Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie.

Von O. VARGA in Kolozsvár.

Obgleich die Minkowskische Geometrie ein Spezialfall der in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren behandelten Finslerschen Geometrie ist, scheint es doch wünschenswert eine direkte Herleitung dieser Geometrie zu geben. Dies umso eher, da die Minkowskische Geometrie in viel näherer Beziehung zur Euklidischen Geometrie steht, als dies von der Finslerschen gilt.

Der grundlegende Gedanke, der in dieser Arbeit verwendet wird, ist der folgende: der Minkowskische Raum ist ein affiner Raum, in dem jeder Richtung eine euklidische Maßbestimmung zugeordnet ist. Dementsprechend behandeln wir §. 1 den Minkowskischen Raum in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem. Im zweiten Paragraphen führen wir krummlinige Koordinaten ein. Es ist bemerkenswert, daß man dann den ganzen formalen Apparat der Finslerschen Geometrie erhält. Dies ist ein Analogon zur Tatsache, daß der auf krummlinige Koordinaten bezogene Euklidische Raum den formalen Apparat der Riemannschen Geometrie liefert. Wie E. Cartans Behandlungsweise der Riemannschen Geometrie zeigt[1]), sind diese Zusammenhänge nicht bloß formal bedingt, sondern haben einen weitgehenden inneren Grund. Derselbe ermöglicht E. CARTAN die einfache und elegante Herleitung der Riemannschen Geometrie[2]). Der entsprechende Aufbau der Finslerschen Geometrie mit Hilfe der Minkowskischen ist ebenfalls möglich und soll an anderer Stelle behandelt werden[3]).

---

[1]) E. CARTAN (1), S. 39—59. (S. Schriftenverzeichnis am Ende vorliegender Arbeit.)

[2]) E. CARTAN (1), S. 90—180.

[3]) O. VARGA (2).

Die Krümmungstheorie wird in §. 3 nur ganz kurz berührt, da bei ihrer Behandlung fast kein Unterschied gegenüber den Gedankengängen zu verzeichnen ist, die zu denselben Zwecken in der Finslerschen Geometrie verwendet werden. Als Anwendung der Krümmungstheorie weisen wir nach, daß der Minkowskische Raum unter den Finslerschen durch das Verschwinden zweier Tensoren ausgezeichnet ist. Diese Charakterisierung wurde ohne Beweis von E. CARTAN angegeben[4]).

§. 1. Der Minkowskische Raum in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem.

1. Definition des Minkowskischen Raumes und Zusammenhang mit dem Euklidischen Raum. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit heißt ein Minkowskischer Raum, wenn es in ihr ein System von Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^n$ gibt, so daß die Entfernung zweier benachbarter Punkte (x) und $(x+dx)$ durch

$$(1,1) \qquad ds = L(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$$

oder kürzer

$$(1,1') \qquad ds = L(dx)$$

gegeben ist. Von $L(dx)$ soll vorausgesetzt werden, daß es beständig positiv, ferner in den $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$ positiv-homogen von erster Dimension ist und nach diesen Veränderlichen stetige Ableitungen bis zur 4. Ordnung besitzt. Die quadratische Form[5])

$$(1,2) \qquad \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} L^2(dx)\right)}{\partial dx^i \, \partial dx^k} Z^i Z^k$$

der Hilfsveränderlichen $Z^i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sei für alle Wertesysteme der $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$ positiv definit.

Geht man von dem Koordinatensystem $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ durch eine beliebige stetig differenzierbare und umkehrbare Transformation

$$(1,3) \qquad x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zu einer Koordinatenbestimmung $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ über, so wird in derselben das Bogenelement wegen (1, 1) die Form

---

[4]) E. CARTAN (2), S. 39.

[5]) Tritt ein Zeiger in einem Ausdruck mehr als einmal auf, so soll nach demselben — ohne Angabe eines Summationszeichens — summiert werden.

$$(1,4)\qquad ds = L\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^s}du^s, \frac{\partial x^2}{\partial u^s}du^s, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial u^s}du^s\right) \equiv$$
$$\equiv \mathsf{L}(u^1, u^2, \ldots, u^n, du^1, du^2, \ldots, du^n)$$

annehmen. In dem neuen Koordinatensystem wird also das Bogenelement insofern durch einen komplizierteren Ausdruck angegeben, da außer den Differentialen (du) auch die Punktkoordinaten (u) auftreten.

Wir wollen ein Koordinatensystem, in dem das Bogenelement nur von den Differentialen abhängt, als ein ausgezeichnetes bezeichnen. Aus (1, 3) und (1, 4) folgt sofort, daß man aus einem ausgezeichneten Koordinatensystem sämtliche übrige durch lineare Transformationen erhält. Im Falle einer Translation bleibt die Funktion $L(dx)$ ungeändert.

