Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung.

Von BÉLA v. SZ. NAGY in Szeged.

§ 1. Die Ungleichungen.

Es sei $y(x)$ eine auf $(-\infty, \infty)$ definierte totalstetige Funktion, die also die Integralfunktion ihrer (fast überall existierenden, nach Lebesgue integrierbaren) Derivierten $y'(x)$ ist.

Sind die Integrale

$$J_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |y|^\alpha dx \quad \textit{und} \quad K_p = \int_{-\infty}^{\infty} |y'|^p dx$$

für ein bestimmtes $\alpha > 0$ und für ein bestimmtes $p \geqq 1$ beide endlich, so hat man

$$(1) \qquad \max_{-\infty<x<\infty} |y| \leqq \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} J_\alpha^{\frac{p-1}{pq}} K_p^{\frac{1}{pq}} \qquad \left(q = 1 + \frac{p-1}{p}\alpha\right).$$

Für $\beta > 0$ hat man ferner

$$(2) \qquad J_{\alpha+\beta} \leqq \left[\frac{q}{2} H\left(\frac{q}{\beta}, \frac{p-1}{p}\right)\right]^{\frac{\beta}{q}} J_\alpha^{1+\beta\frac{p-1}{pq}} K_p^{\frac{\beta}{pq}},$$

wo

$$H(u, v) = \frac{(u+v)^{-(u+v)}\Gamma(1+u+v)}{u^{-u}\Gamma(1+u)v^{-v}\Gamma(1+v)}, \quad H(u,0) = H(0,v) = 1.\ ^{1)}$$

---

[1]) Dies ist für $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ eine monoton fallende Funktion ihrer beiden Veränderlichen. Da nun $H(u, 0) = 1$ und $H(u, 1) = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-u}$, so hat man $1 > H(u, v) > \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-u} > \frac{1}{e}$ für $0 < v < 1$. Es gilt also

$$1 \geqq H\left(\frac{q}{\beta}, \frac{p-1}{p}\right) > \left(1 + \frac{\beta}{q}\right)^{-\frac{q}{\beta}} > \frac{1}{e}.$$

Die Funktion $H(u,v)$ wurde von Herrn E. SCHMIDT eingeführt und

Die angeführten Konstanten sind genau.

Schreibt man (2) in der Form

$$\left(\frac{J_{\alpha+\beta}}{J_\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq \left[\frac{q}{2} H\left(\frac{q}{\beta}, \frac{p-1}{p}\right)\right]^{\frac{1}{q}} J_\alpha^{\frac{p-1}{pq}} K_p^{\frac{1}{pq}} \tag{3}$$

und läßt man β über alle Grenzen wachsen, so erhält man im Grenzfall die Ungleichung (1).

Im Falle $p=1$ gilt in (1) das Gleichheitszeichen immer dann, wenn $|y(x)|$ bis zu einem Wert x_0 von x monoton wächst, dann aber monoton fällt. Im Falle $p>1$ gilt in (1) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $y(x)$ die Form $a y_{p\alpha}(|bx+c|)$ hat, wo a, b, c beliebige Konstanten sind $(b \neq 0)$ und $y_{p\alpha}(t)$ folgendermaßen definiert ist:

$$\text{im Falle } \alpha < p: \quad y_{p\alpha}(t) = \begin{cases} (1-t)^{\frac{p}{p-\alpha}} & \text{für } 0 \leqq t \leqq 1, \\ 0 & \text{für } t > 1, \end{cases}$$

$$\text{im Falle } \alpha = p: \quad y_{p\alpha}(t) = e^{-t} \qquad \text{für } t \geqq 0,$$

$$\text{im Falle } \alpha > p: \quad y_{p\alpha}(t) = (1+t)^{\frac{p}{p-\alpha}} \qquad \text{für } t \geqq 0.$$

