Einige Extremaleigenschaften des Kreisbogens bezüglich der Annäherung durch Polygone.

Von LÁSZLÓ FEJES in Kolozsvár.

Um das Maß der Approximation einer konvexen Kurve durch Polygonfolgen deuten zu können, muß man irgendeine Definition der „Abweichung“ von zwei konvexen Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ zu Grunde legen. Eine in der Literatur gebrauchliche Definition ist die Folgende[1]: $d = \eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{L})$ heiße *Streckenabweichung* zweier konvexen Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, wenn es die kleinste Zahl ist mit der Eigenschaft, daß der kürzeste Abstand jedes Punktes der Kurve $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{L}$ $\leqq d$ ist und umgekehrt der kürzeste Abstand jedes auf $\mathfrak{L}$ liegenden Punktes von $\mathfrak{K}$ ebenso $\leqq d$ ist.

Wir können ferner erklären: Betrachten wir den Flächeninhalt $\tau(\mathfrak{K}, \mathfrak{L})$ der Menge derjenigen Punkte, die von den von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ begrenzten Gebieten genau in einem liegen. $\tau(\mathfrak{K}, \mathfrak{L})$ heiße *Inhaltsabweichung* zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$.

Es sei bemerkt, daß wir $\tau(\mathfrak{K}, \mathfrak{L})$ auch als Differenz der Inhalte der Vereinigungsmenge und der Durchschnittsmenge der von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ begrenzten Gebiete deuten können. Ganz analog nennen wir *Umfangsabweichung* die Differenz zwischen den Bogenlängen der Ränder der Vereinigungsmenge und der Durchschnittsmenge der von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ begrenzten Gebiete und bezeichnen sie mit $\lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{L})$.

Die soeben definierten Abweichungen erfüllen die üblichen Forderungen: 1. Sie sind nichtnegativ und nur dann 0, wenn $\mathfrak{K}$

[1]) Vgl. BONNESEN—FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin, 1934). Die obige Bezeichnung „Streckenabweichung“ führe ich zwecks Unterscheidung von den im Folgenden einzuführenden Abweichungsdefinitionen ein.

und $\mathfrak{L}$ identisch sind. 2. Sie sind symmetrisch in beiden Kurven. 3. Sie genügen der „Dreiecksungleichung".

Betrachten wir nun eine vorgegebene konvexe Kurve $\mathfrak{K}$ und fassen das n-Eck $\mathfrak{P}_n$ mit der kleinstmöglichen Streckenabweichung $\eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n)$ ins Auge. Wir erklären als *Maß der Approximierbarkeit* der Kurve $\mathfrak{K}$ durch Polygonfolgen den Grenzwert $\overline{\lim}\, n^2 \eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n)$. Ganz analog können wir das Approximierbarkeitsmaß mit Hilfe der Inhalts-, oder Umfangsabweichung deuten. Wir sagen ferner, daß sich $\mathfrak{K}$ bezüglich einer der drei Abweichungen schlechter, gleich gut, oder besser approximieren läßt als $\mathfrak{L}$, je nachdem das Verhältnis ihrer Approximierbarkeitsmaße > 1, $= 1$, oder < 1 ausfällt.

Es erhebt sich nun eine Reihe interessanter Probleme, wenn wir unter Kurven, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, diejenige bestimmen wollen, die sich in obigem Sinne am schlechtesten durch Polygonfolgen approximieren läßt.

Die Lösung eines derartigen Problems gibt z. B. folgender Satz[2]: Unter sämtlichen geschlossenen konvexen Kurven mit vorgegebenem Flächeninhalt läßt sich bezüglich der Inhaltsabweichung die Ellipse am schlechtesten durch Polygonfolgen approximieren.

Dasselbe gilt auch für Approximation durch einbeschriebene[3], sowie durch umbeschriebene[4] Polygonfolgen.

