# Bibliographie.

## E. Tornier, Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie, VI + 160 S, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1936.

Die durch v. Mises' Häufigkeits-Grenzwerttheorie 1919 heraufbeschworene Grundlagenkrise der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann, wie Nachklänge der Genfer Konferenz 1937 und neuere Arbeiten zeigen noch immer nicht als überwunden betrachtet werden. Die Notwendigkeit einer zeitgemäßen Erneuerung der erschütterten klassischen Grundlagen wird zwar bereits allgemein anerkannt, in bezug auf Methode und Ausmaß des Neubaus ist aber noch starke Divergenz feststellbar. Auf die Methode würde es nicht so sehr ankommen, falls die *synthetische* Methode ein System der durch die *axiomatische* Methode zusammengefassten darstellen würde. Torniers Untersuchungen, die seit 1936 in Buchform erweitert vorliegen, lassen aber deutlich erkennen, daß dies z. B. bei der v. Mises-Waldschen synthetischen und der Kolmogoroffschen axiomatischen nicht der Fall sein kann. Soll nämlich die Wahrscheinlichkeit einerseits als Grenzwert der relativen Häufigkeit von Wiederholungserscheinungen, andererseits als Mengenfunktion über den Merkmalraum solcher Erscheinungen, gedeutet werden, so kann eben diese Funktion, wie die beim Peano-Jordanschen Inhalt herangezogene, nur *endlich additiv*, nicht aber, wie jene beim — von KOLMOGOROFF eingeführten — Lebesgueschen Maß, *totaladditiv* sein.

Der zu dieser Einsicht nötigen allgemeinen Theorie der Mengenfunktionen ist der erste, gut Zweidrittel des Ganzen und viele originelle Beiträge enthaltende Teil des Tornierschen Buches gewidmet, während der Rest einer im obigen Sinne doppelt deutbaren Wahrscheinlichkeitsrechnung des Verfassers vorbehalten bleibt. Letztere kann allerdings — wie die erwähnte Inhaltstheorie der allgemeinen Maßtheorie — nur als eine Spezialisation der häufigkeitstheoretisch zwar nicht deutbaren, aber wesentlich umfangreicheren und doch übersichtlicheren Kolmogoroffschen Theorie aufgefasst werden.

T. v. Stachó.

## E. Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen (Hamburger math. Einzelschriften, Heft 16), IV + 79 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1934.

Nachdem die Frage nach der Existenz der Lösungen von beliebig vielen Differentialgleichungen mit beliebig vielen Variabeln von RIQUIER und TRESSE auf dem von CAUCHY gewiesenen Wege erledigt worden ist, haben E. CARTAN und GOURSAT eine umfassendere Integrationstheorie von solchen Differentialgleichungssystemen geschaffen, welche durch Annullieren von alternierenden Differentialformen beliebigen Grades entstehen.

(Die Differentialformen ersten Grades nennt man bekanntlich auch Pfaffsche Formen.) Verfasser will eine systematische Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen geben, wie sie sich bei konsequenter Verwendung der alternierenden Differentialformen gestaltet.

Es werden zunächst die Addition, Multiplikation und Differentiation der alternierenden Differentialformen erklärt und die Koordinateninvarianz des Kalküls bewiesen. Im nächsten Kapitel folgen funktionentheoretische und geometrische Zwischenbetrachtungen. Die Hauptergebnisse der Theorie werden in zwei Existenzsätzen ausgesprochen, welche im wesentlichen aussagen, daß eine mehrdimensionale Integralmannigfaltigkeit sukzessiv aus niedrigerdimensionalen aufgebaut werden kann.

Als Anwendung werden die vollständig integrierbaren Pfaffschen Systeme und die Zurückführung partieller Differentialgleichungen auf skalare und Pfaffsche Systeme behandelt. Im Anhange sind die Hauptsätze der Lieschen Gruppentheorie zusammengestellt.

E. Egerváry.

**Rudolf Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen,** VI + 137 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

Das vorzügliche Büchlein enthält alles in der Theorie und Anwendung landläufig Gebrauchte. Von den — für spezielle Fälle aus Partikularlösungen der Wellenformgleichung durch transzendente Überlagerung erhaltenen — Sommerfeldschen Integraldarstellungen als Definitionen ausgehend, durch die Potenz- bzw. (sowohl Hankelschen als Debyeschen) asymptotischen Reihen, die im Zeiger bzw. in der Veränderlichen algebraischen und transzendenten Funktionalgleichungen, sowie die Diskussion des Funktionenverlaufs, um erst bei den Reihen- und Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen durch Zylinderfunktionen referierend, mit Beispielen aus der Mechanik, sowie Feld- und Wärmetheorie zu schließen.

