Über konvexe Kurven und einschließende Kreisringe.

Von GYULA (JULIUS) V. SZ. NAGY in Kolozsvár.

Als Kreisring wird die abgeschlossene Punktmenge zwischen zwei konzentrischen Kreisen bezeichnet. Derjenige Kreisring mit minimaler Breite (mit minimaler Halbmesserdifferenz), der eine konvexe Kurve C enthält, heißt *Minimalkreisring*, wenn sein innerer Kreis innerhalb C liegt. Ein Kreisring, der C enthält und den kleinsten Flächeninhalt besitzt, soll als *kleinster Kreisring* von C bezeichnet werden, wenn der innere Kreis des Kreisringes innerhalb C liegt.

T. BONNESEN und N. KRITIKOS[1]) haben gezeigt, daß der Minimalkreisring einer konvexen Kurve C durch die Kurve eindeutig bestimmt wird.

Wir beweisen den folgenden Satz:

Eine konvexe Kurve hat im allgemeinen nur einen kleinsten Kreisring. Hat die konvexe Kurve C mehrere kleinste Kreisringe, so enthält sie eine Strecke, deren Endpunkte für C Ecken sind.

Eine konvexe Kurve mit diesen Eigenschaften muß aber nicht immer mehrere kleinste Kreisringe haben. Zum Rand des gleichseitigen Dreieckes gehört z. B. nur ein kleinster Kreisring.

1. Die Existenz mindestens eines kleinsten Kreisringes einer konvexen Kurve C erkennt man so:

---

[1]) Vgl. T. BONNESEN, Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren, *Math. Annalen*, **91** (1924), S. 252–268; N. KRITIKOS, Über konvexe Flächen und einschließende Kugeln, *Math. Annalen*, **96** (1927), S. 583–586; T. BONNESEN und W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin, 1934), S. 54–55. Diese Arbeiten werden einfach unter BONNESEN, KRITIKOS bzw. BONNESEN–FENCHEL angeführt.

Es sei B der von C begrenzte abgeschlossene konvexe Bereich. Ist M ein Punkt von B, so gibt es einen kleinsten Kreis $K(M)$ mit dem Mittelpunkt M und einem Halbmesser $R(M)$, der B enthält, und einen größten Kreis $k(M)$ mit demselben Mittelpunkt und vom Halbmesser $r(M)$, der in B enthalten ist. Liegt M auf C, so reduziert sich $k(M)$ auf einen Punkt.

Der von $K(M)$ und $k(M)$ begrenzte Kreisring hat den Inhalt $\pi F(M) = \pi[R^2(M) - r^2(M)]$. Hier ist $F(M)$ in B eine nichtnegative, stetige Funktion von M. Nach einem Satz von WEIERSTRASZ erreicht die Funktion $F(M)$ in B ihr Minimum, das offenbar dann und nur dann gleich Null ist, wenn C ein Kreis ist.

Es ist klar, daß sowohl $K(M)$, wie $k(M)$ mit C mindestens einen Punkt gemeinsam haben.

2. Zum Beweis des ausgesprochenen Satzes benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *Wir bezeichnen mit k_i einen Kreis mit dem Mittelpunkt M_i und dem Halbmesser r_i ($i = 1, 2$ und $M_1 \neq M_2$), mit H die konvexe Hülle von k_1 und k_2, und mit Q einen außerhalb H liegenden Punkt der Potenzlinie von k_1 und k_2. In H gibt es dann und nur dann keinen solchen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Strecke M_1M_2 liegt und dessen Potenz bezüglich Q kleiner ist, als diejenige von k_1 und k_2, wenn einer der Kreise k_1 und k_2 den anderen von innen berührt.*

Wir nehmen an, daß der Halbmesser r_2 von k_2 nicht größer ist, als jener von k_1. Wir bezeichnen mit S den Schnittpunkt der Potenzlinie von k_1 und k_2 mit der Geraden M_1M_2.