Wegen der isoperimetrischen Ungleichung folgt hieraus, daß für Kurven mit vorgegebener Bogenlänge der Kreis die extremale Kurve ist. Im Folgenden nehmen wir an, daß die zur Konkurrenz zugelassenen Kurven bis auf eine endliche Anzahl von Punkten stetig veränderliche Krümmung besitzen[5] und zeigen, daß unter dieser Voraussetzung für Kurven mit vorgegebener Bogenlänge stets der Kreis die extremale Kurve ist, gleichgültig welche der obigen Abweichungsdefinitionen wir zu Grunde legen.

---

[2]) L. Fejes, Sur un théorème concernant l'approximation des courbes par des suites de polygones, *Annali di Pisa*, (2) **9** (1940), S. 143—145.

[3]) E. Sas, Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen, *Compositio Math.*, **6** (1939), S. 468-470.

[4]) L. Fejes, Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe, *Compositio Math.*, **7** (1940), S. 474—476.

[5]) Unsere Ergebnisse gelten vermutlich auch ohne diese Einschränkung.

Es gilt noch etwas allgemeiner der Satz: *Unter sämtlichen konvexen stetig gekrümmten Kurvenbogen mit vorgegebener Bogenlänge und totaler Biegung*[6]) *läßt sich bezüglich der Strecken-, der Inhalts- und auch der Umfangsabweichung der Kreisbogen am schlechtesten durch Streckenzugfolgen approximieren. Dasselbe gilt auch für eine Folge einbeschriebener, sowie umbeschriebener Streckenzüge*[7]).

In diesem Satz sind neun verschiedene Ungleichungen enthalten. Zum Beweis stellen wir zunächst die neun Approximierbarkeitsmaße für einen Kreis zusammen.

Wir beginnen mit dem einbeschriebenen n-Eck. Unter sämtlichen einem Kreise $\mathfrak{K}$ mit dem Halbmesser r einbeschriebenen n-Ecken hat offenbar das reguläre n-Eck $\mathfrak{P}_n^e$ die kleinstmöglichen Abweichungen von $\mathfrak{K}$. Es gilt:

$$\eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^e) = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right), \quad \tau(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^e) = \frac{nr^2}{2}\left(\frac{2\pi}{n} - \sin\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$\lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^e) = 2nr\left(\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right),$$

woraus sich

$$\lim n^2\eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^e) = \frac{r\pi}{2}, \quad \lim n^2\tau(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^e) = \frac{2r^2\pi^3}{3},$$

$$\lim n^2\lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^e) = \frac{r\pi^3}{3}$$

ergibt.

Für umbeschriebene n-Ecke hat ebenfalls das reguläre n-Eck $\mathfrak{P}_n^u$ die kleinstmöglichen Abweichungen vom Kreis:

$$\eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^u) = r\,\frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}, \quad \tau(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^u) = nr^2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right),$$

$$\lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^u) = 2nr\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right).$$

---

[6]) Ist $\varrho = \varrho(s)$ die „natürliche Gleichung" eines konvexen Kurvenbogens $\mathfrak{b}$, so heißt $\omega = \int_0^L \varrho(s)\,ds$ totale Biegung von $\mathfrak{b}$.

[7]) Um die Abweichung zwischen einem konvexen Kurvenbogen $\mathfrak{b}$ und einem Streckenzug $\mathfrak{p}_n$ — und dadurch die Approximierbarkeit — nach der obigen Erklärung deuten zu können, denken wir uns $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{p}_n$ durch die zu den Endpunkten gehörigen Sehnen stets zu geschloßenen Kurven ergänzt.