Wir wollen einen Minkowskischen Raum — bei Verwendung eines ausgezeichneten Koordinatensystems — als einen *affinen Raum* auffassen, dem durch (1, 1) eine Maßbestimmung aufgeprägt ist. Das verwendete Koordinatensystem soll daher statt ausgezeichnet als *kartesisch* bezeichnet werden. Eine für späteres wichtige Feststellung ist die folgende: Ist ein Vektorfeld gegeben, so ist die Ableitung des Feldvektors in allen kartesischen Koordinatensystemen wieder ein Vektor. Allgemeiner wird der tensorielle Charakter von Größen in kartesischen Koordinatensystemen durch Differentiation nicht gestört. Dies folgt unmittelbar aus der Definition eines Tensors durch Transformationsgleichungen und aus dem Umstand, daß man von einem kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen durch lineare Transformationen gelangt.

Ausgehend von (1, 1) kann man auch den Abstand $d(x_0 x_1)$ eines beliebigen Punktes (x_1) von (x_0) erklären. Man betrachtet dazu die orientierte Gerade, die von x_0 nach x_1 läuft. Ist

$$(1,5)\qquad x^i = x_0^i + a^i(t - t_0) \qquad (a^i > 0,\ i = 1, 2)$$

ihre Parameterdarstellung und entspricht dem Punkte x_ϱ der Parameterwert t_ϱ $(\varrho = 0, 1)$, so soll $d(x_0, x_1)$ durch

$$(1,6)\qquad d(x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(\frac{dx}{dt}\right) dt$$

definiert sein. Wegen (1, 5) und der Homogenität von $L(dx)$ ergibt sich aus (1, 6)

$$d(x_0, x_1) = L(x_1 - x_0). \tag{1, 7}$$

Der Vektor ξ^i mit dem Komponenten $x^i - x_0^i$ ist daher dann und nur dann ein Einheitsvektor, wenn

$$L(\xi) = 1 \tag{1, 8}$$

besteht.

Trägt man von einem beliebigen Punkt (x_0) nach allen Richtungen Einheitsvektoren ab, so ist der Ort ihrer Endpunkte (x) die Hyperfläche

$$L(x - x_0) = 1 \tag{1, 9}$$

die Indikatrix oder Eichfläche des Punktes (x_0). Die Indikatrizen verschiedener Punkte gehen durch Translation auseinander hervor. Wegen (1, 2) ist die Indikatrix eine konvexe Hyperfläche.

Wir wollen jetzt jeder Richtung des Minkowskischen Raumes eine Euklidische Maßbestimmung zuordnen. Dazu betrachten wir eine beliebige, aber feste Richtung $\dot{x}_0^i$ durch einen ebenfalls willkürlichen Punkt x_0^i. Die Komponenten des Einheitsvektors dieser Richtung sind wegen (1, 8)

$$\xi_0^i = \frac{\dot{x}_0^i}{L(\dot{x}_0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1, 10}$$

Es gibt nur eine einzige Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung, die den Punkt x_0^i zum Mittelpunkt hat und die Indikatrix des Punktes x_0^i im Punkte mit dem Koordinaten

$$x^i = x_0^i + \xi_0^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1, 11}$$

oskuliert. Sie hat in laufenden Koordinaten $X^1, X^2, \ldots, X^n$ die Gleichung

$$g_{ik}(\dot{x}_0)(X^i - x_0^i)(X^k - x_0^k) = 1, \tag{1, 12}$$

wobei

$$g_{ik}(\dot{x}) = \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} L^2(\dot{x})\right)}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^k} \tag{1, 13}$$

ist. Die $g_{ik}(\dot{x})$ sind in beiden Zeigern symmetrisch und von nullter Dimension positiv-homogen in den $\dot{x}^i$. Sie hängen also nur von der Richtung des Vektors $\dot{x}^i$ und nicht von seiner Länge ab.

Die Hyperfläche (1, 12) heißt die oskulierende Indikatrix oder oskulierende Eichfläche des Punktes (x_0) nach der Richtung $\dot{x}_0^i$. Die oskulierenden Indikatrizen verschiedener Punkte nach der gleichen Richtung $\dot{x}_0^i$ gehen durch Translation auseinander hervor. Bei festgehaltener Richtung $\dot{x}_0^i$ ist die Maßbestimmung

$$d\sigma^2 = g_{ik}(\dot{x})\, dx^i\, dx^k, \tag{1, 14}$$

deren Indikatrix in jedem Punkte x_0 die dort nach Richtung $\dot{x}_0^i$ oskulierende Indikatrix ist, eine Euklidische Maßbestimmung, die der Richtung $\dot{x}_0^i$ zugeordnet ist. Sie heißt die nach der Richtung $\dot{x}_0^i$ oskulierende Maßbestimmung des Minkowskischen Raumes. Sie ergibt natürlich nur für Vektoren der Richtung $\dot{x}_0^i$ dieselbe Länge wie die Maßbestimmung (1, 1).