In (2) ist im Falle $p=1$ immer (wenn $y \not\equiv 0$) das Zeichen „$<$" gültig. Im Falle $p>1$ gilt in (2) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $y(x)$ die Form $a y_{p\alpha\beta}(|bx+c|)$ hat, wo a, b, c beliebige Konstanten sind $(b \neq 0)$ und $y_{p\alpha\beta}(t)$ für $t \geqq 0$ folgendermaßen definiert ist: $u = y_{p\alpha\beta}(t)$ ist die inverse Funktion der Funktion

$$t = \int_u^1 \frac{ds}{[s^\alpha(1-s^\beta)]^{\frac{1}{p}}} \qquad (0 \leqq u \leqq 1); \tag{4}$$

$y_{p\alpha\beta}(t)$ ist also eine monoton fallende Funktion, sie ist im Falle

---

untersucht in seiner Arbeit: Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Funktion und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet, *Math. Annalen*, **117** (1940), S. 301–326, wo er Ungleichungen vom Typus $\left\{\int_0^1 |y|^a\,dx\right\}^{\frac{1}{a}} \leqq C \left\{\int_0^1 |y'|^b\,dx\right\}^{\frac{1}{b}}$ $(a>0,\ b \geqq 1)$ z. B. unter der Bedingung: $\max y + \min y = 0$ aufstellt. Wegen ihrer Inhomogenität gegenüber der Substitution $x \to \varrho x$ kann eine solche Ungleichung im Falle eines unendlichen Integrationsintervalls nicht mehr bestehen. Im Beweis von (2) werden wir uns teils der Methode des Herrn Schmidt bedienen.

$\alpha \geqq p$ immer positiv, im Falle $\alpha < p$ wird sie dagegen für

$$t_0 = \int_0^1 \frac{ds}{[s^\alpha(1-s^\beta)]^{\frac{1}{p}}}$$

gleich 0; wir wollen in diesem Falle $y_{p\alpha\beta}(t) = 0$ auch für $t > t_0$ setzen.

Im Falle $\alpha = p = 2$ ergibt (1) insbesondere:

$$y(0) \leqq J_2^{\frac{1}{4}} K_2^{\frac{1}{4}}.$$

Wendet man diese Ungleichung auf die Cosinus-Transformierte $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos tx \,.\, g(t)\, dt$ einer quadratisch integrierbaren reellwertigen Funktion $g(t)$ an, für die auch $t\, g(t)$ quadratisch integrierbar ist, so erhält man auf Grund des Parsevalschen Satzes:

$$\int_0^\infty g(t)\, dt \leqq \sqrt{\pi} \left\{ \int_0^\infty g^2(t)\, dt \int_0^\infty t^2 g^2(t)\, dt \right\}^{\frac{1}{4}}$$

Dies ist eine bekannte Ungleichung von CARLSON[2]). Gleichheit tritt hier nur für die Cosinus-Transformierten der Funktionen $a\, e^{-|bx|}$ auf.

Schreiben wir nun (2) für $\alpha = \beta = 1$ und $p = 2$ auf. Dann wird $q = \frac{3}{2}$ und eine leichte Rechnung zeigt, daß $H\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$. Also hat man

$$J_2 \leqq \frac{3}{(4\pi)^{\frac{2}{3}}} J_1^{\frac{4}{3}} K_2^{\frac{1}{3}}. \tag{5}$$

Da, wie man leicht nachrechnet,

$$y_{211}(t) = \begin{cases} \cos^2 \frac{t}{2} & \text{für } 0 \leqq t \leqq \pi, \\ 0 & \text{für } t > \pi, \end{cases}$$

so wird in (5) Gleichheit dann und nur dann bestehen, wenn

---

[2]) Siehe F. CARLSON, Sur une inégalité, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 25 B (1934), No. 1.

$$y=\begin{cases} a\cos^2(bx+c) & \text{für} \quad |bx+c|\leqq\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für} \quad |bx+c|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(a, b, c sind beliebige Konstanten, $b\neq 0$).