Es gilt daher:

$$\lim n^2 \eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^n) = \frac{r\pi^2}{2}, \quad \lim n^2 \tau(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^u) = \frac{r^2\pi^3}{3},$$

$$\lim n^2 \lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n^u) = \frac{2r\pi^3}{3}.$$

Betrachten wir nun den Fall der beliebigen n-Ecke! Hier fallen die drei n-Ecke mit den kleinsten Abweichungen nicht zusammen. Bei der Streckenabweichung ist es ein mit $\mathfrak{K}$ konzentrisches reguläres n-Eck, das dadurch ausgezeichnet ist, daß das aritmetische Mittel der Halbmesser seiner In- und Umkreise gleich r ist. Für dieses n-Eck $\mathfrak{P}_n$ gilt:

$$\eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n) = r\,\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}}, \quad \lim n^2 \eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n) = \frac{r\pi^2}{4}.$$

Das n-Eck mit der kleinstmöglichen Inhaltsabweichung ist wiederum ein mit $\mathfrak{K}$ konzentrisches reguläres n-Eck mit der Eigenschaft, daß die außerhalb und innerhalb von $\mathfrak{K}$ liegende Teile seines Umfanges gleich sind. Für die Inhaltsabweichung selbst läßt sich hierbei keine so durchsichtige Formel angeben wie die obigen. Man rechnet jedoch leicht nach, daß

$$\lim n^2 \tau(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n) = \frac{r^2\pi^3}{4}$$

ausfällt.

Es fehlt nun noch die Berechnung des Approximierbarkeitsmaßes bezüglich der Umfangsabweichung. Hier sei die Frage der Bestimmung des extremalen n-Eckes $\mathfrak{P}_n$ beiseite gelassen. Wir machen nur von der trivialen Tatsache Gebrauch, daß jede Seite von $\mathfrak{P}_n$ zwei gemeinsame Punkte mit $\mathfrak{K}$ besitzt.

Greifen wir eine Seite von $\mathfrak{P}_n$, etwa die i-te $\overline{A_i A_{i+1}}$, heraus. Ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}$ seien B_i und C_i. Es gilt

$$\lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} [\overline{A_i A_{i+1}} + 2(\widehat{B_i C_i} - \overline{B_i C_i})] - 2\pi r.$$

Setzen wir $\sphericalangle A_i O A_{i+1} = \alpha_i$, $\sphericalangle B_i O C_i = \beta_i$, wobei O der Kreismittelpunkt ist, so gilt

$$\overline{A_i A_{i+1}} \geqq 2r \cos\frac{\beta_i}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}.$$

Betrachten wir nähmlich die Strecke $\overline{A_i' A_{i+1}'}$, welche die Schenkel des Winkels $\sphericalangle A_i'OA_{i+1}' = \alpha_i$ aus der fest gedachten Geraden A_iA_{i+1} ausschneiden. Drehen wir das Schenkelpaar bei festem α_i, so wird das Minimum von $\overline{A_i'A_{i+1}'}$ im Falle $\overline{OA_i'} = \overline{OA_{i+1}'}$ erreicht. Es gilt ferner

$$\widehat{B_iC_i} - \overline{B_iC_i} = r\left(\beta_i - 2\sin\frac{\beta_i}{2}\right)$$

und daher

$$\lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n) \geqq 2r \sum_{i=1}^{n} \left(\cos\frac{\beta_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2} + \beta_i - 2\sin\frac{\beta_i}{2}\right) - 2\pi r.$$

Beachten wir nun, daß $\beta_i \leqq \alpha_i$ und $(\alpha_i)_{\max} \to 0$, so erhalten wir

$$\cos\frac{\beta_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2} + \beta_i - 2\sin\frac{\beta_i}{2} = \left(1 - \frac{\beta_i^2}{8}\right)\left(\frac{\alpha_i}{2} + \frac{\alpha_i^3}{24}\right) + \frac{\beta_i^3}{24} + O(\alpha_i^5) =$$

$$= \frac{\alpha_i}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha_i^3}{3} + \frac{\beta_i^3}{3} - \frac{\alpha_i\beta_i^2}{2}\right) + O(\alpha_i^5).$$