Durch die oskulierende Maßbestimmung wird jeder Richtung $\dot{x}^i$ des Minkowskischen Raumes ein Euklidischer Raum zugeordnet. Er möge als der Euklidische Raum $(\dot{x})$ bezeichnet werden. Der oskulierenden Maßbestimmung entsprechen im Euklidischen Raum $(\dot{x})$ diejenigen kartesischen Koordinatensysteme, deren Maßvektoren[6]) $\underset{(i)}{e_k}$ den Gleichungen

$$\underset{(i)}{e_s}\,\underset{(k)}{e_s} = g_{ik}(\dot{x}) \tag{1, 15}$$

genügen. Aus diesen $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$, der Richtung $\dot{x}^i$ zugeordneten kartesischen Koordinatensystemen greifen wir ein beliebiges heraus und *setzen fest, daß sich dasselbe in stetig differenzierbarer Weise mit der Richtung $\dot{x}^i$ ändern soll,* d. h. die Komponenten der Maßvektoren seien stetig differenzierbare Funktionen der $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n$.

Es ist jetzt möglich, die Länge von Vektoren *in Bezug auf eine Richtung* $(\dot{x})$ zu erklären. Man versteht darunter die Länge l des Vektors $\vec{\xi}$ im zugeordneten Euklidischen Raum $(\dot{x})$

$$l = \sqrt{g_{ik}(\dot{x})\xi^i\xi^k}. \tag{1, 16}$$

Die Länge l ist unabhängig davon, in welchem Punkte der Vektor angebracht wird. Der Cosinus des Winkels ϑ zweier Vektoren $\vec{\xi}$ und $\vec{\eta}$ in Bezug auf die Richtung ist entsprechend gegeben durch

$$\cos\vartheta = \frac{g_{ik}(\dot{x})\,\xi^i\,\eta^k}{\sqrt{g_{ik}(\dot{x})\,\xi^i\xi^k}\,\sqrt{g_{ik}(\dot{x})\eta^i\eta^k}}. \tag{1, 17}$$

Allgemein wollen wir als skalares Produkt zweier Vektoren den folgenden Ausdruck bezeichnen:

$$\vec{\xi}\,.\,\vec{\eta} = g_{ik}\xi^i\eta^k. \tag{1, 17'}$$

[6]) In der Bezeichnung $\underset{(i)}{e_k}$ bedeutet der in Klammer stehende Zeiger i den Vektor, der zweite Zeiger k gibt die Komponente an.

2. **Das invariante Differential.** Durch die oben getroffenen Festsetzungen ist ein Vektor wesentlich an die Richtung $(\dot{x})$ gebunden. Wir wollen nun festsetzen, daß wir unter Parallelverschiebung einer Richtung $\dot{x}^i$ die gewöhnliche Paralellverschiebung im affinen Raum $x^1, x^2, \ldots, x^n$ verstehen. Zwei parallelen Richtungen entsprechen somit proportionale $\dot{x}^i$. Entsprechend wollen wir unter der Parallelverschiebung eines Vektors $\vec{\xi}$ von einem Punkte des Raumes nach einem anderen, bei paralleler Richtung $(\dot{x})$, die gewöhnliche Parellelverschiebung im Euklidischen Raum $(\dot{x})$ verstehen. Wir wollen nun Festsetzungen treffen zum Vergleich zweier Vektoren, die zu verschiedenen Richtungen gehören. Diese Festsetzungen sollen infinitesimalgeometrisch gemacht werden. Durch den Feldvektor $\vec{V}(x, \dot{x})$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld festgelegt. Dabei sei zugelassen, daß in $\vec{V}(x, \dot{x})$ die Variablen $x^1, x^2, \ldots, x^n$ nicht vorkommen, d. h., daß sämtliche Vektoren denselben Angriffspunkt haben. Sind $V^i(x, \dot{x})$ die Komponenten des Feldvektors, dann können wir den Vektor der Richtung $(x, \dot{x})$ sofort mit dem Vektor der willkürlichen benachbarten Richtung $(x + dx, \dot{x} + d\dot{x})$ vergleichen. Der Unterschied beider Vektoren wird durch $dV^i(x, \dot{x})$ angegeben, dies ist nämlich nach einer früher gemachten Bemerkung wieder ein Vektor. Nicht so einfach, für unsere Zwecke aber wichtiger gestaltet sich der Vergleich benachbarter Vektoren in den Komponenten $v^i(x, \dot{x})$ des Feldvektors in Bezug auf das lokale Koordinatensystem $\underset{(i)}{e_k}$, das der Richtung $(\dot{x})$ zugeordnet ist. Der Zusammenhang der v^i und V^i ist durch

$$(1, 18) \qquad V^i = \underset{(s)}{e_i} v^s$$

bestimmt. Unsere Aufgabe besteht nun darin, diejenigen Größen Dv^i zu bestimmen, die der Gleichung

$$(1, 19) \qquad dV^i = \underset{(s)}{e_i} Dv^s$$

genüge leisten. Differentiation der Gleichung (1, 18) zeigt, daß wir dazu nur die Größen $d\underset{(s)}{e_i}$ bestimmen, d. h. aus der Maßfunktion $L(dx)$ und ihren Ableitungen heraus berechnen müssen.