Ist S ein innerer Punkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$, so liegt der Kreis k mit dem Mittelpunkt S und vom Halbmesser r_2 offenbar in H und hat in bezug auf den Punkt Q eine kleinere Potenz, als k_2, weil $\overline{QS}^2 - r_2^2 < \overline{QM_2}^2 - r_2^2$ ist.

Ist S ein innerer Punkt von H, aber kein innerer Punkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$, so schneiden sich die Kreise k_1 und k_2 in zwei Punkten A und B. Derjenige Kreis k' durch die Punkte A und B, dessen Mittelpunkt M ein innerer Punkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$ ist, hat keinen Punkt außerhalb von k_1 und k_2. Die konvexe Hülle von k_1 und k_2 enthält einen zu k' konzentrischen größeren Kreis k, weil A und B innere Punkte von H sind. Bezeichnet r' bzw. r den Halbmesser von k' bzw. k, so ist die Potenz von Q bezüglich

k, k' bzw. k_2

$$\overline{QM}^2-r^2,\ \overline{QM}^2-r'^2 \quad \text{bzw.} \quad \overline{QM}_2^2-r_2^2.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\overline{QM}^2-r^2<\overline{QM}^2-r'^2=\overline{QM}_2^2-r_2^2,$$

weil $r>r'$ ist und weil Q auf der Potenzlinie AB der Kreise k' und k_2 liegt.

Liegt S außerhalb von H, so stimmt H mit k_1 überein. Bezeichnet S_1 den Schnittpunkt von k_1 mit der Strecke $\overline{SM_1}$ und k denjenigen Kreis vom Halbmesser r_2, der den Kreis k_1 in S_1 von innen berührt, dann ist die Potenz von Q bezüglich k kleiner als jene bezüglich k_2, weil $\overline{QM}<\overline{QM}_2$ ist, wo M den Mittelpunkt von k bedeutet.

Es bleibt nur der Fall übrig, in dem S auf den Rand von H fällt. Dann berührt k_2 den Kreis k_1 in S von innen. Der Punkt Q liegt dann auf der Tangente von k_1 in S. Die Potenz von Q in bezug auf k_1 und k_2 ist gleich $\overline{QS}^2$. Ist nun M ein beliebiger Punkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$ und ist k ein in k_1 liegender Kreis mit dem Mittelpunkt M und vom Halbmesser r, so hat Q bezüglich k die Potenz

$$\overline{QM}^2-r^2\geqq\overline{QM}^2-\overline{SM}^2=\overline{QS}^2.$$

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

3. Wir nehmen nun an, daß die konvexe Kurve C mehrere kleinste Kreisringe hat und M_1 und M_2 die Mittelpunkte von zwei solchen Kreisringen sind.

Der konvexe Bereich B enthält die Kreise $k(M_1)$ und $k(M_2)$ und ihre konvexe Hülle H. Die Kreise $K(M_1)$ und $K(M_2)$ enthalten B und haben mindestens je einen Punkt mit C gemeinsam. Daraus folgt, daß $K(M_1)$ und $K(M_2)$ einander schneiden, oder der eine Kreis den anderen von innen berührt.

Schneiden $K(M_1)$ und $K(M_2)$ einander in Q und Q', so enthält ihr gemeinsames Kreiszweieck den Bereich B und damit auch H. Der Punkt Q liegt auf der Potenzlinie von $k(M_1)$ und $k(M_2)$, da

$$F(M_1)\equiv R^2(M_1)-r^2(M_1)=F(M_2)\equiv R^2(M_2)-r^2(M_2),$$
$$R(M_1)=\overline{QM}_1 \text{ und } R(M_2)=\overline{QM}_2.$$

Berührt nun keiner der Kreise $k(M_1)$ und $k(M_2)$ den anderen von innen, so gibt es nach dem Hilfssatz in H einen Kreis k, dessen Mittelpunkt M auf der Strecke M_1M_2 liegt und dessen Potenz bezüglich Q kleiner ist als die Potenz von $k(M_2)$ bezüglich Q. Der Kreis K, der durch Q geht und den Mittelpunkt M hat, enthält offenbar das gemeinsame Kreiszweieck von $K(M_1)$ und $K(M_2)$. Der von K und k begrenzte Kreisring enthält also die Kurve C. Sein Inhalt ist offenbar das π-fache der Potenz von Q in bezug auf k. Er ist also kleiner als der Inhalt des kleinsten Kreisringes von C vom Mittelpunkt M_1 oder M_2.