Die Differenz $\frac{\beta_i^3}{3} - \frac{\alpha_i\beta_i^2}{2}$ erreicht aber für $0 \leqq \beta_i \leqq \alpha_i$ ihr Minimum im Falle $\beta_i = \alpha_i$, wodurch sich

$$\cos\frac{\beta_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2} + \beta_i - 2\sin\frac{\beta_i}{2} \geqq \frac{\alpha_i}{2} + \frac{\alpha_i^3}{48} + O(\alpha_i^5)$$

ergibt. Man beachte nun, daß $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi$ ist. Unter dieser Bedingung nimmt aber $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^3$ — laut der Jensenschen Ungleichheit — ihr Minimum für $\alpha_i = \frac{2\pi}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ an: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^3 \geqq \frac{8\pi^3}{n^2}$. Es gilt daher für das Approximierbarkeitsmaß

$$\lim n^2 \lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}_n) = \frac{r\pi^3}{3}.$$

Folglich erhalten wir die überraschende Tatsache, daß der Kreis bezüglich der Umfangsabweichung nicht besser durch eine Folge beliebiger Polygone approximiert werden kann als durch eine einbeschriebene Polygonfolge.

Aus den Obigen erhalten wir die Approximierbarkeitsmaße für einen Kreisbogen $\mathfrak{b}$ mit der Bogenlänge L und totaler Biegung ω durch einbeschriebene, umbeschriebene oder beliebige Streckenzugfolgen $\{\mathfrak{p}_n^e\}$, $\{\mathfrak{p}_n^u\}$ bzw. $\{\mathfrak{p}_n\}$. Wir haben nur in unseren Formeln

2π durch ω und r durch $\frac{L}{\omega}$ zu ersetzen:

$$\lim n^2 \eta(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n^e) = \frac{1}{8} L\omega, \quad \lim n^2 \eta(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n^u) = \frac{1}{8} L\omega,$$

$$\lim n^2 \eta(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n) = \frac{1}{16} L\omega,$$

$$\lim n^2 \tau(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n^e) = \frac{1}{12} L^2\omega, \quad \lim n^2 \tau(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n^u) = \frac{1}{24} L^2\omega,$$

$$\lim n^2 \tau(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n) = \frac{1}{32} L^2\omega,$$

$$\lim n^2 \lambda(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n^e) = \frac{1}{24} L\omega^2, \quad \lim n^2 \lambda(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n^u) = \frac{1}{12} L\omega^2,$$

$$\lim n^2 \lambda(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n) = \frac{1}{24} L\omega^2.$$

Nun zum Beweis unseres Satzes! Wir beweisen ihn zunächst für einen „Kreisbogenzug", d. h. für einen Kurvenbogen, der aus einer endlichen Anzahl von Kreisbogen besteht. Es sei zunächst bemerkt, daß es genügt den Satz für Kreisbogenzüge aus zwei Kreisbogen zu beweisen. Ersetzt man nämlich zwei anstoßende Kreisbogen stets durch einen einzigen derart, daß Bogenlänge und totale Biegung unverändert bleiben, so erhält man schließlich einen einzigen Kreisbogen, der sich im Verhältnis zum Kreisbogenzug schlechter approximieren läßt.

Betrachten wir demnach einen Kreisbogenzug $\mathfrak{b}$ aus zwei Kreisbogen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$. Es gilt $L = L_1 + L_2$, $\omega = \omega_1 + \omega_2$, wobei L, L_1, L_2 die entsprechenden Bogenlängen, ω, ω_1, ω_2 die totalen Biegungen bedeuten.