Nach der schon zuvor benützten Bemerkung sind die Größen $d\underset{(s)}{e_i}$ und ebenso natürlich $\dfrac{\partial \underset{(s)}{e_i}}{\partial \dot{x}^k}$ (bei festen s und k) Vektoren, daher lassen sie sich aus den $\underset{(s)}{e_i}$ linear kombinieren. Es ist also

$$(1, 20) \qquad \frac{\partial \underset{(s)}{e_i}}{\partial \dot{x}^k} = C^r_{sk} \underset{(r)}{e_i}$$

mit Koeffizienten C^r_{sk}, die nur Funktionen von $\dot{x}^i$ sind, da wir ja den fraglichen Vektor im Ursprung des Koordinatensystems der $\underset{(r)}{e_i}$ — das nur von $\dot{x}^i$ abhängt — ansetzen. Aus (1, 15) ergibt sich ferner durch Differentiation und nochmaliger Benützung dieser Gleichungen selbst

$$(1, 21) \qquad C^l_{ir} g_{lk} + C^l_{kr} g_{li} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^r}.$$

Um die Größen C^l_{ir} vollständig durch die Funktion $L(dx)$ und ihren Ableitungen zu bestimmen, stellen wir noch die folgende Symmetrieforderung

$$(1, 22) \qquad C_{ikr} = C_{kir};$$

dabei haben wir

$$(1, 23) \qquad C_{ikr} = C^l_{ir} g_{lk}$$

gesetzt. Jetzt ergibt sich aus (1, 21) und (1, 13)

$$(1, 24) \qquad \boxed{C_{ikr} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}(\dot{x})}{\partial \dot{x}^r} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 (L^2(\dot{x}))}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^r}.}$$

Für $d\underset{(s)}{e_i}$ ergiebt sich somit

$$(1, 25) \qquad d\underset{(s)}{e_i} = C^r_{sk} \underset{(r)}{e_i} d\dot{x}^k.$$

Differentiation von (1, 18) gibt somit bei Beachtung von (1, 25)

$$(1, 26) \qquad dV^i = \underset{(s)}{e_i}(dv^s + C^s_{kl} v^k d\dot{x}^l).$$

Vergleich von (1, 19) und (1, 25) ergibt

$$(1, 27) \qquad Dv^s = dv^s + C^s_{kl} v^k d\dot{x}^l.$$

Man bezeichnet Dv^s als das invariante Differential der Größen v^s.

Die Größen C_{ikr} sind, wie aus (1, 24) folgt, in allen drei Zeigern symmetrisch und in den $\dot{x}^i$ von (-1)-ter Ordnung positiv-homogen. Aus der letztgenannten Eigenschaft folgt noch

$$(1, 28) \qquad C_{ikr}(\dot{x})\dot{x}^i = C_{ikr}\dot{x}^k = C_{ikr}\dot{x}^r = 0.$$

Da, wie oben bemerkt, Differentiation den tensoriellen Charakter einer Größe nicht ändert, sind die C_{ikr} ein Tensor dritter Stufe.

Bemerkung. Daß die Größen $\underset{(r)}{de_i}$ durch die $dg_{ik}(\dot{x})$ im wesetlichen bestimmt sind, ist wegen der Festlegung der Koordinatensysteme $\underset{(s)}{e_i}$ durch die g_{ik} ziemlich naheliegend. Die $\underset{(s)}{e_i}$ — genauer bloß ihre gegenseitige Lage — sind durch die g_{ik} bestimmt, die Nachbarvektoren $\underset{(s)}{e_i}+\underset{(s)}{de_i}$ daher durch den Nachbarwert der g_{ik}, also durch $g_{ik}+dg_{ik}$.

§. 2. Der Minkowskische Raum, auf krummlinige Koordinaten bezogen.

1. Einführung der krummlinigen Koordinaten und lokale Minkowskische Räume, die auf kartesische Koordinaten bezogen sind. In §. 1, 1 hatten wir, um die ausgezeichneten oder kartesischen Koordinaten definieren zu können, durch die Transformation (1, 3) Koordinaten $u^1, u^2, \ldots, u^n$ eingeführt, die wir als allgemeine oder auch krummlinige Koordinaten bezeichnen wollen. Wie wollen nun einen auf krummlinige Koordinaten bezogenen Minkowskischen Raum näher untersuchen. Zunächst einige Feststellungen über die Funktion $L(dx)$ und die aus ihr hergeleiteten Tensoren $g_{ik}(dx)$ und $C_{ikl}(dx)$ in den krummlinigen Koordinaten. Die Eigenschaft der Funktion $L(dx)$, in den Differentialen positiv-homogen von 1-ter Dimension zu sein, wird durch die Transformation (1, 3) nicht gestört, d. h. $\mathsf{L}(u, du)$ ist in den du^i positiv-homogen von 1-ter Dimension.

