Über die Wurzeln der Dirichletschen L-Funktionen.

Von P. TURÁN in Budapest.

Im folgenden sei k stets eine positive ganze Zahl, $\varphi(k)$ die Eulersche zahlentheoretische Funktion, $\chi(n)$ eine beliebige von den zu k gehörigen Dirichletschen Charakteren (deren Anzahl bekanntlich $\varphi(k)$ ist). Die komplexe Veränderliche sei $s=\sigma+it$, α ein reeller Parameter und $a_1, a_2, \ldots$ Konstanten, welche von s, k und α unabhängig sind. Die Dirichletschen Funktionen $L(s, \chi)$ sind bekanntlich diejenige analytischen Funktionen, welche für $\sigma>1$ durch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ definiert sind.

Schon DIRICHLET erkannte im Jahre 1837 den Zusammenhang zwischen den Wurzeln der L-Funktionen und der Anzahl der Primzahlen der arithmetischen Progression $kx+l$, wo $(k, l)=1$; der schwerste Hilfssatz seines berühmten Satzes über die Existenz unendlich vieler Primzahlen der Progression war eben der Nachweis, daß $L(1, \chi)\neq 0$ für jedes χ und k. Der Dirichletsche Satz wurde sechzig Jahre später von DE LA VALLEE-POUSSIN in eine asymptotische Formel für die Primzahlen der Progression $kx+l$ verfeinert; dazu benötigte er aber die schärfere Tatsache, daß $L(s, \chi)\neq 0$ auf der ganzen Gerade $\sigma=1$ gilt. Diese Tatsache können auch die neueren Methoden von LANDAU und N. WIENER nicht entbehren. Wenn man zu der asymptotischen Primzahlformel auch ein Restglied zufügen will, muß man auch die komplexen Nullstellen der L-Funktionen im „kritischen" Streifen $0<\sigma<1$ betrachten. Bekanntlich hat hier jede der L-Funktionen unendlich viele Wurzeln; es ist sehr wahrscheinlich, daß alle diese auf der

Geraden $\sigma=\frac{1}{2}$ liegen[1]). Dies ist nicht einmal für den einfachsten Fall bewiesen, wenn $\chi=\chi_0$, der Hauptcharakter ist; in diesem Falle reduziert sich die Frage nach der Formel

$$(1) \qquad L(s, \chi_0)=\zeta(s)\prod_{p/k}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

(wo $\zeta(s)$ die Riemannsche Funktion bedeutet) auf die klassische Riemannsche Vermutung $\zeta(s)\neq 0$ für $\sigma>\frac{1}{2}$. Das weitgehendste Resultat in dieser Richtung verdanken wir TITCHMARSH[2]), nach welchem ein a_1 existiert so, daß im Gebiete $\sigma\geqq 1-a_1\log^{-0{\cdot}81}(|t|+2)$ $\zeta(s)\neq 0$ gilt.

Die meisten Ergebnisse der Theorie der L-Funktionen beziehen sich bei festem k auf $|t|\to\infty$. Die Klassenanzahl der definiten binären quadratischen Formen mit der Discriminante $-k$, die obere Abschätzung der kleinsten Primzahl der Progression $kx+l$ führten zu der Frage, wie sich die L-Funktionen im Gebiete $\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 1$, $|t|\leqq 5$ für $k\to\infty$ benehmen. Aus den vielen schönen Untersuchungen in dieser Richtung heben wir nur die folgenden hervor. Ein Satz von LITTLEWOOD[3]) wirft Licht auf die wichtige Frage, ob die L-Funktionen für $\sigma\geqq\frac{1}{2}$ reelle Wurzeln besitzen oder nicht; er besagt, daß jede L-Funktion mod k wenigstens eine Wurzel im Gebiete $\sigma\geqq\frac{1}{2}$, $|t|\leqq\frac{1}{\log\log\log k}$ besitzt. Aus einem Satz von SIEGEL[4]) — wie WALFISZ[5]) bemerkte — folgt, daß es eine, nur von ε abhängige Konstante $A(\varepsilon)$ gibt so, daß keine der zu k gehörigen L-Funktionen auf der Strecke $1\geqq\sigma\geqq 1-A(\varepsilon)k^{-\varepsilon}$

---

1) Explizit ausgesprochen bei A. PILTZ, *Habilitationsschrift*, 1884. Siehe auch HARDY and LITTLEWOOD, Some Problems of Partitio Numerorum III, *Acta Math.*, **44** (1922), p. 1—70.

2) E. C. TITCHMARSH, On $\zeta(s)$ and $\pi(x)$, *Quarterly Journal of Math.*, Oxford Series, **9** (1938), p. 97—108.

3) J. E. LITTLEWOOD, Researches in the theory of the Riemann ζ-function, *Proceedings London Math. Society*, (2) **20** (1922), Records, p. XXII—XXVIII.

4) C. L. SIEGEL, Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper, *Acta Arithmetica*, **1** (1936), p. 83—86.