Es sei nun $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}y(x)\,dx$; man hat wegen des Parsevalschen Satzes:

$$J_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt,\quad K_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2|f(t)|^2\,dt.$$

Ist $y(x)$ überall nichtnegativ, so ist $J_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}y(x)\,dx=\sqrt{2\pi}\,f(0)$. (5) ergibt also:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt\leqq\frac{3}{(4\pi)^{\frac{2}{3}}}\left(\sqrt{2\pi}f(0)\right)^{\frac{4}{3}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2|f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{3}},$$

oder

$$f(0)\geqq\left(\frac{4}{27}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{3}{4}}}{\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2|f(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{4}}},$$

gültig für alle komplexwertigen Funktionen, für die die rechtsstehenden Integrale endlich sind und *deren Fouriersche Transformierte überall nichtnegativ reellwertig sind.*

Die Ungleichungen (1), (2) lassen sich auch auf den Fall übertragen, daß die Funktionen auf einem endlichen Intervall definiert sind, vorausgesetzt, daß sie in mindestens einem Punkte des Intervalles verschwinden. Auf diese Frage wollen wir aber nicht näher eingehen.

§ 2. Beweis der ersten Ungleichung.

Es folgt aus der Endlichkeit von J_α, daß es gegen ∞ bzw. $-\infty$ strebende Folgen a_n, b_n gibt derart, daß $y(a_n)\to 0$, $y(b_n)\to 0$.

Dann ist aber im Falle $p=1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y'|\,dx\geqq\mp\int\limits_{\xi}^{\infty}y'\,dx\pm\int\limits_{-\infty}^{\xi}y'\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\mp\int\limits_{\xi}^{a_n}\pm\int\limits_{b_n}^{\xi}\right)y'\,dx=\pm 2y(\xi),$$

also $|y(\xi)| \leqq \frac{1}{2} K_1$, wie auch ξ gewählt wurde. Damit ist aber (1) im Falle $p=1$ bewiesen; man sieht auch, daß Gleichheitszeichen darin dann und nur dann gilt, wenn $|y(x)|$ bis zu einer gewissen Stelle monoton wächst, dann monoton fällt.

Es sei nun $p>1$. Anwendung der Hölderschen Ungleichung ergibt:

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{\frac{p-1}{p}\alpha} |y'|\,dx \leqq \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |y|^{\alpha}\,dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |y'|^{p}\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} = J_\alpha^{\frac{p-1}{p}} K_p^{\frac{1}{p}}.$$

Weiter hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y|^{\frac{p-1}{p}\alpha} |y'|\,dx \geqq \Big[-\int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{0}\Big] (\operatorname{sgn} y)\, |y|^{\frac{p-1}{p}\alpha} y'\,dx =$$

$$(7) \qquad = \frac{1}{1+\frac{p-1}{p}\alpha}\Big[-\int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{0}\Big] \frac{d}{dx} |y|^{1+\frac{p-1}{p}\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{1}{q}\,[2|y(0)|^q - \lim |y(a_n)|^q - \lim |y(b_n)|^q] = \frac{2}{q} |y(0)|^q.$$

Aus (6) und (7) folgt:

$$(8) \qquad |y(0)|^q \leqq \frac{q}{2} J_\alpha^{\frac{p-1}{p}} K_p^{\frac{1}{p}}.$$

Wenden wir (8) auf die Funktion $y_\xi(x) = y(x+\xi)$ (ξ beliebig) an, so ergibt sich:

$$|y(\xi)|^q \leqq \frac{q}{2} J_\alpha^{\frac{p-1}{p}} K_p^{\frac{1}{p}},$$

womit (1) bewiesen ist.

Wenden wir jetzt (1) auf die Funktion $\bar{y}_\lambda(x) = y(|x|+\lambda)$ ($\lambda>0$) statt $y(x)$ an, so ergibt sich:

$$\max_{-\infty<x<\infty} |\bar{y}_\lambda|^q = \max_{x\geqq\lambda} |y|^q \leqq \frac{q}{2}\Big(2\int_{\lambda}^{\infty} |y|^\alpha dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(2\int_{\lambda}^{\infty} |y'|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

woraus folgt, daß $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$. Ebenso beweist man, daß $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$. Die Funktion $|y(x)|$ nimmt daher ihr Maximum an.