Die Größen $\dot{x}^i$, $g_{ik}(\dot{x})$, $C_{ikl}(\dot{x})$ sind Tensoren, transformieren sich also bei Ausübung von (1, 3) gemäß

$$(2,1)\qquad \begin{cases} \dot{x}^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\dot{u}^k, \\[2mm] g_{ik}(u, \dot{u}) = g_{rs}(\dot{x})\,\dfrac{\partial x^r}{\partial u^i}\,\dfrac{\partial x^s}{\partial u^k}, \\[2mm] C_{ikl}(u, \dot{u}) = C_{rsp}(\dot{x})\,\dfrac{\partial x^r}{\partial u^i}\,\dfrac{\partial x^s}{\partial u^k}\,\dfrac{\partial x^p}{\partial u^l}. \end{cases}$$

Die $g_{ik}(u, \dot{u})$ und $C_{ikl}(u, \dot{u})$ drücken sich durch die Funktion $\mathsf{L}(u, \dot{u})$ und ihre Ableitungen folgendermaßen aus:

$$(2,2)\qquad \begin{aligned} g_{ik}(u, \dot{u}) &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial \dot{u}^i \partial \dot{u}^k}\,(\mathsf{L}^2(u, \dot{u})), \\ C_{ikl}(u, \dot{u}) &= \frac{1}{4}\,\frac{\partial^3(\mathsf{L}^2(u, \dot{u}))}{\partial \dot{u}^i \partial \dot{u}^k \partial \dot{u}^l}. \end{aligned}$$

(2, 2) zeigt, daß die Größen $g_{ik}(u, \dot{u})$ und $C_{ikl}(u, u)$ in Bezug auf u^i von nullter bzw. (-1)-ter Dimension positiv-homogen sind. Die Symmetrieeigenschaft bleibt natürlich auch bestehen, da diese ja bei Tensoren koordinateninvariant ist. Ebenso besteht auch hier die Tensorrelation (1, 28).

Unser, auf ein kartesisches Koordinatensystem $x^1, x^2, \ldots, x^n$ bezogene Minkowskische Raum erscheint bei Ausübung der Transformation (1, 3) von einem Kurvennetz bedeckt, das natürlich durch die Linien

$$(2, 2) \qquad u^i = c \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gebildet wird. In einem festen, aber beliebigen Punkt (u) des Raumes bestimmt dieses Kurvennetz durch seine Tangentenvektoren n Vektoren:

$$(2, 3) \qquad \underset{(i)}{e_s} = \frac{\partial x^s}{\partial u^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Andererseits wird durch Festhalten eines solchen beliebigen Punktes (u) demselben ein lokaler, auf kartesische Koordinaten bezogener Minkowskischer Raum zugeordnet, da ja dann in $L(u, \dot{u})$ nur die $\dot{u}^i$ variabel sind. Jedem Linienelement $(u, \dot{u})$ ist nun nach §. 1, 1 derjenige Euklidische Raum $(\dot{x})$ zugeordnet, dessen Komponenten $\dot{x}^i$ (2, 1) entsprechen. Wir wollen diesen Raum als den Euklidischen Raum $(u, \dot{u})$ bezeichnen. Als Maßvektoren dieses, auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogenen Minkowskischen Raumes können wir die Vektoren (2, 3) verwenden. Dazu ist nur zu zeigen, daß das skalare Produkt zweier Vektoren $\underset{(i)}{e_i^{\cdot}}$ (*im Koordinatensystem* $x^1, x^2, \ldots, x^n$!) die Größen $g_{ik}(u, \dot{u})$ ergeben. Der analytische Ausdruck hiefür wir aber bei Beachtung von (1, 17') und (2, 3) durch (2, 1) geliefert.

2. **Übertragung von Vektoren, das invariante Differential.** Nach §. 1, 2 bedeutet Parallelität zweier Richtungen Parallelität im Sinne der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie. Wir betrachten nun in einem gewissen Bereich $\mathfrak{B}$ ein Feld von parallelen Richtungen. Die Gleichung des Feldvektors sei

$$(2, 4) \qquad u^i = \dot{u}^i(u^1, u^2, \ldots, u^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Funktionen (2, 4) sind dabei auf $\mathfrak{B}$ definiert. Die Überlegungen von § 1, 2 zeigen, daß in $\mathfrak{B}$ ein auf krummlinige Koordinaten $u^1, u^2, \ldots, u^n$ bezogener Euklidischer Raum vorliegt. Sein Maßtensor wird durch

$$(2,5)\quad \gamma_{ik}(u^1, u^2, \dots, u^n) = \\ = g_{ik}(u^1, u^2, \dots, u^n, \dot{u}^1(u^1, u^2, \dots, u^n), \dots, \dot{u}^n(u^1, u^2, \dots, u^n))$$

bestimmt. In einem solchen Raum genügt aber der Feldvektor eines Parallelbündels (2, 4) der folgenden Differentialgleichung:

$$(2,6)\qquad d\dot{u}^i = \Gamma^{*\,i}_{kl}\dot{u}^k du^l.$$

Dabei sind die $\Gamma^{*\,i}_{kl}$ die mit Hilfe der γ_{ik} gebildeten Christoffelschen Symbole zweiter Art[7]).