Aus diesem Widerspruch folgt, daß einer der Kreise $k(M_1)$ und $k(M_2)$ den anderen von innen berührt. Wir nehmen an, daß $k(M_2)$ den Kreis $k(M_1)$ in A von innen berührt.

$k(M_2)$ hat mindestens einen Punkt mit C gemeinsam. Daraus folgt, daß A auf C liegt, weil jeder andere Punkt von $k(M_2)$ im Innern von $k(M_1)$ und deshalb auch im Innern von B liegt.

Die Tangente von $k(M_1)$ in A ist eine Stützgerade von C und zugleich die Potenzlinie von $k(M_1)$ und $k(M_2)$. Bezeichnen wir mit $S(M_1)$ bzw. $S(M_2)$ den Kreisabschnitt, der von der Geraden QQ' aus $K(M_1)$ bzw. $K(M_2)$ abgeschnitten wird und B enthält, so liegt $S(M_2)$ offenbar in $S(M_1)$.

$K(M_1)$ hat mit $S(M_2)$ nur die Punkte Q und Q' und mit C mindestens einen Punkt gemeinsam. Daraus folgt, daß C mindestens einen der Punkte Q und Q' enthält.

Liegt nur Q auf C, so enthält der Rand von $K(M_1)$ keinen anderen Punkt von C und B. Es gibt also auf der Strecke QM_1 einen zu M_1 genügend nahe liegenden Punkt M', so daß B auch in dem durch Q gehenden Kreise K' vom Mittelpunkt M' enthalten ist. Bezeichnet ε den Abstand M_1M', so liegt der Kreis k' mit dem Mittelpunkt M' und Halbmesser $r(M_1)-\varepsilon$ in $k(M_1)$ und somit auch in B. Der von K' und k' begrenzte Kreisring enthält also C und hat den Inhalt $\pi\{[R(M_1)-\varepsilon]^2-[r(M_1)-\varepsilon]^2\}=\pi[R^2(M_1)-r^2(M_1)]-$ $-2\pi\varepsilon[R(M_1)-r(M_1)]$. Er hat also einen kleineren Inhalt, als der kleinste Kreisring von C mit dem Mittelpunkt M_1.

Aus diesem Widerspruch folgt, daß auch Q' auf C liegt.

Die Gerade QQ' ist eine Stützgerade von C, die Strecke QQ' gehört also zu C. Die Punkte Q und Q' sind Ecken von C, weil die Stützgeraden von $S(M_2)$ in Q und Q' auch C stützen.

Für den Beweis des ausgesprochenen Satzes bleibt nur der Fall zu erledigen, in dem $K(M_1)$ von $K(M_2)$ in Q berührt wird. Q liegt auf der Geraden M_1M_2 und hat bezüglich $k(M_1)$ und $k(M_2)$ dieselbe Potenz, weil die kleinsten Kreisringe von C mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 gleichen Inhalt besitzen. Daraus folgt, daß Q mit dem Berührungspunkte A von $k(M_1)$ und $k(M_2)$ zusammenfällt.

Dies ist aber unmöglich, weil die konzentrischen Kreise $K(M_1)$ und $k(M_1)$ einander nicht berühren können.

Damit ist der ausgesprochene Satz vollständig bewiesen.