5) A. WALFISZ, Zur additiven Zahlentheorie II, *Math. Zeitschrift*, **40** (1936), p. 592—607.

reelle Wurzeln besitzt. In Verschärfung eines Gronwallschen[6]) Resultats bewies A. PAGE[7]) schon früher, daß es ein a_2 gibt so, daß auf der Strecke $1 \geqq \sigma \geqq 1 - a_2 \log^{-1} k$ höchstens eine der L-Funktionen mod k verschwinden kann. Diese gehört dann zu einem reellen Charakter und besitzt hier eine einzige einfache Wurzel. Die von PAGE benützte Methode stammt von LANDAU[8]); er und anschließend TITCHMARCH[9]) bewiesen, daß für ein geeignetes a_3 im Gebiete $\sigma \geqq 1 - a_3 \log^{-1} k$, $|t| \leqq 5$ keine der zu komplexen Charakteren gehörigen L-Funktionen verschwindet, ferner, daß die zu reellen Charakteren gehörigen L-Funktionen hier nur auf der reellen Achse verschwinden können. Aber es ist bisher — abgesehen von $L(s, \chi_0)$ — für keine einzige L-Funktion mod k bekannt, daß sie im Rechtecke $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \leqq 5$ (oder auch nur in einem Rechtecke $\sigma \geqq 1 - a_4$, $|t| \leqq 5$) nicht verschwindet. (Was $L(s, \chi_0)$ betrifft, sie besitzt nach (1) überhaupt für $\sigma > 0$, $|t| \leqq 14$ keine Wurzeln, da die Wurzel von $\zeta(s)$ mit dem kleinsten positiven imaginären Teil bekanntlich[10]) $\frac{1}{2} + i \,.\, 14{,}13 \ldots$ ist.)

Im folgenden beweise ich, daß solche L-Funktionen mod k wirklich existieren und sogar *die Anzahl derjenigen L-Funktionen* mod k, *welche im Gebiete* $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{\log \log k}}$, $|t| \leqq 5$ *wenigstens eine Wurzel haben, durch die Gesamtanzahl der L-Funktionen* mod k, *d. h. durch* $\varphi(k)$ *dividiert, gegen* 0 *strebt.* Also ist die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung „im Wesentlichen" für $|t| \leqq 5$ für „fast alle" L-Funktionen mod k wahr. Sätze I und II werden noch schärfere Abschätzungen für die Anzahl derjenigen L-Funktionen mod k ergeben, welche im Gebiete $\sigma \geqq \alpha$, $|t| \leqq 5$ wenigstens eine Wurzel besitzen und sogar für die Gesamtanzahl der hier

[6]) H. GRONWALL, Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes, *Rendiconti Palermo,* 35 (1913), p. 145–159.

[7]) A. PAGE, On the number of primes in an arithmetic progression, *Proceedings London Math. Society,* (2) 39 (1935), p. 116–141.

[8]) E. LANDAU, Über das Nichtverschwinden der Dirichletschen Reihen, welche komplexen Charakteren entsprechen, *Math. Annalen,* 70 (1911), p. 69–78.

[9]) E. C. TITCHMARCH, On a divisor problem, *Rendiconti Palermo,* 54 (1930), p. 414–429.

[10]) Siehe z. B. E. C. TITCHMARSH, *The zeta-function of Riemann* (Cambridge, 1930), p. 45.

liegenden Wurzeln aller L-Funktionen mod k; hier bedeutet α eine beliebige Zahl im Intervalle $\frac{1}{2}+\frac{5}{\sqrt{\log\log k}}\leqq\alpha\leqq 1-\frac{2}{\log k}$. Diese Sätze erinnern uns interessanterweise an einen Satz von CARLSON[11]), welche sich auf die Wurzelverteilung der Riemannschen ζ-Funktion für $|t|\to\infty$ bezieht.

In einem früheren Aufsatze[12]) bewies ich, daß, wenn wir die kleinste Primzahl der Progression $l, l+k, l+2k, \ldots$ mit $P(k, l)$ bezeichnen, dann $P(k,l)<a_4\varphi(k)^{a_5}$ gilt, vorausgesetzt, daß ein $\frac{1}{2}\leqq a_6<1$ existiert mit der Eigenschaft, daß keine der L-Funktionen mod k im Gebiete $\sigma\geqq a_6$, $|t|\leqq 5$ verschwindet. Hier hängt a_5 natürlich von a_6 ab. Neuerdings habe ich die Ungleichung $P(k,l)<a_4\varphi(k)^{a_5}$ auf Grund der wesentlich schwächeren Annahme bewiesen, daß es ein a_7 gibt so, daß keine der L-Funktionen mod k im Gebiete

$$\sigma\geqq 1-a_7\frac{\log\log k}{\log k} \qquad (2)$$
$$|t|\leqq 5$$

verschwindet. Satz I gibt Orientierung für die Wahrscheinlichkeit dieser Vermutung, da die Anzahl *aller* Wurzeln *aller* L-Funktionen mod k im Gebiete $\sigma\geqq\frac{1}{4}$, $|t|\leqq 5$ gewiß $>a_8\varphi(k)\log k$ und von diesen nach Satz I im Teilgebiet (2) nur höchstens $a_9\log^{8a_7+6}k$ liegen Auf diese Frage werde ich in einer anderen Arbeit zurückkommen.