Betrachten wir zunächst die Approximation bezüglich der Streckenabweichung. Approximieren wir $\mathfrak{b}$ durch einen Streckenzug $\mathfrak{p}_n$ mit n Seiten, wobei die zu $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ gehörigen Seitenzahlen n_1 und n_2 $(n_1 + n_2 = n)$ derart gewählt werden sollen, daß für $n \to \infty$ $\frac{n_1^2}{n_2^2} \to \frac{L_1\omega_1}{L_2\omega_2}$ sei. Das Approximierbarkeitsmaß von $\mathfrak{b}$ ist — abgesehen vom Faktor $\frac{1}{8}$ bzw. $\frac{1}{16}$, der hinzuzufügen ist, je nachdem die Annäherung durch ein- oder umbeschriebene, bzw. beliebige Streckenzüge erfolgt —

$$\lim n^2 \frac{L_1\omega_1}{n_1^2} = \lim n^2 \frac{L_2\omega_2}{n_2^2}.$$

Wir zeigen, daß dasselbe $\leqq L\omega$ ausfällt. Es gilt nämlich

$$\lim n^2 \frac{L_1\omega_1}{n_1^2} = \lim \left(\frac{n_1+n_2}{n_1}\right)^2 L_1\omega_1 =$$

$$= \left(1+\sqrt{\frac{L_2\omega_2}{L_1\omega_1}}\right)^2 L_1\omega_1 = (\sqrt{L_1\omega_1}+\sqrt{L_2\omega_2})^2 \leqq$$

$$\leqq (\sqrt{L_1\omega_1}+\sqrt{L_2\omega_2})^2 + (\sqrt{L_1\omega_2}-\sqrt{L_2\omega_1})^2 = (L_1+L_2)(\omega_1+\omega_2) = L\omega.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle $(\sqrt{L_1\omega_2}-\sqrt{L_2\omega_1})^2=0$, also $\frac{L_1}{\omega_1}=\frac{L_2}{\omega_2}$, d. h. falls der Kreisbogenzug in einem einzigen Kreisbogen entartet.

Wenden wir uns nun der Approximation bezüglich der Inhaltsabweichung zu. Hier wählen wir die Seitenzahlfolgen $\{n_1\}$ und $\{n_2\}$ so, daß $\frac{n_1^3}{n_2^3} \to \frac{L_1^2\omega_1}{L_2^2\omega_2}$ sei. Wir zeigen, daß dann die Ungleichung

$$\lim n^2 \left(\frac{L_1^2\omega_1}{n_1^2}+\frac{L_2^2\omega_2}{n_2^2}\right) \leqq L^2\omega$$

gilt, womit alles bewiesen sein wird. Um sie einzusehen, beachten wir, daß

$$\lim n^2 \left(\frac{L_1^2\omega_1}{n_1^2}+\frac{L_2^2\omega_2}{n_2^2}\right) = (\sqrt[3]{L_1^2\omega_1}+\sqrt[3]{L_2^2\omega_2})^3$$

ist. Setzen wir

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sqrt[3]{L_1^2\omega_1}+\sqrt[3]{L_2^2\omega_2}$$

und stellen die Aufgabe: das Maximum von $F(\omega_1, \omega_2)$ unter der Bedingung $\omega_1+\omega_2=\omega$ und festem L_1 und L_2 zu bestimmen. Dazu dient die Gleichung

$$\frac{dF}{d\omega_1} = \frac{\partial F}{\partial\omega_1} + \frac{\partial F}{\partial\omega_2}\frac{d\omega_2}{d\omega_2} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{L_1^2}{\omega_1^2}}-\sqrt[3]{\frac{L_2^2}{\omega_2^2}}\right)=0,$$

welche nur für $\frac{L_1}{\omega_1}=\frac{L_2}{\omega_2}$ bestehen kann, d. h. wiederum im Falle eines einzigen Kreisbogens. Es gilt ferner

$$\frac{d^2F}{d\omega_1^2} = -\frac{2}{9}\left(\sqrt[3]{\frac{L_1^2}{\omega_1^5}}+\sqrt[3]{\frac{L_2^2}{\omega_2^5}}\right).$$

Dies ist aber für positive Werte von ω_1 und ω_2 stets negativ, was in Evidenz setzt, daß von einem absoluten Maximum die Rede ist.