Die Übertragung eines Vektors v^i von einem beliebigen Linienelement $(u, \dot{u})$ zu einem beliebigen benachbarten parallelen Linienelement $(u + du, \dot{u} + d\dot{u})$ — natürlich innerhalb eines Bereiches der Art $\mathfrak{B}$ — wird dann gleichfalls entsprechend dem in § 1, 2 Auseinandergesetzten und den Tatsachen, die in einem auf krummlinige Koordinaten bezogenen Euklidischen Raum bestehen, durch

$$(2,7)\qquad Dv^i = dv^i + \Gamma^{*\,i}_{kl} v^k du^l$$

ausgedrückt[7]). Der Parallelismus eines Vektorfeldes v^i bedeutet:

$$(2,8)\qquad Dv^i = 0.$$

Wir wollen jetzt die Übertragung eines Vektors von einem beliebigen Linienelement $(u, \dot{u})$ zu einem beliebigen benachbarten — nicht parallelen — Linienelement $(u + du, \dot{u} + d\dot{u})$ herleiten. Dies wird in zwei Schritten erfolgen. Erstens: Übertragung des Vektors v^i von $(u, \dot{u})$ zu dem benachbarten, aber parallelen Linienelement $(u + du, \dot{u} + d^*\dot{u})$. Zweitens: Übergang von dem Linienelement $(u + du, \dot{u} + d^*\dot{u})$ zu dem Linienelement $(u + du, \dot{u} + d\dot{u})$ gleichen Zentrums. Der erste Schritt vollzieht sich nach (2, 7), der zweite nach (1, 27). Wir wollen den analytischen Ausdruck, den wir durch diese Überlegungen gewinnen, herleiten. Bezeichnen wir das invariante Differential, das zu dem ersten Schritt gehört, mit $D_\pi v^i$ und mit $D_\varrho v^i$ das zum zweiten Schritt gehörige, so ergibt sich als Ausdruck für das invariante Differential

$$(2,9')\qquad Dv^i = D_\pi v^i + D_\varrho(v^i + D_\pi v^i),$$

oder, da wir Größen von höherer als erster Ordnung vernachläßigen,

$$(2,9)\qquad Dv^i = D_\pi v^i + D_\varrho v^i.$$

[7]) E. Cartan (1), S. 39, Gleichungen (15).

Nach (2, 7) gilt für $D_\pi v^i$:

(2, 10) $$D_\pi v^i = d^* v^i + \Gamma^{*\,i}_{kl} v^k du^l.$$

d^* deutet an, daß das Differential bezüglich des Zuwachses $(u+du, \dot u + d^* \dot u)$ zu bilden ist. Um von dem Linienelement $(u+du, \dot u + d^* \dot u)$ zu dem Linienelement von gleichem Zentrum $(u+du, \dot u + d\dot u)$ zu gelangen, muß der Richtung $\dot u + d^* \dot u$ der Zuwachs

(2, 11) $$d\dot u - d^* \dot u = \bar d \dot u$$

erteilt werden. Dann kommt für $D_\varrho v^i$ wegen (1, 27)

(2, 12) $$D_\varrho v^i = \bar d v^i + C^i_{kl} v.$$

Die Summe der Differentiale $\bar d + d^*$ wollen wir mit d bezeichnen, dann erhalten wir aus (2, 9) zufolge (2, 10), (2, 11) und (2, 12) für Dv^i schließlich

(2, 13) $$Dv^i = dv^i + C^i_{kl} v^k d\dot u^l + \Gamma^{*\,i}_{kl} v^k du^l - C^i_{kl} v^k d^* \dot u^l.$$

In (2, 13) sind die $d^* \dot u^l$ diejenigen Differentiale, die das zu $\dot u^l$ parallele Linienelement im Punkte $(u+du)$ bestimmen. Für dieselben gilt aber (2, 6). Führt man dies in (2, 13) ein, so erhält man

(2, 14) $$Dv^i = dv^i + C^i_{kl} v^k d\dot u^l + \Gamma^i_{kl} v^k du^l,$$

wobei

(2, 15) $$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^{*\,i}_{kl} + C^i_{ks} \Gamma^{*\,s}_{rl} u^r.$$

Da die $\Gamma^{*\,i}_{kl}$ die zu dem Maßtensor γ_{ik} gehörigen Christoffelschen Symbole sind, erhält man bei Beachtung von (2, 5), (2, 2) und (2, 6)

(2, 16) $$\Gamma^*_{ilk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\right) - \\ - C_{ils} \Gamma^{*\,s}_{kj} \dot u^j - C_{kls} \Gamma^{*\,s}_{ij} \dot u^j + C_{iks} \Gamma^{*\,s}_{lj} u^j.$$

Überschiebt man (2, 16) mit $\dot u^i$ und $\dot u^k$, so ergibt sich wegen (1, 28), (2, 2) und der Homogenitätseigenschaft von $\mathsf{L}(u, \dot u)$