Im folgenden bezeichnen wir mit $N_k(\alpha)$ die Anzahl derjenigen Wurzeln *aller* L-Funktionen mod k, welche im Rechtecke $2\geqq\sigma\geqq\alpha$, $|t|\leqq 5$ liegen. Es sei stets $k>e^{30}$. Dann beweisen wir die folgenden zwei Sätze.

Satz I. *Es sei* $1-\frac{2}{\log k}\geqq\alpha\geqq\frac{-1+\sqrt{8}}{2}$. *Dann gilt*

$$N_k(\alpha)<a_9 k^{4(1-\alpha^2)}\log^{\frac{11}{2}}k.$$

---

11) F. CARLSON, Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion, *Arkiv för Math., Astronomi och Fysik,* **15** (1920), No. 20.

12) P. TURÁN, Über die Primzahlen der arithmetischen Progression (II), *diese Acta,* **9** (1939), p. 187—192.

Satz II. *Es sei* $\frac{-1+\sqrt{8}}{2} \geqq \alpha \geqq \frac{1}{2}+\frac{5}{\sqrt{\log\log k}}$. *Dann gilt*

$$N_k(\alpha) < a_{10} k^{\frac{1}{2}+2\alpha-2\alpha^2} \log k.$$

Beide der Exponenten $4(1-\alpha^2)$ und $\frac{1}{2}+2\alpha-2\alpha^2$ sind für die betrachteten α-Werte kleiner als 1. Die Exponenten könnte man mit umständlicheren Rechnungen, nämlich mittels bessere Wahl von zwei Parametern, etwas verkleinern.

Zum Beweis benötigen wir einige Lemmata.

Lemma I.[13]) *Es sei* $1-\frac{2}{\log k} \geqq \alpha \geqq \frac{1}{2}$, $\sigma \geqq \alpha - \frac{1}{\log k}$ *und*

$$S_l = \sum_{\substack{n \equiv l \bmod k \\ x \leqq n \leqq y}} \frac{d(n)}{n^\sigma},$$

wo $d(n)$ *die Anzahl der Teiler von* n *bedeutet,* x *und* y *Abkürzungen für* $k^{2\left(\alpha-\frac{1}{\log k}\right)}$ *bzw.* $k^{2\left(1+\alpha-\frac{1}{\log k}\right)}$ *sind. Dann gilt*

$$S = \sum_{l=1}^{k} S_l^2 < a_{11} k^{4(1-\alpha^2)-1} \log^5 k.$$

Beweis: Für jedes l gilt offenbar[14])

$$(3) \quad S_l^2 = \left(\sum_{\substack{n\equiv l \\ x \leqq n \leqq y}} \frac{d(n)}{n^{\frac{\sigma}{2}}} \frac{1}{n^{\frac{\sigma}{2}}} \right)^2 \leqq \left(\sum_{\substack{n\equiv l \\ x \leqq n \leqq y}} \frac{d(n)^2}{n^\sigma} \right) \left(\sum_{\substack{n\equiv l \\ x \leqq n \leqq y}} \frac{1}{n^\sigma} \right).$$

Da

$$(4) \quad \begin{aligned} \sum_{\substack{n\equiv l \\ x \leqq n \leqq y}} \frac{1}{n^\sigma} &\leqq \frac{1}{x^\sigma} + \frac{1}{k}\int_x^y \frac{du}{u^\sigma} \leqq a_{12}\left(k^{-2\alpha^2} + \frac{1}{k}\int_1^y \frac{du}{u^\alpha}\right) < \\ &< a_{13}(k^{-2\alpha^2} + k^{2(1+\alpha)(1-\alpha)-1}\log k) < a_{14} k^{2(1-\alpha^2)-1} \log k \end{aligned}$$

gilt, folgt aus (3) und (4)

$$(5) \quad S \leqq a_{14} k^{2(1-\alpha^2)-1} \log k \sum_{1 \leqq n \leqq y} \frac{d(n)^2}{n^\alpha}.$$

---

[13]) Nachträglich habe ich bemerkt, daß Lemma I aus Lemma II folgt und sogar mit $\log^4 k$ statt $\log^5 k$.

[14]) Wir verlassen von nun an die Bezeichnung „mod k" überall wo nicht ein Mißverständnis zu befürchten ist.

Bekanntlich gilt

$$\sum_{n\leqq N} d(n)^2 = O(N\log^3 N),$$

also gewinnt man durch partielle Summation

$$\sum_{n\leqq y}\frac{d(n)^2}{n^\alpha} \leqq a_{15}\int_1^y \frac{\log^3 u}{u^\alpha}\,du < a_{16}k^{2(1-\alpha^2)}\log^4 k. \tag{6}$$

(5) und (6) beweisen Lemma I.