Bildliche Darstellungen fehlen zwar mit Berufung auf das — im Text erläuterte — Jahnke-Emdesche Tafelwerk, die auf Elemente der reellen und komplexen Funktionentheorie beschränkte mathematische Darstellung ist aber anschaulich und korrekt, die Angabe der Literatur und die Besprechung der dort zu findenden mannigfachen Bezeichnungen mustergültig.

T. v. Stachó.

**Joseph Miller Thomas, Differential Systems** (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XXI), IX + 118 pages, New York, American Mathematical Society, 1937.

This valuable work deals with the theory of systems of partial differential equations as developed by CARTAN. This theory concerns the existence of solutions. Many personal contributions of the author are included. The treatment is *axiomatic*, sometimes even at the expense of perspicuity. The author aims at the highest degree of accuracy. Conciseness renders possible to include a great quantity of matter.

A concise summary of Grassmann algebra and elimination theory of algebraic equations is given in the introductory chapters. Beyond the axiomatic treatment, the work differs essentially from others dealing with the same subject by basing the theory upon systems of algebraic equations and "inequations." The exhaustive treatment of algebraic differential systems is a model, from which a short chapter leads the reader to general differential systems. Examination of the integral varieties of non-linear pfaffian systems (introduced by GOURSAT) completes the enormous matter.

At the end consistency examples are given, i. e. proofs of the existence theorems, on which as assumptions the axiomatic treatment has been based. Finally illustrative examples throw light upon some details. Reviewer thinks that a few more of these would have greatly increased the clearness.

G. Hajós.

**Gustav Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XLVII), XVI + 436 S, Berlin, J. Springer, 1937.**

Es liegt uns hier *die erste und zugleich eine vorzügliche Monographie* des — über die positive Achse erstreckten — Integrals $\int a(t)e^{-st}dt = f(s)$, und zwar bei nach RIEMANN absolut integrablen $a(t)$ als Funktionentransformation $L(a(t)) = f(s)$ aufgefasst vor. Daß die Monographie dieses, bereits von EULER und insbesondere von LAPLACE zur Lösung von Differential- bzw. Differenzengleichungen angewandten Integrals, das recht frühzeitig als das stetige Analogon der Potenzreihe $\Sigma a_n e^{-sn}$ erkannt und in den letzten Jahrzehnten durch die und neben den Dirichletschen Reihen $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ gefördert wurde, so lange auf sich warten ließ, erklärt sich daraus, daß es weiten und scharfen Blickes, sowie besonderen Geschickes bedürfte, das über dasselbe zerstreute Material zu sammeln, und richtiges vom falschen trennend gar zu oft oberflächlichen Analogieschlüssen oder formalen Rechnungen eine sichere Grundlage zu schaffen.

Herr G. DOETSCH, der die Laplace-Transformation zur Lösung von Integro- bzw. partiellen Differentialgleichungen, zur Erforschung von tiefliegenden Funktionengleichungen, zur Untersuchung von divergenten Reihen und asymptotischen Entwicklungen mit zeitgemäßer Strenge in 30 Abhandlungen so erfolgreich heranzog, löste diese schwere, aber dankbare Aufgabe vollkommen. Sein Werk stellt in systematischem Aufbau alles dar, was sich um seine Untersuchungen gruppieren läßt und zwar mit eingehenden geschichtlichen Anmerkungen, sowie einem reichen Literaturverzeichnis versehen.

Der erste Teil bringt die Grundlagen, d. h. Sätze über Gegenstand- bzw. Bildbereich der Transformation, ihre Umkehrung und die durch sie bewirkte Abbildung von fundamentalen Operationen. Der zweite, etwas kürzere, die Anwendung auf die Ableitung von konvergenten Reihenentwicklungen und eine sehr beachtenswerte systematische Behandlung bisher zerstreuter Betrachtungen über asymptotisches Verhalten von Funktionen. Das letzte Drittel ist den reichen Anwendungen auf die Lösung (bzw. Feststellung) von Funktionengleichungen gewidmet. Insbesondere werden hier Integral- und Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstyp, sowie gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten besprochen und zwar am Beispiel der Wärme-, der Telegraphen- und der Potentialgleichung auch die feinsten Einzelheiten der Anfangs- und Randwertprobleme beleuchtend. Ausblicke auf Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten, auf die symbolische und funktionentheoretische Methode der Techniker, sowie eine Tabelle von Transformationsformeln beschließen dann das überaus reichhaltige Werk.