Aus $\omega_2 L_1 = \omega_1 L_2$, $L_1 + L_2 = L$ erhält man nun $L_1 = \frac{\omega_1}{\omega} L$, $L_2 = \frac{\omega_2}{\omega} L$, und mithin $\left(\sqrt[3]{L_1^2 \omega_2} + \sqrt[3]{L_2^2 \omega_2}\right)^3 = L^2 \omega$, womit unsere Ungleichung völlig bewiesen ist.

Im Falle der Approximation bezüglich der Umfangsabweichung verfährt man ganz analog. Man wählt die Folgen $\{n_1\}$, $\{n_2\}$ so, daß $\frac{n_1^3}{n_2^3} \to \frac{L_1 \omega_1^2}{L_2 \omega_2^2}$ sei und prüft die Ungleichung

$$\lim n^2 \left(\frac{L_1 \omega_1^2}{n_1^2} + \frac{L_2 \omega_2^2}{n_2^2}\right) = \left(\sqrt[3]{L_1 \omega_1^2} + \sqrt[3]{L_2 \omega_2^2}\right)^3 \leqq L \omega^2.$$

Bemerken wir jedoch, daß diese schon aus den Obigen folgt, wenn wir in der soeben bewiesenen Ungleichung $\left(\sqrt[3]{L_1^2 \omega_1} + \sqrt[3]{L_2^2 \omega_2}\right)^3 \leqq L^2 \omega$ die Größen L_1, L_2 mit ω_1, ω_2 wertauschen.

Damit ist unser Satz für Kreisbogenzüge erledigt. Der Beweis für stetig gekrümmte Kurven wird nunmehr keine Schwierigkeiten bieten. Er beruht auf der einleuchtenden Tatsache, daß ein stetig gekrümmter konvexer Kurvenbogen besser durch eine Folge von Kreisbogenzügen angenähert werden kann, als durch gewöhnliche Streckenzugfolgen. Genauer: es läßt sich zu jedem stetig gekrümmten konvexen Kurvenbogen $\mathfrak{b}$ eine Folge von einbeschriebenen konvexen Kreisbogenzügen $\{\mathfrak{b}_n\}$ mit den Seitenzahlen n derart angeben, daß

$$\overline{\lim}\, n^2 \eta(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_n) = \overline{\lim}\, n^2 \tau(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_n) = \overline{\lim}\, n^2 \lambda(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_n) = 0$$

ausfällt. Dasselbe gilt auch für umbeschriebene Kreisbogenzüge[8]).

Approximieren wir demnach $\mathfrak{b}$ durch eine Folge von kon-

---

[8]) Auf den Beweis dieser Tatsache — da sie im wesentlichen nur eine andere Formulierung elementarer differentialgeometrischen Überlegungen ist — wollen wir nicht näher eingehen. Es sei jedoch bemerkt, daß es genügt $\overline{\lim}\, n^2 \eta(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_n) = 0$ nachzuweisen. Betrachten wir statt des Kurvenbogens — was auf dasselbe hinauskommt — zwei geschlossene konvexe Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, von denen $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{K}$ liege. Es gilt $\tau(\mathfrak{K}, \mathfrak{L}) \leqq L\eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{L}) + \pi\eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{L})^2$, wobei L die Bogenlänge von $\mathfrak{L}$ bezeichnet. Dies leuchtet ein, wenn wir bedenken, daß auf der rechten Seite das Inhaltsmaß von $\mathfrak{L}$ und ihrer im Abstand $\eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{L})$ laufenden äußeren Parallelkurve steht. Ähnlich sieht man die Ungleichheit $\lambda(\mathfrak{K}, \mathfrak{L}) \leqq 2\pi\eta(\mathfrak{K}, \mathfrak{L})$ ein.