(2, 17) $$\Gamma^*_{ilk} \dot u^i u^k = 2 G_l = 2 G^s g_{sl}.$$

Dabei haben wir

(2, 18) $$G_l = \frac{\partial^2(\mathsf{L}^2)}{\partial \dot u^l \partial u^k} \dot u^k - \frac{\partial(\mathsf{L}^2)}{\partial u^l}$$

gesetzt. Benützen wir die Gleichungen (2, 16) bis (2, 18), so erhält man

$$(2,19)\qquad \Gamma^{*s}_{kj}\dot{u}^k = \frac{\partial G^s}{\partial \dot{u}^j}.$$

Substituiert man dies in die linke Seite von (2, 16), so kommt schließlich

$$(2,20)\qquad \begin{aligned}\Gamma^*_{ilk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\right) - \\ - C_{ils}\frac{\partial G^s}{\partial \dot{u}^k} - C_{kls}\frac{\partial G^s}{\partial \dot{u}^i} + C_{iks}\frac{\partial G^s}{\partial \dot{u}^l}.\end{aligned}$$

Die Γ^*_{ilk} bestimmen zufolge (2, 15) auch die Übertragungsparameter Γ_{ilk} in der Form[8])

$$(2,21)\qquad \Gamma_{ilk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\right) - C_{kls}\frac{\partial G^s}{\partial \dot{u}^i} + C_{iks}\frac{\partial G^s}{\partial \dot{u}^l}.$$

In der Finslerschen Geometrie[9]) wird das Bogenelement ebenfalls durch einen Ausdruck der Form (1, 4) bestimmt. Die „Grundfunktion" $L(u, \dot{u})$ genügt dabei denselben Voraussetzungen, wie im Falle einer Minkowskischen Geometrie, nur gibt es hier kein ausgezeichnetes Koordinatensystem, d. h. es ist unmöglich, durch eine Koordinatentransformation die Grundfunktion auf die Form (1, 1) zu bringen. Das invariante Differential für Finslersche Räume stimmt formal ebenfalls mit demjenigen in Minkowskischen Räumen überein, vorausgesetzt, daß derselbe auf krummlinige Koordinaten bezogen wird. Die Übertragungsparameter C_{ikl}, Γ^*_{ikl} und Γ_{ikl} drücken sich in beiden Fällen (immer unter der Voraussetzungen, daß der Minkowskische Raum auf krummlinige Koordinaten bezogen wird) genau auf dieselbe Weise durch den Fundamentaltensor und seine Ableitungen aus[10]). Wegen (1, 2) kann man auch sagen, sie bestimmen sich auf dieselbe Weise aus der Grundfunktion heraus. Da durch Bogenelement und invariantes Differential die Finslersche Geometrie im wesentlichen bestimmt ist, ist zu erwarten, daß diese Analogie sicher über das Formale hinausgeht. In der Tat läßt sich — wie schon einleitend bemerkt — zeigen, daß man den Finslerschen Raum mit Hilfe Minkowskischer Räume aufbauen kann.

---

8) Die Berechnung von (2, 20) und (2, 21) findet sich in etwas anderem Zusammenhange bei E. Cartan (2), S. 16.

9) Vgl. P. Finsler (1), E. Cartan (2) und O. Varga (1).

10) Vgl. O. Varga (1), S. 174.

§. 3. Die Krümmungstheorie.

Die Methoden zur Darstellung der Torsions- und Krümmungstheorie von Minkowskischen Räumen, die auf krummlinige Koordinaten bezogen sind, stimmen ganz mit denjenigen für Finslersche Räume überein. Dies folgt unmittelbar daraus, daß man in beiden Fällen wohl am einfachsten mit Hilfe der Cartanschen Methode der äußeren Produkte und äußeren Ableitung Pfaffscher Formen zu dieser Darstellung gelangt[11]. Dabei benützt man bei dieser Darstellung als Ausgangselemente die Tensoren g_{ik}, C_{ikl}, und ferner diejenigen, die sich aus ihnen durch Anwendung des invarianten Differentials herleiten lassen.

Die Torsionstensoren erhält man in dem Koeffizientensystem der äußeren quadratischen Form

$$\Omega^i = [du^s\, \omega(d)^i_s] \tag{3, 1}$$

und die Krümmungstensoren aus dem Koeffizientensystem der Form

$$\Omega^i_k = [\omega^s_k(d)\, \omega^i_s(d)] - (\omega(d)^i_k)'. \tag{3, 2}$$

Dabei wurde gesetzt

$$\omega(d)^i_s = \mathsf{L}\,.\, C^{\,i}_{sk}\, \omega^k(d) + \Gamma^{*i}_{sk} du^k \tag{3, 3}$$

und $\omega^k(d)$ bedeutet das invariante Differential des Einheitsvektors l^i, also:

$$\omega^i(d) = Dl^i = D\left(\frac{u^i}{\mathsf{L}(u, u)}\right). \tag{3, 4}$$

Da also die verwendeten Größen in beiden Geometrien formal übereinstimmen, erhält man vom formalen Standpunkte aus auch dieselben Torsions- und Krümmungstensoren[12].