Als Kenner und Forscher des Gebietes zollen wir dem viele originelle Beiträge enthaltenden Werk volle Anerkennung und sehen seiner versprochenen, technischen Anwendungen bestimmten Fortsetzung gespannt entgegen.

T. v. Stachó.

**Siegfried Valentiner, Vektoranalysis** (Sammlung Göschen, 354), fünfte, erneut durchgesehene Auflage, 136 S., Berlin, Walter de Gruyter, 1938.

Die vorliegende fünfte Auflage des Büchleins enthält nur sehr wenig Änderungen gegenüber der letzten. Die verhältnismäßig ungewöhnt große Anzahl der Auflagen zeigt, daß die geschickt zusammengestellte kurze Darstellung der Vektoranalysis und einiger ihrer Anwendungen auf physikalische Probleme die verdiente Beachtung gefunden hat.

Béla v. Sz.-Nagy.

**D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik** (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XXVII), zweite Auflage, VIII + 133 S., Berlin, J. Springer, 1938.

Auf dem Titelblatt heißt es: zweite *verbesserte* Auflage; jedoch war im vorzüglichen und beliebten Werk — abgesehen von einer ungenauen Formulierung der Schlußregeln für den engeren Funktionenkalkül in der ersten Auflage — wohl nichts zu verbessern. Jedenfalls wurden die Fachausdrücke modernisiert und zugleich dem Hilbert-Bernaysschen Werk: *Grundlagen der Mathematik* angepaßt. Eine Unterscheidung zwischen freien und gebundenen Variablen in der Bezeichnung wurde im Gegensatz mit jenem Werk nicht unternommen.

Weggelassen wurde der Abriß der verzweigten Typentheorie, die ja nicht mehr diejenige Beachtung erfährt, die ihr zur Zeit der Erscheinung der ersten Auflage noch allgemein gewährt wurde. Dafür wurden die neueren Ergebnisse in der axiomatischen Erforschung des Aussagen- und

Prädikatenkalküls, sowie in der Reduktions- und Lösungstheorie des Entscheidungsproblems, auch betreffend die Unlösbarkeit desselben, *berücksichtigt*.

Das Buch ist auch heute in keiner Hinsicht von einem Werk gleichen Umfangs übertroffen.

L. Kalmár.

**Gerhard Kowalewski, Grundbegriffe und Hauptsätze der höheren Mathematik** insbesondere für Ingenieure und Naturforscher, 156 S., Berlin, Walter de Gruyter, 1938.

Wer es bereits versucht hat, Differential- und Integralrechnung denjenigen verständlich zu machen, die sie nicht aus rein wissenschaftlichem Interesse, sondern in erster Linie um der Anwendungen willen studieren, weiß aus Erfahrung, mit welchen Schwierigkeiten diese Aufgabe behaftet ist. Verzichtet man auf die Exaktheit, so besteht die Gefahr, daß der Student sein Vertrauen in den mathematischen Methoden verliert, was keineswegs das Verständnis ihrer Anwendungen fördert; beharrt man dagegen darauf, so fällt man leicht in die Versuchung, in schwierige Einzelheiten einzugehen, die wohl für den systematischen Aufbau, nicht aber für die Anwendungen wichtig sind.

Die lange Erfahrung Kowalewskis einerseits als Lehrer, andererseits als Verfasser von Lehrbüchern hat ihm auch bei der Lösung dieser schwierigen Aufgabe als Wegweiser gedient. Ohne ein Haar breit in Strenge nachzugeben, beschränkt er sich in denjenigen Teilen der Theorie, die für die Anwendungen belanglos sind, auf das notwendigste. Nach einer Vorbereitung über Koordinaten, Vektoren und Determinanten entwickelt er die Lehre von den Grenzwerten und die für die Anwendungen unentbehrlichen Grundkenntnisse aus der eigentlichen Differential- und Integralrechnung. Die Anschauung wird nicht nur zur Erleichterung schwieriger Gedankengänge herangezogen, sondern die ganze Darstellung, der Stil des Verfassers ist von Anschaulichkeit durchdrungen. Oft werden längere Ausführungen durch einen gutgewählten, anschaulichen Fachausdruck erspart.

Einige Übungsbeispiele, insbesondere aus den Anwendungsgebieten, würden den Wert des sonst vorzüglichen, auch für Studierende der Mathematik als erste Einführung sehr brauchbaren Lehrbuches wesentlich erhöhen.