4. Ist M ein beliebiger Punkt der Strecke M_1M_2, so ist $R(M)=\overline{QM}$ und $r(M)=\overline{AM}$, weil $K(M)$ offenbar durch Q geht und $k(M)$ die Gerade QQ' berührt. Die Kreise $k(M_1)$, $k(M_2)$ und $k(M)$ gehören zu einem Kreisbüschel, sie haben also in bezug auf Q gleiche Potenz. Daraus folgt, daß $K(M)$ und $k(M)$ einen kleinsten Kreisring begrenzen.

Sind also M_1 und M_2 die äußersten Punkte der Geraden M_1M_2, die für C Mittelpunkte kleinster Kreisringe sind, so ist jeder Punkt der Strecke M_1M_2 der Mittelpunkt eines kleinsten Kreisringes von C.

Es gibt keinen kleinsten Kreisring von C, dessen Mittelpunkt außerhalb der Strecke M_1M_2 liegt.

Ist nämlich M_3 der Mittelpunkt eines kleinsten Kreisringes von C, so müssen die Kreise $k(M_1)$ und $k(M_2)$ von $k(M_3)$ im Punkte A berührt werden. Diese drei Kreise müssen auf derselben Seite der gemeinsamen Tangente QQ' liegen. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich unter $k(M_1)$, $k(M_2)$ und $k(M_3)$ ein Paar, von dem kein Kreis den anderen von innen berührt.

Daraus folgt der Satz:

Gehören mehrere kleinste Kreisringe zu einer konvexen Kurve C, so erfüllen ihre Mittelpunkte eine Strecke. Die äußeren Kreise der kleinsten Kreisringe von C haben eine gemeinsame Sehne s, die zu C gehört. Die inneren Kreise berühren die Kurve im Mittelpunkte von s.

5. Man kann leicht konvexe Kurven angeben, zu denen mehrere kleinste Kreisringe gehören.

Ist C die Begrenzung eines Kreisabschnittes S von einem Kreise K, so erfüllen die Mittelpunkte der kleinsten Kreisringe von C eine Strecke m der Mittellinie von S. Die Mittellinie von S bedeutet hier die Verbindungsstrecke der Halbierungspunkte des Kreisbogens und der Grundlinie von S. Ist S nicht kleiner als die Hälfte der Kreisfläche K, so ist m die Verbindungsstrecke des Mittelpunktes von K und des Halbierungspunktes der Mittellinie von S. Ist S kleiner als die Hälfte der Kreisfläche K, so liegen die Endpunkte vom m in den Halbierungspunkten der Grundlinie und der Mittellinie von S.

Ist C die Begrenzung eines gleichschenkligen Dreiecks, so liegen die Mittelpunkte der kleinsten Kreisringe — der Symmetrie wegen — auf der Höhe des Dreiecks. Ist die Grundlinie des Dreiecks größer als seine Schenkel, so erfüllen die Mittelpunkte der kleinsten Kreisringe von C die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte des Hüllkreises (Pferchkreises) und des Inkreises des Dreiecks. Im entgegengesetzten Falle hat das gleichschenklige Dreieck nur einen kleinsten Kreisring.

6. *Der Mittelpunkt eines kleinsten Kreisringes der konvexen Kurve C kann nur dann auf C fallen, wenn mehrere kleinste Kreisringe zu C gehören.*

Liegt nämlich der Mittelpunkt M_0 eines kleinsten Kreisringes auf C, so fällt er mit dem Mittelpunkte M^* des Hüllkreises von C zusammen. Der entgegengesetzte Fall führt nämlich zu einem Widerspruch, da

$$(1)\quad \begin{aligned} \operatorname{Min} F(M) = R^2(M_0) - r^2(M_0) = R^2(M_0) > \\ > \operatorname{Min} R^2(M) = R^2(M^*) \geqq R^2(M^*) - r^2(M^*) = F(M^*). \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $K(M_0)$ der Hüllkreis von C ist. Die Stützgerade von C in M_0 enthält einen Durchmesser QQ' von $K(M_0)$. Die Strecke QQ' gehört zu C. Im entgegengesetzten Falle wäre nämlich der kleinste Bogen des Hüllkreises $K(M_0)$, der jeden gemeinsamen Punkt mit C enthält, kleiner als ein Halbkreis von $K(M_0)$.[2])

Ist M_1 ein auf der Mittelgeraden des Punktpaares QQ' zu M_0 genügend nahe liegender Punkt von B, so ist offenbar

$$(2)\qquad F(M_0) = R^2(M_0) = R^2(M_1) - r^2(M_1) = F(M_1).$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen[3]).