Lemma II. *Wenn* $(k, l) = 1$ *und* $\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1 - \frac{2}{\log k}$, *dann gilt für* $\sigma \geqq \alpha - \frac{1}{\log k}$ *die Ungleichung*

$$S_l < a_{17}k^{1-2\alpha^2}\log^2 k.$$

Beweis. Es ist, mit den Bezeichnungen des vorigen Lemmas,

$$S_l = \sum_{\substack{x\leqq n\leqq y\\ n\equiv l}}\frac{1}{n^\sigma}\Big(\sum_{d/n} 1\Big) \leqq 2\sum_{\substack{x\leqq n\leqq y\\ n\equiv l}}\frac{1}{n^\sigma}\Big(\sum_{\substack{d/n\\ d\leqq\sqrt{n}}} 1\Big) =$$

$$= 2\sum_{\substack{d\leqq\sqrt{y}\\ (d,k)=1}}\frac{1}{d^\sigma}\left(\sum_{\substack{\max\left(d,\frac{x}{d}\right)\leqq m\leqq\frac{y}{d}\\ dm\equiv l}}\frac{1}{m^\sigma}\right) =$$

$$= 2\sum_{\substack{d\leqq\sqrt{x}\\ (d,k)=1}}\frac{1}{d^\sigma}\left(\sum_{\substack{\frac{x}{d}\leqq m\leqq\frac{y}{d}\\ m\equiv l_1}}\frac{1}{m^\sigma}\right) +$$

$$+ 2\sum_{\substack{\sqrt{x}<d\leqq\sqrt{y}\\ (d,k)=1}}\frac{1}{d^\sigma}\left(\sum_{\substack{d\leqq m\leqq\frac{y}{d}\\ m\equiv l_1}}\frac{1}{m^\sigma}\right) = S_l' + S_l'',$$

wo l_1 die (nach $(d, k) = 1$ immer existierende) Lösung der Kongruenz $dl_1 \equiv l \bmod k$ bedeutet. Dann ist aber, wie in (4),

$$S_l' < a_{18}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{d^\alpha}\left(\frac{d^\alpha}{x^\alpha} + \frac{1}{k}\int_1^{\frac{y}{d}}\frac{du}{u^\alpha}\right) <$$

$$< a_{19}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{y^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}\sum_{d\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{d}\right) < \tag{7}$$

$$< a_{20}\left(k^{\alpha-2\alpha^2} + k^{2(1+\alpha)(1-\alpha)-1}\log^2 k\right) < a_{21}k^{2(1-\alpha^2)-1}\log^2 k$$

und

$$\text{(8)}\quad \begin{aligned} S_I'' &< a_{22} \sum_{\sqrt{x} < d \leqq \sqrt{y}} \frac{1}{d^\alpha}\left(\frac{1}{d^\alpha} + \frac{1}{k}\int_1^{\frac{y}{d}} \frac{du}{u^\alpha}\right) \leqq \\ &\leqq a_{23}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{y^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)} \sum_{d \leqq \sqrt{y}} \frac{1}{d}\right) < a_{24} k^{2(1-\alpha^2)-1} \log^2 k. \end{aligned}$$

Aus (7) und (8) folgt Lemma II.

Es sei

$$\text{(9a)}\qquad \Delta(s, \chi_0) = L(s, \chi_0) - \frac{1}{k(s-1)} \sum_{k^2-k < n \leqq k^2} \frac{\chi_0(n)}{n^{s-1}}$$

und für $\chi \neq \chi_0$

$$\text{(9b)}\qquad \Delta(s, \chi) = L(s, \chi).$$

Lemma III. *Wenn* $\chi \neq \chi_0$, $\sigma \geqq \frac{1}{4}$, $|s| \leqq 10$, *dann gilt*

$$\left|\Delta(s, \chi) - \sum_{n \leqq k^2} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| < a_{25} k^{\frac{1}{2}-2\sigma} \log k.$$

Beweis: Für $\sigma > 0$ gilt $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$. Da nach Pólya $\left|\sum_{n=a}^{b} \chi(n)\right| \leqq a_{26} \sqrt{k} \log k$ gilt, folgt durch partielle Summation

$$\left|\sum_{n=k^2+1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| < a_{27} k^{\frac{1}{2}-2\sigma} \log k, \qquad \text{qu. e. d.}$$

Lemma IV. *Für* $\sigma \geqq \frac{1}{4}$, $|s| \leqq 10$ *gilt*

$$\left|\Delta(s, \chi_0) - \sum_{n \leqq k^2} \frac{\chi_0(n)}{n^s}\right| \leqq a_{28} k^{1-2\sigma}$$

Beweis: Die Funktion $\zeta(s, w)$ $(0 < w \leqq 1)$ sei für $\sigma > 1$ durch die Formel

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s}$$

definiert. Dann ist bekanntlich[15]) für $\sigma \geqq \frac{1}{4}$, wenn m eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet,

---

[15]) Siehe z. B. E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), Bd. II, p. 9—10.

$$\left|\zeta(s, w) - \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+w)^s}\right| \leqq \frac{|s|}{\sigma} \frac{1}{m^\sigma} < \frac{40}{m^\sigma}.$$