Da (1) gegenüber einer Translation $x \to x+\xi$ invariant ist und da das Ersetzen von y durch ϱy das Multiplizieren beider Seiten durch $|\varrho|$ bewirkt, darf man sich beim Aufsuchen der nichttrivialen Extremalen auf solche Funktionen $y(x)$ beschränken, für welche $y(0) = \max|y| = 1$. Gleichheit in (1) wird dann Gleichheit in (8) bedeuten; in (8) besteht aber das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn es auch in (6) und (7) gleichzeitig besteht. In (6) gilt aber Gleichheit dann und nur dann, wenn $|y|^\alpha$ und $|y'|^p$ proportional sind, d. h., wenn fast überall

$$(9) \qquad |y'(x)| = \varrho |y(x)|^{\frac{\alpha}{p}}$$

mit einer positiven Konstanten ϱ gilt. In (7) aber wird das Gleichheitszeichen dann und nur dann bestehen, wenn fast überall, wo $y(x) \neq 0$:

$$(10) \qquad \begin{aligned} |y'(x)| &= \operatorname{sgn} y(x) \,.\, y'(x) \quad \text{für} \quad x < 0, \\ -|y'(x)| &= \operatorname{sgn} y(x) \,.\, y'(x) \quad \text{für} \quad x > 0. \end{aligned}$$

Letzte Bedingung ist nun offenbar damit gleichbedeutend, daß $[y^2(x)]' = 2y(x)y'(x)$ für $x < 0$ nichtnegativ, für $x > 0$ nichtpositiv ausfällt, also, daß $y^2(x)$ für $x < 0$ monoton wächst, für $x > 0$ monoton fällt. Dies ist aber wegen $y(0) > 0$ dann und nur dann der Fall, wenn $y(x)$ ebenfalls für $x < 0$ monoton wächst, für $x > 0$ monoton fällt und $\geqq 0$ ist. Für diese Funktionen nimmt (9) die folgende Gestalt an:

$$y'(x) = \varrho [y(x)]^{\frac{\alpha}{p}} \text{ für } x < 0, \quad -y'(x) = \varrho [y(x)]^{\frac{\alpha}{p}} \text{ für } x > 0.$$

Diese Differentialgleichung hat aber unter der Bedingung $y(0) = 1$ die einzige Lösung $y = y_{p\alpha}(|\sigma x|)$, wo $y_{p\alpha}(t)$ die in § 1 definierte Funktion ist und $\sigma = \varrho \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)$ bzw. $\sigma = \varrho$, je nachdem $\alpha \neq p$ oder $\alpha = p$, gesetzt wird. Die allgemeine Extremale erhält man aus dieser Funktion durch Multiplizieren mit Konstanten und Verschiebungen längs der x-Achse.

§ 3. Beweis der zweiten Ungleichung.

Im Falle $p = 1$ haben wir wegen (1):

$$\max|y| \leqq \frac{1}{2} K_1.$$

Hieraus folgt aber wegen

$$J_{\alpha+\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{\alpha+\beta} dx \leqq (\max|y|)^\beta \int_{-\infty}^{\infty} |y|^\alpha dx = (\max|y|)^\beta J_\alpha:$$

$$\left(\frac{J_{\alpha+\beta}}{J_\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq \frac{1}{2} K_1;$$

damit ist (3) im Falle $p=1$ bewiesen. Zugleich sieht man, daß Gleichheit nur für $y \equiv 0$ besteht. Daß die Konstante $\frac{1}{2}$ genau ist, sieht man, wenn man etwa die Folge

$$y_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqq 1 \\ 1 - n(|x|-1) & \text{für } 1 < |x| < 1 + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{für } |x| \geqq 1 + \frac{1}{n} \end{cases}$$

betrachtet.

Es sei nun $p > 1$.

Wir wissen schon, daß aus der Endlichkeit von J_α und K_p folgt, daß $y(x)$ für $|x| \to \infty$ gegen 0 strebt, und, daß folglich $|y(x)|$ ihr Maximum annimmt. Da die Ungleichung (2) gegenüber einer Verschiebung $x \to x + \xi$ invariant ist, und da das Ersetzen von y durch ϱy das Multiplizieren beider Seiten mit $|\varrho|^{\alpha+\beta}$ bewirkt, darf man sich auf die Betrachtung solcher Funktionen $y(x)$ beschänken, für welche $y(0) = \max |y| = 1$. Dann ist $|y(x)|^{\alpha+\beta} \leqq |y(x)|^\alpha$, also $J_{\alpha+\beta} \leqq J_\alpha$.