---

[2]) BONNESEN—FENCHEL, S. 54.

[3]) Der entsprechende Satz für einen Minimalkreisring lautet folgendermaßen:

Ein Punkt der konvexen Kurve C ist kein Mittelpunkt des Minimalkreisringes.

Dieser Satz läßt sich ebenso beweisen, wie der obige Satz für kleinste Kreisringe.

Der Beweis führt hier statt (1) wegen

7. Sind M_1 und M_2 die Mittelpunkte von zwei kleinsten Kreisringen von C, so erhält man aus $F(M_1)=F(M_2)$ die Gleichung

$$R^2(M_2)-R^2(M_1)=r^2(M_2)-r^2(M_1).$$

Ist also $r(M_1)<r(M_2)$, so ist auch $R(M_1)<R(M_2)$.

Aus der Indentität

$$[R(M)-r(M)]\,.\,[R(M)+r(M)]=F(M)$$

folgt also, daß die Breite desjenigen kleinsten Kreisringes möglichst klein ist, der den größten inneren (und zugleich äußeren) Kreis besitzt.

Unter den kleinsten Kreisringen gibt es nur einen, dessen Breite möglichst klein ist, weil die inneren Kreise der kleinsten Kreisringe eine Gerade in einem Punkte berühren und auf derselben Seite dieser Geraden liegen. (Der innere Kreis als Punktkreis kann auch auf diese Gerade fallen.)

8. Nennt man *innere* bzw. *äußere Stützpunkte* von C die gemeinsamen Punkte von C mit dem inneren bzw. äußeren Kreise des kleinsten Kreisringes von minimaler Breite, so besteht der Satz:

Es gibt auf C keinen Bogen, der jeden äußeren Stützpunkt und keinen inneren enthält.

Aus einem Beweis in **3** (S. 177, fünfter Absatz) folgt, daß es auf C mindestens zwei äußere Stützpunkte gibt.

Für den Beweis nehmen wir an, daß C von den äußeren Stützpunkten P und P' in solche zwei Bogen C_1 und C_2 geteilt wird, von denen C_1 keinen inneren und C_2 keinen äußeren Stützpunkt enthält. Bezeichnet M_0 den Mittelpunkt des kleinsten Kreisringes von minimaler Breite, so teilen P und P' den Kreis $K(M_0)$ in zwei Bogen Γ_1 und Γ_2, von denen Γ_2 im Innern keinen (äußeren und inneren) Stützpunkt von C enthält. Die Zentralprojektion γ_1 bzw. γ_2 des Kreisbogens Γ_1 bzw. Γ_2 von M_0 aus auf $k(M_0)$ enthält keinen inneren Stützpunkt bzw. jeden inneren Stützpunkt von C.

$$\mathrm{Min}[R(M)-r(M)]=R(M_0)>\mathrm{Min}\,R(M)=R(M^*)\geqq R(M^*)-r(M^*)$$

zu einem Widerspruch.

Statt (2) hat man jetzt die Ungleichung

$$R(M_0)-r(M_0)=R(M_0)>R(M_1)-r(M_1),$$

weil $R(M_0)$, $R(M_1)$ und $r(M_1)$ die Seiten des Dreiecks M_0M_1Q sind.

Beim Beweis haben wir hier die Heranziehung unendlich kleiner Größen von höherer Ordnung vermieden, die beim Beweis von Kritikos (S. 584) eine wesentliche Rolle spielen.