Wie in Finslerschen Räumen folgt aus (3, 1), daß auch der Minkowskische Raum nur einen Torsionstensor besitzt und zwar:

$$A_{ikl} = \mathsf{L}\, C_{ikl}. \tag{3, 5}$$

Wegen der Koordinateninvarianz der ausgeführten Operationen können wir statt krummliniger Koordinaten auch die kartesischen Koordinaten des §. 1 verwenden und auf diese die Cartansche Symbolik anwenden. Da in den kartesischen Koordinaten die Γ^{*}_{ikl} verschwinden, zeigt sich, daß von den drei Krümmungstensoren,

---

[11]) E. Cartan (1), Kap. VII.

[12]) Wir verweisen hier so wie für den ganzen §. 3. auf E. Cartan (2), Kap. XIII. Die dort verwendete Bezeichnung der Krümmungstensoren wurde von uns übernommen.

die durch (3, 2) bestimmt werden, nur ein einziger von Null verschieden ist. Derselbe hat die Gestalt

$$S_{ijkh} = L^2(u, \dot{u})\,(C_{imh} C^m_{jk} - C_{imk} C^m_{jh}). \tag{3, 6}$$

P_{ijkh} und R_{ijkh} sind Nulltensoren[11]). Bei Benützung von kartesischen Koordinaten kann man weiter feststellen, daß auch der Tensor $C_{ikl/m}$, mit dessen Hilfe sich P_{ijkh} gewinnen läßt, verschwindet[13]).

Umgekehrt läßt sich nun zeigen, daß das Verschwinden von R_{ijkl} und $C_{ikl/m}$ die Minkowskischen Räume unter den Finslerschen auszeichnet. Diese Charakterisierung findet sich ohne Beweisangabe bei E. Cartan[11]). Der Beweis kann etwa so geführt werden: Wir halten in $g_{ik}(u, \dot{u})$ $\dot{u}^i$ fest — betrachten diese Größen im wesentlichen als Parameter — und leiten dann aus diesen nunmehr nur von u^i abhängenden Tensor den vierfachen kovarianten Riemann—Christoffelschen Krümmungstensor her. Aus dem Verschwinden von R_{ijkl} und $C_{ikl/m}$ kann man auf Grund einer Rechnung schließen, daß auch der Riemann—Christoffelsche Krümmungstensor verschwindet. Dies bedeutet, wie aus der Theorie der Riemannschen Räume bekannt ist[14]), daß man die quadratische Form

$$ds^2 = g_{ik}(u, \dot{u})\, du^i du^k \tag{3, 7}$$

durch eine Koordinatentransformation auf eine Gestalt bringen kann, in der die Koeffizienten Konstante sind, die in unserem Falle aber natürlich von den Parametern $\dot{u}^i$ abhängen. Ist also

$$u^i = u^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3, 8}$$

diese Transformation, so erhält man für das Bogenelement

$$ds^2 = \bar{g}_{ik}(\dot{x})\, dx^i dx^k. \tag{3, 9}$$

Da die $\bar{g}_{ik}(\dot{x})$ nur von den $\dot{x}^i$ abhängen, folgt aus (2, 2), daß auch $L(x, \dot{x})$ nur von den $\dot{x}$ abhängt, also die Form (1, 1) hat, w. z. b. w. Die Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^n$ sind dann die in §. 1 verwendeten kartesischen Koordinaten.

---

13) Vgl. E. Cartan (2), S. 12. Die dort angegebene Formel XIV angewendet auf C_{ijk} gibt

$$C_{ikl/m} = \frac{\partial C_{ikl}}{\partial x^m} - \frac{\partial C_{ikl}}{\partial \dot{x}^s} \frac{\partial C^s}{\partial \dot{x}^m} - C_{skl}\Gamma^{*s}_{im} - C_{isl}\Gamma^{*s}_{km} - C_{iks}\Gamma^{*s}_{lm}. \tag{a}$$

Die linke Seite von (a) verschwindet, da C_{ikl} x^i nicht enthält und Γ^{*s}_{im} und daher auch $\dfrac{\partial G^s}{\partial \dot{x}^m}$ Null sind.

14) F. Cartan (1), Kap. 2, insbes. S. 49—59.

Schriftenverzeichnis.

E. Cartan, (1) *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Paris, 1928).

(2) Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, 79 (Paris, 1934).

P. Finsler, (1) *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (Dissertation, Göttingen, 1918).

O. Varga, (1) Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 50 (1941), S. 165 – 175.

(2) A Finsler-féle geometria felépítése Minkowski-féle símuló mértékmeghatározással (Aufbau der Finslerschen Geometrie mit Hilfe einer oskulierenden Minkowskischen Maßbestimmung), *Matematikai ės Természettudományi Értesítő (Sitzungsberichte der ungarischen Akademie der Wissenschaften)*, 61 (1942), S. 14–22.