiesen.

Das Polynom $\varphi(x)$ kann höchstens $m+k-1$ Nullstellen haben, weil es offenbar nur dann identisch verschwindet, wenn beide Polynome $F_k(x)$ und $G_{k-1}(x)$ identisch verschwinden. Dies folgt daraus, daß die Polynome $f_m(x)$ und $g_{m-1}(x)$ teilerfremd sind und daß der Grad von $F_k(x)$ bzw. $G_{k-1}(x)$ kleiner als derjenige von $f_m(x)$ bzw. $g_{m-1}(x)$ ist.

Wir führen die folgende *Benennung* ein: Die Nullstellen eines Polynoms $f_m(x)$ vom m-ten Grade mit lauter reellen Nullstellen sind durch die Nullstellen eines Polynoms $g_{m-1}(x)$ vom $(m-1)$-ten Grade getrennt, falls jede i-fache Nullstelle $(i>1)$ von $f_m(x)$ eine $(i-1)$-fache Nullstelle von $g_{m-1}(x)$ ist und wenn $g_{m-1}(x)$ zwischen zwei benachbarten (verschiedenen) Nullstellen von $f_m(x)$ genau einmal verschwindet.

Mit dieser Benennung gilt die folgende Ergänzung des Satzes II:

V. *Der Satz II gilt auch dann, wenn das Polynom $f_m(x)$ auch mehrfache Nullstellen hat.*

Bezeichnet nämlich $h(x)$ den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $f_m(x)$ und $g_{m-1}(x)$, so ist $h(x)$ auch ein Teiler von $\varphi(x)$. Sind

$$f_m(x)=h(x)f_\mu(x),\ g_{m-1}(x)=h(x)g_{\mu-1}(x) \quad \text{und} \quad \varphi(x)=h(x)\psi(x),$$

so ist

$$\psi(x)=g_{\mu-1}(x)F_k(x)-f_\mu(x)G_{k-1}(x).$$

Hier ist $m=r+\mu$, wenn r den Grad von $h(x)$ bedeutet.

Ist $k\leqq\mu-1$, so hat $\psi(x)$ zwischen der kleinsten und größten Nullstelle von $f_\mu(x)$ (nach Satz II) mindestens $\mu-k-1$ Nullstellen. Das Polynom $\varphi(x)$ hat also im abgeschlossenen Intervall zwischen der kleinsten und der größten Nullstelle von $f_\mu(x)$ mindestens $(\mu-k-1)+r=m-k-1$ Nullstellen. Das gleiche gilt auch im Falle $k>\mu-1$, weil dann $r>r+(\mu-k-1)=m-k-1$ ist.

Damit ist der Satz V vollständig bewiesen. Aus diesem Satz folgt der Satz III unmittelbar.

3. Weitere Sätze.

Aus dem Beweise der Sätze I und II folgen auch die Sätze:

VI. *Sind $f_m(x)$, $g_{m-1}(x)$, $F_k(x)$ und $G_{k-1}(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten und vom Grade m, $m-1$, k bzw. $k-1$, hat ferner das Polynom $f_m(x)$ lauter reelle und verschiedene Nullstellen, die* *von den Nullstellen des Polynoms* $g_{m-1}(x)$ *getrennt werden, und gibt es endlich p bzw. q Paare der benachbarten Nullstellen von* $f_m(x)$ *bzw.* $g_{m-1}(x)$, *deren Intervalle eine ungerade Anzahl der Nullstellen von* $F_k(x)$ *bzw.* $G_{k-1}(x)$ *enthalten, so hat das Polynom*

$$\varphi(x) = g_{m-1}(x) F_k(x) - f_m(x) G_{k-1}(x)$$

mindestens $r = \operatorname{Max}\{m-1-p,\ m-2-q\}$ *reelle Nullstellen.*

VII. *Sind* $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ *und* $G(x)$ *Polynome mit reellen Koeffizienten, haben ferner die Polynome* $f(x)$ *und* $g(x)$ *mindestens m bzw. n solche Paare der benachbarten reellen Nullstellen, deren Intervalle eine ungerade Anzahl der Nullstellen von* $g(x)$ *bzw.* $f(x)$ *enthalten, und hat endlich das Polynom* $F(x)$ *bzw.* $G(x)$ *höchstens p bzw. q reelle Nullstellen, so hat das Polynom*

$$\varphi(x) = g(x) F(x) - f(x) G(x)$$

mindestens $r = \operatorname{Max}\{m-p,\ n-q\}$ *reelle Nullstellen.*

VIII. *Sind* $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ *und* $G(x)$ *Polynome mit reellen Koeffizienten, hat ferner das Polynom* $f(x)$ *m solche Paare von benachbarten reellen Nullstellen, deren Intervalle eine ungerade Anzahl der reellen Nullstellen von* $g(x)$ *enthalten und ist endlich* $F(x)$ *ein beliebiges definites oder semidefinites Polynom, so hat jedes Polynom* $\varphi(x)$ *von der Form*

$$\varphi(x) = g(x) F(x) - f(x) G(x)$$

mindestens m reelle Nullstellen.

Ein definites Polynom hat nämlich keine reelle Nullstelle und jede reelle Nullstelle eines semidefiniten Polynoms besitzt eine gerade Multiplizität.

IX. *Sind* $f_m(x)$, $g_{m-1}(x)$, $F_k(x)$ *und* $G_{k-1}(x)$ *Polynome mit reellen Koeffizienten und vom Grade* m, $m-1$, k *bzw.* $k-1$ $(k < m)$ *und hat das Polynom* $f_m(x)$ *lauter reelle Nullstellen, die von den Nullstellen des Polynoms* $g_{m-1}(x)$ *getrennt werden, so haben die Kurven*

$$y g_{m-1}(x) - f_m(x) = 0 \text{ und } y G_{k-1}(x) - F_k(x) = 0$$

(außer den in den unendlichfernen Punkt der y-Achse fallenden $(m-1)(k-1)$ Punkten) *mindestens* $m-k-1$ *und höchstens* $m+k-1$ *reelle Treffpunkte.*

Die Abzissen der Treffpunkte dieser Kurven genügen nämlich der Gleichung

$$\varphi(x) = g_{m-1}(x) F_k(x) - f_m(x) G_{k-1}(x) = 0.$$

X. *Sind $f_m(x)$, $g_{m-2}(x)$, $F_k(x)$ und $G_{k-1}(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten und vom Grade m, $m-2$, k bzw. $k-1$, und hat das Polynom $f_m(x)$ lauter reelle und verschiedene Nullstellen, von denen die $m-1$ kleinsten von den Nullstellen des Polynoms $g_{m-2}(x)$ getrennt werden, so haben die Kurven*

$$y^2 g_{m-2}(x) - f_m(x) = 0 \text{ und } y G_{k-1}(x) - F_k(x) = 0$$

(außer den in den unendlichfernen Punkt der y-Achse fallenden $(m-2)(k-1)$ Punkten) *mindestens $m-2$ und höchstens $m-2+2k$ reelle Treffpunkte.*

Die Abszissen der Treffpunkte dieser Kurven genügen nämlich der Gleichung

$$\varphi(x) = g_{m-2}(x) F_k^2(x) - f_m(x) G_{k-1}^2(x) = 0,$$

die nach dem Satz VIII mindestens $m-2$ reelle Wurzeln besitzt.

(*Eingegangen am 22. August 1940.*)