Setzen wir $w = \frac{a}{k}$, multiplizieren mit $k^{-s}\chi_0(a)$, so gelangen wir zu

$$(10) \quad \left| \frac{\chi_0(a)\zeta\left(s, \frac{a}{k}\right)}{k^s} - \frac{\chi_0(km+a)}{k(s-1)(km+a)^{s-1}} - \sum_{n=0}^{m} \frac{\chi_0(kn+a)}{(kn+a)^s} \right| < \frac{a_{29}}{(km+a)^\sigma}.$$

Es sei in (10) $m = k-1$, $a = 1, 2, \ldots k$; wenn wir nach a summieren, folgt

$$\left| \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi_0(a)\zeta\left(s, \frac{a}{k}\right) - \frac{1}{k(s-1)} \sum_{k^2-k+1 \leqq n \leqq k^2} \frac{\chi_0(n)}{n^{s-1}} - \sum_{n=1}^{k^2} \frac{\chi_0(n)}{n^s} \right| < a_{30} k^{1-2\sigma},$$

Da[15])

$$\frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi_0(a)\zeta\left(s, \frac{a}{k}\right) = L(s, \chi_0),$$

ist Lemma IV nach der Definition von $\Delta(s, \chi_0)$ (s. (9a)) bewiesen.

Es sei

$$(11) \qquad f(s, \chi) = \Delta(s, \chi) \sum_{n \leqq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^s},$$

wo x dieselbe Bedeutung hat, wie in Lemma I. Ferner sei

$$(12) \qquad \sum_{\substack{d|n \\ d \leqq x}} \mu(d) = a_n.$$

Dann ist offenbar

$$(13) \qquad |a_n| \leqq d(n),$$

wo $d(n)$ wieder die Teileranzahl von n bedeutet. Wir bemerken schon hier, daß die Zahlen a_n reell und von den Charakteren unabhängig sind.

Lemma V. *Es gilt für* $\sigma \geqq \frac{1}{4}$, $|s| \leqq 10$

$$\left| f(s, \chi_0) - 1 - \sum_{x \leqq n \leqq y} \frac{a_n \chi_0(n)}{n^s} \right| \leqq a_{31} k^{1-2\sigma} \int_1^x \frac{du}{u^\sigma}$$

und für $\chi \neq \chi_0$

$$\left| f(s,\chi) - 1 - \sum_{x \leq n \leq y} \frac{a_n \chi(n)}{n^s} \right| \leq a_{31} k^{\frac{1}{2}-2\sigma} \log k \int_1^x \frac{du}{u^\sigma}.$$

Beweis: Wir werden Lemma V für $\chi \neq \chi_0$ beweisen; für $\chi = \chi_0$ ist der Beweis analog. Aus (11) und Lemma III folgt

$$(14) \quad \left| f(s,\chi) - \sum_{n \leq k^2} \frac{\chi(n)}{n^s} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^s} \right| \leq$$

$$\leq a_{32} k^{\frac{1}{2}-2\sigma} \log k \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} \leq a_{33} k^{\frac{1}{2}-2\sigma} \log k \int_1^x \frac{du}{u^\sigma}.$$

Das linksstehende Produkt im (14) ist gleich

$$\sum_{\substack{n \leq k^2 \\ m \leq x}} \frac{\chi(n)\chi(m)\mu(m)}{(nm)^s} = \sum_{N \leq k^2 x} \frac{\chi(N)}{N^s} \sum_{\substack{m|N \\ m \leq x}} \mu(m) = \sum_{N=1}^{k^2 x} \frac{a_N \chi(N)}{N^s}.$$

Da offenbar $k^2 x = y$ und $a_N = 1$ für $N = 1$ und $a_N = 0$ für $1 < N \leq x$ gilt, ist Lemma V bewiesen.

Lemma VI. *Wenn* $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 - \frac{2}{\log k}$ *und* $|s| \leq 10$ *ist, dann gilt für* $\sigma \geq \alpha - \frac{1}{\log k}$

$$\left| \sum_{\chi} (f(s,\chi) - 1) \right| < a_{34} k^{2-2\alpha^2} \log^2 k.$$

Beweis: Es bezeichne U_1 die linksseitige Summe. Aus der bekannten Relation $\sum_{\chi} \chi(n) = 0$ oder $= \varphi(k)$ (je nachdem $n \not\equiv$ oder $\equiv 1 \bmod k$) und Lemma V folgt

$$\left| U_1 - \varphi(k) \sum_{\substack{x \leq n \leq y \\ n \equiv 1}} \frac{a_n}{n^s} \right| < a_{31} \left(k^{1-2\alpha} \int_1^x \frac{du}{u^\alpha} + k^{\frac{3}{2}-2\alpha} \int_1^x \frac{du}{u^\alpha} \right) <$$

$$< 2 a_{31} k^{\frac{3}{2}-2\alpha} \cdot k^{2\alpha(1-\alpha)} \log k,$$

also nach (13)

$$(15) \qquad |U_1| \leq k \sum_{\substack{x \leq n \leq y \\ n \equiv 1}} \frac{d(n)}{n^\alpha} + 2 a_{31} k^{\frac{3}{2}-2\alpha^2} \log k.$$

Aus Lemma II und (15) folgt offenbar Lemma VI.