Es sei $f(s) = (s^\alpha - s^{\alpha+\beta})^{\frac{p-1}{p}}$ $(0 \leqq s \leqq 1)$; man hat offenbar für $0 < s < 1$:

$$f'(s) = \frac{p-1}{p} \frac{\alpha s^\alpha - (\alpha+\beta) s^{\alpha+\beta}}{s[f(s)]^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{11}$$

Es sei ferner $F(u) = \int\limits_0^u f(s)\, ds \quad (0 \leqq u \leqq 1)$.

Mit $y(x)$ ist auch $F(|y(x)|)$ eine totalstetige Funktion von x; man hat nur zu bemerken, daß (wegen $0 \leqq f(s) \leqq 1$):

$$|F(|y(x_1)|) - F(|y(x_2)|)| = \left| \int\limits_{|y(x_2)|}^{|y(x_1)|} f(s)\, ds \right| \leqq$$
$$\leqq ||y(x_1)| - |y(x_2)|| \leqq |y(x_1) - y(x_2)|.$$

$F(|y(x)|)$ ist also die Integralfunktion ihrer Derivierten:

$$\frac{d}{dx} F(|y(x)|) = f(|y(x)|)\, [\operatorname{sgn} y(x)]\, y'(x).$$

Anwendung der Hölderschen Ungleichung ergibt:

$$
(12)\qquad \begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(|y|)\,|y'|\,dx &\leqq \Big(\int_{-\infty}^{\infty}[f(|y|)]^{\frac{p}{p-1}}dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|y'|^{p}dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \\ &= (J_\alpha - J_{\alpha+\beta})^{\frac{p-1}{p}}\,K_p^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}
$$

Da mit $y(x)$ auch $F(|y(x)|)$ gegen 0 strebt, wenn $|x|\to\infty$, erhält man weiter:

$$
(13)\qquad \begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(|y|)\,|y'|\,dx &\geqq \Big[-\int_{0}^{\infty} + \int_{-\infty}^{0}\Big](\operatorname{sgn} y) f(|y|) y'\,dx = \\ &= \Big[-\int_{0}^{\infty} + \int_{-\infty}^{0}\Big][F(|y(x)|)]'\,dx = 2F(|y(0)|) = 2F(1).\end{aligned}
$$

Also hat man

$$
2F(1) \leqq (J_\alpha - J_{\alpha+\beta})^{\frac{p-1}{p}}\,K_p^{\frac{1}{p}}.
$$

Wenn man die Bezeichnung $V = \dfrac{J_{\alpha+\beta}}{J_\alpha}$ einführt, dann ist also

$$
1 \leqq \frac{1}{2F(1)}\,(1-V)^{\frac{p-1}{p}}\,J_\alpha^{\frac{p-1}{p}}\,K_p^{\frac{1}{p}},
$$

und folglich

$$
V^{\frac{q}{\beta}} \leqq \frac{1}{2F(1)}\,V^{\frac{q}{\beta}}(1-V)^{\frac{p-1}{p}}\,J_\alpha^{\frac{p-1}{p}}\,K_p^{\frac{1}{p}}.
$$

V ist offenbar eine Größe zwischen 0 und 1, daher

$$
(14)\qquad V^{\frac{q}{\beta}}(1-V)^{\frac{p-1}{p}} \leqq \max_{0\leqq v\leqq 1} v^{\frac{q}{\beta}}(1-v)^{\frac{p-1}{p}} = M.
$$

Also ist endlich

$$
V^{\frac{q}{\beta}} \leqq \frac{M}{2F(1)}\,J_\alpha^{\frac{p-1}{p}}\,K_p^{\frac{1}{p}}.
$$