vexen einbeschriebenen Kreisbogenzügen $\{\mathfrak{b}_{\nu_n}\}$. Dabei sei die Seitenzahlfolge $\{\nu_n\}$ derart gewählt, daß außer $\lim n^2\eta(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\nu_n})=0$ auch noch die Bedingung $\frac{\nu_n}{n}\to 0$ bestehe. Unsere vorigen Überlegungen zeigen, daß es zu jedem $\mathfrak{b}_{\nu_n}$ einen einbeschriebenen Streckenzug $\mathfrak{p}_n$ mit der Seitenzahl n gibt so, daß

$$\overline{\lim}\, n^2\eta(\mathfrak{b}_{\nu_n}, \mathfrak{p}_n)\leqq \frac{1}{8}L\omega$$

gilt[9]). Die Streckenzüge $\{\mathfrak{p}_n\}$ sind aber offenbar auch $\mathfrak{b}$ einbeschrieben und es gilt wegen

$$\eta(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n)\leqq \eta(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_{\nu_n})+\eta(\mathfrak{b}_{\nu_n}, \mathfrak{p}_n)$$

die Ungleichung

$$\overline{\lim}\, n^2\eta(\mathfrak{b}, \mathfrak{p}_n)\leqq \frac{1}{8}L\omega.$$

Ganz analog prüft man die übrigen acht Ungleichungen.

Es bleibt noch übrig, die Unizität nachzuweisen. Man zerlege den als extremal vorausgesetzten Bogen $\mathfrak{b}$ in zwei beliebige Teilbogen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$. Das Approximierbarkeitsmaß bleibt unverändert, wenn wir $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ durch zwei Kreisbogen mit bzw. denselben Bogenlängen L_1, L_2 und totalen Biegungen ω_1, ω_2 ersetzen. Nun muß aber $\frac{L_1}{\omega_1}=\frac{L_2}{\omega_2}$ gelten, und zwar für eine beliebige Zerlegung. Daraus folgt für den Krümmungshalbmesser in einem beliebigen Punkt: $\frac{dL}{d\omega}=$ Const., d. h. $\mathfrak{b}$ erweist sich in der Tat als Kreisbogen.

Zum Schluß wollen wir noch auf einige zur Zeit ungelöste Probleme aufmerksam machen. Es läßt sich zeigen, daß es eine universelle Konstante, etwa 500, gibt, so, daß das Approximierbarkeitsmaß bezüglich der Umfangsabweichung einer konvexen Kurve mit dem Flächeninhalt T nicht die Größe $500T^{1/2}$ überschreiten kann[10]). Dies gilt auch für die Approximation durch einbeschriebene wie auch durch umbeschriebene Polygone und

[9]) Dies haben wir nur für einen einzigen festen Kreisbogenzug gezeigt. Unsere Überlegungen lassen sich aber mit Hilfe einer geeigneten Modifikation ohne Mühe auch auf den angedeuteten Fall ausdehnen.

[10]) L. Fejes, Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen, *Compositio Math.*, 6 (1939), S. 456—467.

zwar ohne Einschränkungen über die Krümmung. Dasselbe kann man auch — mit Hilfe einer analogen Schlußweise — von der Approximation bezüglich der Streckenabweichung behaupten. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß im Falle der Strecken-, sowie der Umfangsabweichung auch dann der Kreis die extremale Kurve liefert, wenn statt der Bogenlänge der Flächeninhalt vorgegeben wird.

Wir kommen schließlich zu einer Fülle hübscher Probleme, wenn wir unter Kurven, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, nach derjenigen fragen, die sich durch ein n-Eck mit festem n bezüglich irgendeiner der obigen Abweichungen am schlechtesten annähern läßt.

Ein derartiges Problem scheint im Verhältnis zu den Vorigen recht schwierig zu sein. In dieser Richtung ist mir nur die von mir angeregte Untersuchung vom Herrn E. SAS bekannt[11]). Sein Ergebnis lautet: Unter der Gesamtheit der konvexen geschlossenen Kurven mit vorgegebenem Inhaltsmaß erreicht der größtmögliche Flächeninhalt der einbeschriebenen n-Ecke sein Minimum für die Ellipsen.

(Eingegangen am 11. November 1941.)

[11]) S. Fußnote [3]).