Lemma VII. *Wenn* $\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1 - \frac{2}{\log k}$ *und* $|s| \leqq 10$, *so gilt für* $\sigma \geqq \alpha - \frac{1}{\log k}$

$$U_2 = \sum_{\chi} |f(s, \chi) - 1|^2 < a_{32} k^{4(1-\alpha^2)} \log^4 k.$$

Beweis: Aus Lemma V folgt wegen der Ungleichung $|a+b|^2 \leqq 2(|a|^2 + |b|^2)$

$$(16) \qquad U_2 < 2 \sum_{\chi} \Big| \sum_{x \leqq n \leqq y} \frac{a_n \chi(n)}{n^s} \Big|^2 + a_{33} k^{2-4\alpha} \Big(\int_1^x \frac{du}{u^\alpha} \Big)^2 \log^2 k.$$

Das erste Glied von (16) ist nach der Orthogonaleigenschaft der Charaktere gleich

$$(17) \qquad \begin{aligned} \sum_{\chi} \sum_{\substack{m,\, n \\ x \leqq m \leqq y \\ x \leqq n \leqq y}} \frac{a_m a_n \chi(n) \bar{\chi}(m)}{(m n)^\sigma} \Big(\frac{m}{n}\Big)^{it} &= \varphi(k) \sum_{\substack{m \equiv n \\ x \leqq n \leqq y \\ x \leqq m \leqq y \\ (n,\, k) = 1}} \frac{a_m a_n}{(m n)^\sigma} \Big(\frac{m}{n}\Big)^{it} = \\ = \varphi(k) \sum_{\substack{l \\ (l,\, k) = 1}} \Big| \sum_{\substack{m \equiv l \\ x \leqq m \leqq y}} \frac{a_m}{m^s} \Big|^2 &\leqq \varphi(k) \sum_{l=1}^{k} \Big(\sum_{\substack{n \equiv l \\ x \leqq n \leqq y}} \frac{d(n)}{n^\sigma} \Big)^2 \end{aligned}$$

nach den bei der Ungleichung (13) gemachten Bemerkungen. Aus (16), (17) und Lemma II folgt

$$U_2 < a_{34} [k^{4(1-\alpha^2)} \log^4 k + k^{2-4\alpha} k^{4\alpha(1-\alpha)} \log^4 k] < a_{35} k^{4(1-\alpha^2)} \log^4 k, \text{ qu.e.d.}$$

Lemma VIII. *Es sei* $\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1 - \frac{2}{\log k}$ *und* $F(s)$ *regulär für* $\alpha - \frac{1}{\log k} \leqq \sigma \leqq 4$, $|t| \leqq 10$. *Dann ist die Anzahl der Wurzeln von* $F(s)$ *für* $\alpha \leqq \sigma \leqq \frac{7}{4}$, $|t| \leqq 5$, *wenn nur* $k > a_{36}$, *kleiner als*

$$33 \log^{\frac{3}{2}} k \Big[\max_{\substack{\alpha - \frac{1}{\log k} \leqq \sigma \leqq 4 \\ |t| \leqq 7}} \log |F(s)| - \min_{|t| \leqq 5} \log \Big| F\Big(\frac{3}{2} + it\Big) \Big| \Big].$$

Beweis: Es sei $s_\nu = \frac{3}{2} + i \frac{\nu}{\sqrt{\log k}}$, $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N)$, wo N diejenige ganze Zahl bedeutet, für welche $\frac{N}{\sqrt{\log k}} \leqq 5 < \frac{N+1}{\sqrt{\log k}}$ gilt; dann ist $N \leqq 5 \sqrt{\log k}$. Nach der Jensenschen Formel folgt für die Anzahl der Wurzeln von $F(s)$ im Kreise $|s-s_\nu| \leq \frac{3}{2}-\alpha+\frac{1}{2\log k}=r$ bei festen ν kleiner als

$$\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{2r\log k}\right)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|F\left(s_\nu+\frac{3}{2}-\alpha+\frac{1}{2\log k}e^{i\vartheta}\right)\right|d\vartheta-\right.$$

$$\left.-\log|F(s_\nu)|\right|<$$

$$<3\log k\left[\max_{|s-s_\nu|\leq\frac{3}{2}-\alpha+\frac{1}{\log k}}\log|F(s)|-\min_{|t|\leq 5}\log\left|F\left(\frac{3}{2}+it\right)\right|\right]$$

Wenn wir nach ν summieren, folgt, daß die Anzahl derjenigen Wurzeln von $F(s)$, welche in irgendwelche der obigen $2N+1$ Kreise fallen, kleiner als

$$33\log^{\frac{3}{2}}k\left[\max_{\substack{\alpha-\frac{1}{\log k}\leq\sigma\leq 4\\ |t|\leq 7}}\log|F(s)|-\min_{|t|\leq 5}\log\left|F\left(\frac{3}{2}+it\right)\right|\right]$$

ist. Da diese Kreise offenbar das Gebiet $\alpha\leq\sigma\leq\frac{7}{4}$, $|t|\leq 5$ bedecken, folgt die Behauptung.