Dies ist aber eben die Ungleichung (3). Denn es ist, wie eine leichte Rechnung ergibt, erstens

$$
M = \frac{\left(\frac{q}{\beta}\right)^{\frac{q}{\beta}}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\left(\frac{q}{\beta}+\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{q}{\beta}+\frac{p-1}{p}}},
$$

zweitens

$$F(1)=\int_0^1 [s^\alpha(1-s^\beta)]^{\frac{p-1}{p}} ds=\frac{1}{\beta}\int_0^1 (1-u)^{\frac{p-1}{p}} u^{\frac{q}{\beta}-1} du=$$

$$=\frac{1}{\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{p-1}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{q}{\beta}+\frac{p-1}{p}\right)}=\frac{1}{q}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(1+\frac{p-1}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{q}{\beta}+\frac{p-1}{p}\right)},$$

also

$$\frac{M}{2F(1)}=\frac{q}{2}H\left(\frac{q}{\beta},\frac{p-1}{p}\right).$$

Nun gehen wir zur Untersuchung des Bestehens des Gleichheitszeichens in (2) für $p>1$ über.

Damit in (2) das Gleichheitszeichen besteht, muß es gleichzeitig in (12), (13) und (14) bestehen. In (12) wird Gleichheit sein, wenn $|y'|^p$ ein konstantes Multiplum von $f^{\frac{p}{p-1}}(|y|)$ ist, d. h., wenn (fast überall)

$$(15)\qquad |y'|=\varrho f^{\frac{1}{p-1}}(|y|)$$

mit einer positiven Konstanten ϱ gilt. In (13) wird Gleichheit dann und nur dann bestehen, wenn fast überall, wo $f(|y|)\neq 0$ (also, wo $y\neq 0, \pm 1$), gilt:

$$(16)\qquad \begin{aligned} |y'| &= (\operatorname{sgn} y)\, y' \quad \text{für} \quad x<0, \\ |y'| &= -(\operatorname{sgn} y)\, y' \quad \text{für} \quad x>0. \end{aligned}$$

Endlich ist in (14) Gleichheit dann, wenn die Funktion $v^{\frac{q}{\beta}}(1-v)^{\frac{p-1}{p}}$ ihr Maximum gerade für $v=V$ erreicht, d. h., wenn

$$\frac{\frac{q}{\beta}}{V}-\frac{\frac{p-1}{p}}{1-V}=0,$$

oder, was damit gleichbedeutend ist, wenn

$$(17)\qquad J_{\alpha+\beta}\left(1+\frac{p-1}{p}(\alpha+\beta)\right)=J_\alpha\left(1+\frac{p-1}{p}\alpha\right).$$

Bedingung (16) ist offenbar damit gleichbedeutend, daß $(y^2)'$, d. h. $2yy'$ fast überall, wo $f(|y|)\neq 0$, für $x<0$ nichtnegativ, für $x>0$ aber nichtpositiv ausfällt. Wo aber $f(|y|)=0$, dort hat man wegen (15) fast überall: $y'=0$, also $(y^2)'=0$. Daraus folgt, daß $y^2(x)$ für $x<0$ monoton wächst, für $x>0$ aber monoton fällt.

Wegen $y(0) > 0$ ist dies dann und nur dann der Fall, wenn $y(0)$ überall nichtnegativ, für $x < 0$ monoton wachsend, für $x > 0$ aber monoton fallend ist. Für solche Funktionen nimmt (15) die Gestalt an:

$$(18) \quad y' = \varrho f^{\frac{1}{p-1}}(y) \quad \text{für} \quad x < 0, \quad -y' = \varrho f^{\frac{1}{p-1}}(y) \text{ für } x > 0.$$

Nehmen wir augenblicklich an, daß (18) eine zulässige Lösung $y(x)$ hat[3]), die überall nichtnegativ, für $x < 0$ wachsend, für $x > 0$ fallend ist. Es sei (σ, τ) das Intervall, wo $y(x)$ gleich 1 ist (es ist offenbar $\sigma \leqq 0 \leqq \tau$); ω_1 und $-\omega_2$ sollen die kleinste positive, bzw. die größte negative Zahl bedeuten, für die $y(x)$ verschwindet (falls es solche gibt, sonst sollen ω_1 das Symbol ∞, $-\omega_2$ das Symbol $-\infty$ bedeuten).