Γ_1 und ein beliebiger innerer Stützpunkt können nicht auf derselben Seite der Geraden PP' liegen. Sonst fiele γ_2 in das offenbar zu B gehörige Dreieck M_0PP'. Dann könnte aber γ_2 und damit $k(M_0)$ keinen Stützpunkt von C enthalten.

Bezeichnet T bzw. T' den Berührungspunkt der von P bzw. P' an γ_2 gehenden Tangente, so liegen die inneren Stützpunkte von C auf dem zwischen T und T' liegenden abgeschlossenen Teilbogen δ_2 von γ_2. Die inneren Punkte der beiden anderen Teilbogen von γ_2 liegen nämlich im Innern der konvexen Hülle des Punktpaares PP' und des Kreises $k(M_0)$ und deshalb auch im Innern von B.

Der Punkt T ist also nur dann ein Stützpunkt, wenn die Strecke PT ein Teil von C ist.

Fallen T und T' zusammen, so gehört die Strecke PP' der Kurve C an. Dann berührt $k(M_0)$ die Strecke PP' in T und hat mit C keinen anderen Punkt gemeinsam. Offenbar gibt es einen zu M_0 hinreichend nahe liegenden Punkt M_1, so daß $k(M_1)$ in B liegt, den Kreis $k(M_0)$ enthält und in T berührt. Nach **4** begrenzen $K(M_1)$ und $k(M_1)$ einen kleinsten Kreisring, der nach **7** eine kleinere Breite hat, als der kleinste Kreisring von minimaler Breite (mit dem Mittelpunkt M_0). Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des obigen Satzes, falls T und T' zusammenfallen.

Ist T kein Stützpunkt, so läßt sich P durch einen hinreichend nahe liegenden Punkt P_1 von Γ_2 so ersetzen, daß der Berührungspunkt T_1 auf der von P_1 an δ_2 gehenden Tangente kein Stützpunkt ist und daß es auf δ_2 zwischen T und T_1 keinen Stützpunkt gibt. Ist T ein Stützpunkt, so fällt P_1 bzw. T_1 mit P bzw. T zusammen. Auf ähnliche Weise verfährt man, falls T' kein Stützpunkt ist.

Nimmt man die Punkte P_1, P_1', T_1 und T_1' auf diese Weise an, so enthält B den zwischen T und T' fallenden Teilbogen δ_2' von δ_2 und je eine Teilstrecke von P_1T_1 und $P_1'T_1'$. Der Kreis $k(M_0)$ hat mit C außerhalb von δ_2' keinen gemeinsamen Punkt.

P_1 (oder P_1') ist entweder kein Punkt von C oder eine Ecke von C. Daraus folgt, daß man durch P_1 und P_1' einen zu $K(M_0)$ hinreichend nahen größeren Kreis K_1 mit dem Mittelpunkte M_1 führen kann, der B enthält. Offenbar kann man M_1 auch so wählen, daß derjenige Kreis k_1 mit dem Mittelpunkte M_1, der die Geraden P_1T_1 und $P_1'T_1'$ in den Punkten P_2 und P_2' berührt, im Bereich B

liegt. Der von K_1 und k_1 begrenzte Kreisring enthält C und hat nach **3** den Inhalt $\pi\overline{P_1 T_2}^2$. Dieser Inhalt ist also kleiner, als der Inhalt $\pi\overline{P_1 T_1}^2$ des kleinsten Kreisringes mit dem Mittelpunkt M_0.

Aus diesem Widerspruch folgt der obige Satz[4]).

9. Der Zusammenhang zwischen dem Minimalkreisring und den kleinsten Kreisringen von C wird durch den folgenden Satz beleuchtet:

Hat eine konvexe Kurve C nur einen kleinsten Kreisring, so ist er ihr Minimalkreisring. Hat aber C mehrere kleinste Kreisringe, so stimmt ihr Minimalkreisring mit demjenigen kleinsten Kreisring überein, dessen innerer Kreis am größten ist.