L. Kalmár.

**Gabor Szegő, Orthogonal Polynomials** (American Math. Society Colloquium Publications, Volume XXIII), IX + 401 pages, New York, American Mathematical Society, 1939.

Orthogonal polynomials are a pet subject of the author, right from the beginning. While reading his present book, my mind wanders back to 1924, when, acting as a J. König's Prize referee, I had to report on his work, the first few years of his work indeed. I remember now, how I was struck by the simplicity and originality, in particular, of two of his papers, in which, starting from a most elementary theorem of Fejér's on the normalized representation of positive trigonometric polynomials, he developed a much simple but powerful method to deal with the asymptotic behaviour of orthogonal polynomials, of some very general types as well as with that of the "kernels" occuring in the corresponding expansion problems. Let me also mention a paper of his to which I added some remarks of my own; it dealt with functions analytical in the unit circle, with given modulus on the circle itself, and its results belong to the present subject as an important tool.

These were the beginnings of a life-work that led up to the present standard treatise on orthogonal polynomials. that is, I forgot to say, polynomials orthogonalized, with respect to a given mass distribution, on a real interval, finite or infinite, as well as on more general curves, on the unit circle in particular. The best known instances for the first case are the Jacobi polynomials, including the Legendre ones, further those of Hermite and Laguerre. The case of the unit circle includes, as its simplest item, the set $(z^n)$. $n$ running from $-\infty$ to $+\infty$ and with it, in an obvious sense, the classical Fourier set too. Orthogonal polynomials are related to hypergeometric, Bessel, and elliptic functions, to interpolation and mechanical quadrature. The present work is devoted partly to the study of special classes and to their applications, partly to the general theory, the author keeping, as far as possible, to elementary methods and general principles and entering upon more hardworking computation only when need arises, but even than taking care not to hide the essential ideas.

I am glad to recommend to the mathematical public the present standard work of a mathematician, teaching abroad, but born and educated in this country.

F. R.

**Constantin Carathéodory, Reelle Funktionen,** Band I: Zahlen, Punktmengen, Funktionen, VI + 184 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1939.

Das vorliegende Buch ist der erste Teil einer wesentlich neuen Bearbeitung der alten *Vorlesungen über reelle Funktionen* aus 1918. Der Inhalt entspricht ungefähr den ersten 229 Seiten des alten Buches: reelle Zahlen, Grenzbegriff, das wesentlichste über Punktmengen, stetige, halbstetige, punktiert und totalstetige und monotone Funktionen, stetige Abbildung und Funktionenfolgen. Wesentlich umgestaltet ist die Anordnung der Sätze und von den sich darbietenden Beweismethoden werden die erweiterungsfähigen bevorzugt, um so spätere Verallgemeinerungen vorzubereiten. Neu hinzugekommen sind ein integralloser, auch für allgemeinere topologische Räume gültiger, im wesentlichen auf TIETZE, 1915, zurückgehender Beweis von R. RADO für die Erweiterung des Definitionsbereichs von stetigen

Funktionen, ferner die der gleichmäßigen nahe verwandte „stetige“ Konvergenz und die normalen Familien von Funktionen.

Mit gespannter Erwartung sehen wir dem zweiten Bande entgegen, der die im alten Werke meisterhaft aufgebaute Maß- und Integrationstheorie enthalten soll, voraussichtlich in einer durch die allerneuesten Untersuchungen des Verfassers und Anderer über die Algebraisierung dieser Begriffe beeinflußten Darstellung.

F. R.

**B. L. van der Waerden, Moderne Algebra,** zweiter Teil (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band XXXIV), zweite verbesserte Auflage, VIII + 224 S., Berlin, J. Springer, 1940.

Die vorliegende zweite Auflage des zweiten Bandes des ausgezeichneten Werkes zeigt gegenüber der ersten folgende Änderungen auf: Die Paragraphen über Resultanten, da sie in der zweiten Auflage ins erste Band übernommen wurden, fallen jetzt natürlich weg. Dafür wurden die beiden letzten Kapitel, die hyperkomplexe Größen und ihre Darstellungen behandeln, entsprechend der stürmischen Entwicklung der neueren Algebrentheorie, erheblich erweitert und umgestaltet. Aber auch die übrigen Kapitel wurden einer sorgfältigen Revision unterzogen. Alles in Allem ist die zweite Auflage der *Modernen Algebra* jetzt ebenso modern, wie die erste Auflage vor zehn Jahren war, die Darstellung ist aber noch vollständiger geworden.

Béla v. Sz. Nagy.