Mit Rückblick auf (11) haben wir dann

$$J_{\alpha+\beta} - J_\alpha + \frac{p-1}{p}[(\alpha+\beta)J_{\alpha+\beta} - \alpha J_\alpha] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ y^{\alpha+\beta} - y^\alpha + \frac{p-1}{p}[(\alpha+\beta)y^{\alpha+\beta} - \alpha y^\alpha] \right\} dx = \int_\sigma^\tau + \int_{-\omega_2}^{\sigma} + \int_\tau^{\omega_1} =$$

$$= (\tau - \sigma)\frac{p-1}{p}\beta - \left[\int_{-\omega_2}^{\sigma} + \int_\tau^{\omega_1} \right] [f^{\frac{p}{p-1}}(y) + y f^{\frac{1}{p-1}}(y) f'(y)]\, dx.$$

Nun ist wegen (18)

$$\int_\tau^{\omega_1} = \int_1^0 [f^{\frac{p}{p-1}}(y) + y f^{\frac{1}{p-1}}(y) f'(y)] \frac{dx}{dy} dy = \int_0^1 [\ldots] \frac{dy}{\varrho f^{\frac{1}{p-1}}(y)} =$$

$$= \frac{1}{\varrho} \int_0^1 [f(y) + y f'(y)]\, dy = \frac{1}{\varrho}[y f(y)]_0^1 = 0;$$

ebenso erhält man, daß $\int_{-\omega_2}^{\sigma} = 0$. Hieraus folgt, daß (17) dann und nur dann erfüllt ist, wenn $(\tau - \sigma)\frac{p-1}{p}\beta = 0$, also wenn $\tau = \sigma = 0$.

Man hat also nur diejenigen Lösungen der Differentialgleichung (18) zu bestimmen, für die $y(0) = 1$ und $0 \leqq y(x) < 1$ für $x \neq 0$. Es existiert aber offenbar eine einzige solche Lösung, und

[3]) D. h., für die J_α und K_p endlich sind.

zwar $y = y_{p\alpha\beta}(|\varrho x|)$, wo $y_{p\alpha\beta}(t)$ die in § 1 definierte Funktion ist. Diese Funktion $y = y_{p\alpha\beta}(|\varrho x|)$ ist zulässig, d. h., die entsprechenden Integrale J_α und K_p sind endlich. Im Falle $\alpha < p$ ist das klar, da in diesem Falle $y_{p\alpha\beta}(t)$ außerhalb eines endlichen Intervalles verschwindet. Im Falle $\alpha \geqq p$ aber hat man

$$2J_\alpha = \int_0^\infty y^\alpha_{p\alpha\beta}(\varrho x)\,dx = \frac{1}{\varrho}\int_0^\infty y^\alpha_{p\alpha\beta}(t)\,dt = \frac{1}{\varrho}\int_1^0 u^\alpha \frac{dt}{du}\,du;$$

nun ist wegen (4): $\dfrac{dt}{du} = -[u^\alpha(1-u^\beta)]^{-\frac{1}{p}}$, also

$$2J_\alpha = \frac{1}{\varrho}\int_0^1 u^{\alpha-\frac{\alpha}{p}}(1-u^\beta)^{-\frac{1}{p}}\,du < \infty.\,[4])$$

Mit $y^\alpha_{p\alpha\beta}(|\varrho x|)$ hat $y^{\alpha+\beta}_{p\alpha\beta}(|\varrho x|)$ und also auch $y^\alpha_{p\alpha\beta}(|\varrho x|) - y^{\alpha+\beta}_{p\alpha\beta}(|\varrho x|)$ ein endliches Integral. Dann hat aber, wegen (15), auch $[y'_{p\alpha\beta}(|\varrho x|)]^p$ ein endliches Integral.

Wenn man die Bedingung $y(0) = \max|y| =$ wieder wegläßt, dann wird in (2) das Gleichheitszeichen für jene Funktionen gelten, die aus den Funktionen $y_{p\alpha\beta}(|\varrho x|)$ durch Verschiebung längs der x-Achse und Multiplizieren mit einer Konstanten hervorgehen.

(Eingegangen am 4. Dezember 1940.)

---

[4]) Es ist ja $\alpha - \dfrac{\alpha}{p} = \alpha\dfrac{p-1}{p} > 0$ und $-\dfrac{1}{p} > -1$.