Dieser Satz folgt aus dem folgenden Satze von T. Bonnesen und N. Kritikos[5]):

Liegt die konvexe Kurve C in dem von den konzentrischen Kreisen $\overline{K}$ und $\overline{k}$ begrenzten Kreisring vom Mittelpunkt $\overline{M}$ und lassen sich die gemeinsamen Punkte der Kurven C und $\overline{K}$ von den Zentralprojektionen der gemeinsamen Punkte von C und $\overline{k}$ auf $\overline{K}$ von $\overline{M}$ aus durch keine Gerade der Ebene trennen, so ist der Kreisring von $\overline{K}$ und $\overline{k}$ eindeutig bestimmt. Er fällt mit dem Minimalkreisring von C zusammen.

Aus dem Satze für die Lage der Stützpunkte von C mit dem kleinsten Kreisringe von minimaler Breite folgt einfach, daß dieser

---

[4]) Dieser Satz gilt ohne Weiteres auch für die Lage der Stützpunkte von C mit den zwei Kreisen des Minimalkreisringes.

Gilt nämlich der Satz für den Minimalkreisring nicht, so wird C von zwei Punkten P_1 und P_1' in solche Bogen C_1 und C_2 geteilt, von denen C_1 keinen inneren und C_2 keinen äußeren Stützpunkt von C enthält. Wir bezeichnen mit M_0 den Mittelpunkt des Minimalkreisringes, mit Γ_1 und Γ_2 bzw. γ_1 und γ_2 die Zentralprojektionen von C_1 und C_2 von M_0 aus auf $K(M_0)$ bzw. $k(M_0)$, mit P bzw. p die Projektion von P_1 auf $K(M_0)$ bzw. $k(M_0)$ in derselben Zentralprojektion und mit D den Halbierungspunkt von Γ_1.

Ist nun M_1 ein zu M_0 genügend nahe liegender Punkt der Strecke M_0D, so hat man offenbar $R(M_1) \leqq \overline{PM_1}$ und $r(M_1) \geqq \overline{pM_1}$. Dies führt aber zum Widerspruch

$$\operatorname{Min}[R(M)-r(M)] = R(M_0)-r(M_0) = \overline{Pp} > \overline{PM_1}-\overline{pM_1} \geqq R(M_1)-r(M_1),$$

Aus diesem Widerspruch folgt der Satz für den Minimalkreisring von C.

Dieser Satz und ein entsprechender von Kritikos (S. 584) lassen sich aus einander ableiten. Beim Beweis verwendet aber Kritikos unendlich kleine Größen höherer Ordnung.

[5]) Kritikos, S. 586.

Kreisring die voranstehenden Eigenschaften des Kreisringes von $\bar{K}$ und $\bar{k}$ besitzt und deshalb mit dem Minimalkreisring von C übereinstimmt.

10. Die für konvexe Kurven erhaltenen Resultate lassen sich auch auf konvexe Flächen verallgemeinern.

Als *Kugelschale* wird die abgeschlossene Menge zwischen zwei konzentrischen Kugeloberflächen bezeichnet. Eine Kugelschale, die eine konvexe Fläche F enthält und für welche die Differenz der Flächeninhalte ihrer zwei Kugeln bzw. die Differenz der Halbmesser ihrer zwei Kugeln am kleinsten ist, soll als *Kugelschale von kleinster Flächenabweichung* bzw. als *Minimalkugelschale* bezeichnet werden, wenn die innere Kugel innerhalb der Fläche F liegt[6]).

Die Existenz wenigstens einer Kugelschale von kleinster Flächenabweichung zu einer konvexen Fläche erkennt man ebenso, wie die Existenz eines kleinsten Kreisringes zu einer konvexen Kurve.