Beweis des Satzes I. Für $\alpha\leq\sigma\leq\frac{7}{4}$, $|t|\leq 5$ ist $L(s,\chi_0)\neq 0$; nach der Definition der Funktionen $f(s,\chi)$ ist also $N_k(\alpha)$ gewiß nicht größer, als die Gesamtanzahl der hier liegenden Wurzeln aller Funktionen $f(s,\chi)$. Lemma VIII ergibt mit $F(s)=\prod_\chi f(s,\chi)$ die Ungleichung

$$N_k(\alpha)<33\log^{\frac{3}{2}}k\left[\frac{1}{2}\max_{\substack{\alpha-\frac{1}{\log k}\leq\sigma\leq 4\\ |t|\leq 7}}\sum_\chi\log|f(s,\chi)|^2-\right.$$
$$\left.-\min_{\substack{|t|\leq 5\\ \sigma=\frac{3}{2}}}\sum_\chi\log|f(s,\chi)|\right].\tag{18}$$

Da aber für $\sigma=\frac{3}{2}$ und $\chi\neq\chi_0$

$$f(s,\chi)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m\leq x}\frac{\chi(m)\mu(m)}{m^s}\right)=$$
$$=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\chi(N)}{N^s}\left(\sum_{\substack{d\leq x\\ d|N}}\mu(d)\right)=1+\sum_{N=[x]+1}^{\infty}\frac{\chi(N)}{N^s}a_N,$$

also

$$|f(s,\chi)-1| < \sum_{N=[x]+1}^{\infty} \frac{d(N)}{N^{3/2}} < a_{37}\frac{\log k}{k^{\alpha}}$$

und da analoges gilt für $\chi = \chi_0$, also

$$\sum_{\chi} \log\left|f\left(\frac{3}{2}+it,\chi\right)\right| > -a_{37}k^{1-\alpha}\log k,$$

so folgt aus (18) nach dem Satz über das arithmetische und geometrische Mittel

$$N_k(\alpha) < 17\log^{\frac{3}{2}} k\left[\varphi(k) \max_{\substack{\alpha-\frac{1}{\log k}\leqq\sigma\leqq 4\\ |t|\leqq 7}} \log\left(\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}|f(s,\chi)|^2\right)+\right.$$

$$\left.+a_{38}k^{1-\alpha}\log k\right] <$$

$$< a_{39}\log^{\frac{3}{2}} k\left[\varphi(k)\max_{\substack{\alpha-\frac{1}{\log k}\leqq\sigma\leqq 4\\ |t|\leqq 7}}\log\left(1+\frac{2}{\varphi(k)}\Re\sum_{\chi}(f(s,\chi)-1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}|f(s,\chi)-1|^2\right)+k^{1-\alpha}\log k\right] <$$

$$< a_{40}\left[k^{1-\alpha}\log^{\frac{5}{2}} k+\log^{\frac{3}{2}} k\max_{\substack{\alpha-\frac{1}{\log k}\leqq\sigma\leqq 4\\ |t|\leqq 7}}\left|\sum_{\chi}(f(s,\chi)-1)\right|+\right.$$

$$\left.+\log^{\frac{3}{2}} k\max_{\substack{\alpha-\frac{1}{\log k}\leqq\sigma\leqq 4\\ |t|\leqq 7}}\sum_{\chi}|f(s,\chi)-1|^2\right].$$

Dann ist aber nach Lemma VI und VII

$$N_k(\alpha) < a_{41}k^{4(1+\alpha)(1-\alpha)}\log^{\frac{11}{2}} k, \qquad \text{qu. e. d.}$$

Der Beweis des Satzes II verläuft analog, wir skizzieren ihn nur daher. Es sei $1-\dfrac{2}{\log k} \geqq \alpha \geqq \dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{\sqrt{\log\log k}}$ und

(19) $$\Delta_1(s,\chi_0) = L(s,\chi_0) - \frac{1}{k(s-1)}\sum_{n=1}^{k}\frac{\chi_0(n)}{n^{s-1}}$$

und für $\chi \neq \chi_0$ wieder

(20) $$\Delta_1(s,\chi) = L(s,\chi).$$

Die Rolle des Lemmas III bzw. IV übernehmen die Ungleichungen

$$\left| \Delta_1(s,\chi) - \sum_{n \leq k} \frac{\chi(n)}{n^s} \right| < a_{42} k^{\frac{1}{2}-\sigma} \log k \tag{21}$$

für $\chi \neq \chi_0$, $\sigma \geq \frac{1}{4}$, $|s| \leq 10$ und

$$\left| \Delta_1(s,\chi_0) - \sum_{n \leq k} \frac{\chi_0(n)}{n^s} \right| < a_{43} k^{1-\sigma}. \tag{22}$$