Auf Grund des Obigen kann man ohne größere Schwierigkeit den folgenden Satz beweisen:

Hat eine konvexe Fläche F mehrere Kugelschalen von kleinster Flächenabweichung, so berühren sich die inneren Kugeln dieser Kugelschalen in einem Punkte M von F. Die äußeren Kugeln gehen durch einen Kreis K vom Mittelpunkt M, der in der zu M gehörigen Stützebene von F liegt. In dieser Stützebene enthält F entweder einen Durchmesser von K, oder einen konvexen Bereich mit dem Hüllkreise K. Die Minimalkugelschale ist von kleinster Flächenabweichung. Hat F mehrere Kugelschalen von kleinster Flächenabweichung, so stimmt die Minimalkugelschale von F mit derjenigen Kugelschale von kleinster Flächenabweichung überein, deren innree Kugel am größten ist[7]).

Ist F die Begrenzung eines Kugelabschnittes, dessen Grund-

---

[6]) Bonnesen—Fenchel, S. 54.

[7]) Ich möchte hier bemerken, daß einige Beweise für Minimalkugelschalen bei Kritikos sich vereinfachen lassen.

Der Beweisgang in der Fußnote [3]) führt auch zum Satz: Ein Punkt von F ist kein Mittelpunkt der Minimalkugelschale.

Nennt man innere bzw. äußere Stützpunkte der konvexen Fläche F ihre gemeinsamen Punkte mit der inneren bzw. äußeren Kugeloberfläche der Minimalkugelschale, so gilt der Satz von Kritikos:

Projiziert man vom Mittelpunkt M_0 der Minimalkugelschale von F aus kreis K den Mittelpunkt M hat, so hat F offenbar mehrere Kugelschalen von kleinster Flächenabweichung. Die inneren Kugeloberflächen berühren sich in M, die äußeren gehen durch K.

Ist K der Durchschnittskörper eines Drehzylinders Z und einer Kugel S vom gleichen Durchmesser, deren Mittelpunkt M auf dem Mantel von Z liegt, so ist die Begrenzung von K eine konvexe Fläche F, die offenbar mehrere Kugelschalen von kleinster Flächenabweichung besitzt. Die inneren Kugeln dieser Kugelschalen berühren den Zylindermantel in M, die äußeren Kugeln gehen durch den Hauptkreis von S, der in der zu M gehörigen Berührungsebene des Zylindermantels liegt. Diese Fläche F enthält nur eine Strecke, einen Durchmesser von S.

(Eingegangen am 19. Januar 1942.)

---

die inneren Stützpunkte auf die äußere Kugeloberfläche $O(M_0)$, so sind diese Projektionen durch keine Ebene von den äußeren Stützpunkten getrennt.

Der Beweisgang in der Fußnote [4]) läßt sich auch zum Beweis dieses Satzes anwenden.

Besteht nämlich dieser Satz nicht zurecht, so gibt es eine Ebene ε, von der $O(M_0)$ in zwei Kugelkappen O_1 und O_2 geteilt wird, so daß das Innere von O_1 bzw. O_2 jeden äußeren Stützpunkt bzw. die Projektion jedes inneren Stützpunktes enthält. Wir bezeichnen mit P bzw. p einen Schnittpunkt von $O(M_0)$ mit ε bzw. seine Zentralprojektion auf die innere Kugeloberfläche $o(M_0)$ und mit D den von ε am weitestens liegenden Punkt von O_1. Dann gibt es auf der Strecke M_0D offenbar einen zu M_0 genügend nahe liegenden Punkt M_1, so daß F in der durch P gehenden Kugel S_1 vom Mittelpunkt M_1 und außerhalb der durch p gehenden Kugel s_1 von demselben Mittelpunkt liegt.

Die Differenz der Halbmesser von S_1 und s_1 ist aber kleiner, als diejenige von $O(M_0)$ und $o(M_0)$. Aus diesem Widerspruch folgt der Satz.

Dieser Satz von Kritikos gilt auch für diejenige Kugelschale von minimaler Flächenabweichung, die die größte innere Kugel besitzt. Der Beweis geschieht durch eine entsprechende Abänderung des für den kleinsten Kreisring von minimaler Breite gegebenen Beweises.