Es sei

$$f_1(s,\chi) = \Delta_1(s,\chi) \sum_{n \leq z} \frac{\chi(n)\mu(n)}{n^s},$$

wo z zur Abkürzung für $k^{2\alpha - 1 - \frac{2}{\log k}}$ steht. Statt Lemma V hat man für $\sigma \geq \frac{1}{4}$, $|s| \leq 10$

$$\left| f_1(s,\chi_0) - 1 - \sum_{z \leq n \leq kz} \frac{a_n \chi_0(n)}{n^s} \right| < a_{44} k^{1-\sigma} \int_1^z \frac{du}{u^\sigma} \tag{23}$$

und für $\chi \neq \chi_0$

$$\left| f_1(s,\chi) - 1 - \sum_{z \leq n \leq kz} \frac{a_n \chi(n)}{n^s} \right| \leq a_{45} k^{\frac{1}{2}-\sigma} \log k \int_1^z \frac{du}{u^\sigma}. \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt durch Summation

$$\left| \sum_\chi (f_1(s,\chi) - 1) - \varphi(k) \sum_{\substack{z \leq n \leq kz \\ n \equiv 1}} \frac{a_n}{n^s} \right| < a_{46} k^{\frac{3}{2}-\sigma} \log k \int_1^{k^{2\alpha-1}} \frac{du}{u^\sigma},$$

$$\left| \sum_\chi (f_1(s,\chi) - 1) \right| \leq \varphi(k) \sum_{z \leq n \leq kz,\, n \equiv 1} \frac{d(n)}{n^\sigma} + a_{47} k^{\frac{3}{2}-\sigma} \log k \int_1^{k^{2\alpha-1}} \frac{du}{u^\sigma}. \tag{25}$$

Da bekanntlich $d(n) \leq a_{48} \exp\left(\frac{\frac{5}{4}\log n}{\log\log n} \right)$, so folgt aus (25)

$$\left| \sum_\chi (f_1(s,\chi) - 1) \right| \leq a_{49} \left[k^{(1-2\alpha)\sigma+1} + \int_1^{k^{2\alpha}} \frac{du}{u^\sigma} \right] \exp\left(3 \frac{\log k}{\log\log k} \right) + \tag{26}$$

$$+ a_{50} k^{\frac{3}{2}-\sigma} \log k \int_1^{k^{2\alpha-1}} \frac{du}{u^\sigma}.$$

Wenn also

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{\log\log k}\leqq \alpha \leqq \frac{-1+\sqrt{8}}{2} \; (<1), \tag{27}$$

so folgt aus (26) für $\sigma \geqq \alpha - \dfrac{1}{\log k}$

$$\left|\sum_{\chi}(f_1(s,\chi)-1)\right| < a_{51}\left\{\left[k^{1-(2\alpha-1)\alpha}+k^{2\alpha(1-\alpha)}\right]\exp\left(\frac{3\log k}{\log\log k}\right)+ \right.$$
$$\left. + k^{\frac{3}{2}-\alpha}\log k \,.\, k^{(2\alpha-1)(1-\alpha)}\right\}.$$

Da $1-(2\alpha-1)\alpha > 2\alpha(1-\alpha)$ und $\dfrac{3}{2}-\alpha+(2\alpha-1)(1-\alpha) >$ $> 1-(2\alpha-1)\alpha+\dfrac{3}{\log\log k}$, so gilt

$$\left|\sum_{\chi}(f_1(s,\chi)-1)\right| < a_{52}\, k^{\frac{1}{2}+2\alpha-2\alpha^2}\log k. \tag{28}$$

Ferner gilt, wie bei Lemma VII und Lemma I, für $\sigma \geqq \alpha - \dfrac{1}{\log k}$,

$$\sum_{\chi}|f_1(s,\chi)-1|^2 < 2\varphi(k)\sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{\substack{z\leqq n\leqq kz\\ n\equiv l}}\frac{d(n)}{n^{\alpha}}\right)^2+$$
$$+c_{53}\,k^{2-2\alpha}\log^2 k\left[\int_1^z\frac{du}{u^{\alpha}}\right]^2<$$
$$< c_{54}\left\{k\exp\left(\frac{6\log k}{\log\log k}\right)\sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{\substack{z\leqq n\leqq kz\\ n\equiv l}}\frac{1}{n^{\alpha}}\right)^2+\right. \tag{29}$$
$$\left.+k^{2-2\alpha}\log^2 k\,.\,k^{2(2\alpha-1)(1-\alpha)}\right\} < c_{56}\,k^{4\alpha(1-\alpha)}\exp\left(\frac{6\log k}{\log\log k}\right).$$

Aus (28), (29) und Lemma VIII folgt Satz II ebenso, wie Satz I, da für $\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{\sqrt{\log\log k}}\leqq\alpha\leqq\dfrac{-1+\sqrt{8}}{2}$ und $k > c_{57}$

$$\frac{1}{2}+2\alpha-2\alpha^2 > 4\alpha(1-\alpha)+\frac{6}{\log\log k},$$

also

$$\left|\sum_{\chi}(f_1(s,\chi)-1)\right|+\sum_{\chi}|f_1(s,\chi)-1|^2 < c_{58}\,k^{\frac{1}{2}+2\alpha-2\alpha^2}\log k.$$

(Eingegangen am 27. August 1941.)