Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes.

Von FRIEDRICH RIESZ und BÉLA V. SZ. NAGY in Szeged.

Der folgende, sog. statistische Ergodensatz wurde von J. v. NEUMANN in 1931 gefunden[1]):

Ist U eine unitäre Transformation des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$,[2]) so existiert für jedes $f \in \mathfrak{H}$ der Limes

$$f^* = \lim_{n-m\to\infty} \frac{1}{n-m} \sum_{\nu=m}^{n-1} U^\nu f,$$

und f^* ist invariant bei U, d. h. $Uf^* = f^*$.

Der folgende Beweis dieses Satzes (und einer Verallgemeinerung desselben), den einer von uns (F. RIESZ) vor fast 10 Jahren gefunden hat, führte zu einer Frage, die am Ende von §. 1 formuliert und in §. 2 (durch B. v. SZ. NAGY) beantwortet wird.

Genauer gesagt, gab CARLEMAN in 1932 einen sehr elementaren Beweis dieses Satzes, allerdings nur für den sogenannten ergodischen Fall, d. h. für den Fall, wo der Hilbertsche Raum von den quadratisch integrierbaren Funktionen gebildet wird und

---

[1]) J. v. NEUMANN, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proceedings National Academy U. S. A.*, **18** (1932), S. 70—82.

[2]) Für die Grundbegriffe der Theorie des Hilbertschen Raumes verweisen wir auf M. H. STONE, *Linear transformations in Hilbert space* (New York, 1932), oder auf B. v. Sz. NAGY, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, *Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete*, Bd. V/5 (Berlin, 1942). Der Verfasser des letztgenannten Berichtes benutzt die Gelegenheit, einen infolge einer Textänderung während der Korrektur eingeschlichenen Defekt richtigzustellen:

Auf Seite 17, Reihen 7—9, soll der Satz: „Umgekehrt, es folgt aus $P \geqq Q$, daß ... $PQ = Q$." *richtig heißen:* „Umgekehrt, es folgt aus $P \geqq Q$, daß $I - P \leqq I - Q$; für jedes f gilt also $\|(I-P)Qf\|^2 = ((I-P)Qf, Qf) \leqq$ $\leqq ((I-Q)Qf, Qf) = 0$, d. h. $(I-P)Q = O$, $Q = PQ$."

die einzigen Invarianten von U die Konstanten sind[3]). F. Riesz hat nun bemerkt, daß der Gedanke von Carleman, passend umgestaltet, nicht nur den ursprünglichen Satz, sondern unter anderem auch dessen Verallgemeinerung auf den Fall einer beliebigen normalen Transformation T liefert, wenn nur T eine *Kontraktion* ist, d. h. wenn $\|Tf\| \leqq \|f\|$ für jedes $f \in \mathfrak{H}$ gilt. Ja auch die Voraussetzung, daß T normal ist, dient nur dazu, zu sichern, daß jedes Element, das bei T^* invariant ist, auch bei T invariant bleibt.

Den so verallgemeinerten Gedankengang hat Riesz im Druck nicht veröffentlicht, dieser wurde nur mündlich und brieflich weitergegeben, und gelangte schließlich, wieder nur für den Fall eines unitären U, im Berichte von E. Hopf über Ergodentheorie[4]) zum Abdruck. In dieser Form lautet der Beweis, wie folgt.

§. 1.

Sei U eine unitäre Transformation des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$. Der von allen Elementen der Form $Ug-g$ aufgespannte Unterraum von $\mathfrak{H}$ sei mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Ein Element f aus $\mathfrak{M}$ ist dann entweder selbst von dieser Form, oder es ist mindestens durch solche Elemente beliebig genau approximierbar.

Wir setzen

$$V_{mn} = \frac{1}{n-m} \sum_{\nu=m}^{n-1} U^{\nu} \qquad (n > m \geqq 0).$$

Ist $f = Ug - g$, so hat man

$$V_{mn} f = \frac{U^n g - U^m g}{n-m},$$

$$\|V_{mn} f\| \leqq \frac{\|U^n g\| + \|U^m g\|}{n-m} = \frac{2\|g\|}{n-m}, \tag{1}$$

folglich $V_{mn} f \to 0$, wenn $n - m \to \infty$.

Ist f zwar nicht selbst von dieser Form, aber mit solchen Elementen $f' = Ug - g$ beliebig genau approximierbar, so folgt aus

---

[3]) T. Carleman, Application de la théorie des équations intégrales linéaires aux équations différentielles non linéaires, *Acta Math.*, **59** (1932), S. 63–87.

[4]) E. Hopf, Ergodentheorie, *Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete*, Bd. V/2 (Berlin, 1937), § 8.

(2) $$\|V_{mn}f\| \leqq \|V_{mn}(f-f')\| + \|V_{mn}f'\| \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{n-m}\sum_{\nu=m}^{n-1}\|U^{\nu}(f-f')\| + \|V_{mn}f'\| = \|f-f'\| + \|V_{mn}f'\|$$

wieder $V_{mn}f \to 0$ für $n-m \to \infty$.

Der Satz ist also für jedes f aus $\mathfrak{M}$ gültig. Andererseits gilt aber der Satz für jedes Element, das bei U invariant ist, da dies auch bei V_{mn} invariant ist. Diese Invarianten bilden einen Unterraum $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$.

Wegen der Linearität von V_{mn} gilt dann der Satz auch für jedes Element $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \mathfrak{M}$, $f_2 \in \mathfrak{N}$, und f^* ist dann gleich f_2, d. h. ist bei U invariant.

Nun ist jedes Element f von $\mathfrak{H}$ in dieser Form darstellbar. Es genügt dazu zu zeigen, daß jedes Element g, das zu $\mathfrak{M}$ orthogonal steht, in $\mathfrak{N}$ enthalten ist. In der Tat, für beliebiges $h \in \mathfrak{H}$ gilt:

$$(U^*g-g, h) = (U^*g, h) - (g, h) = (g, Uh) - (g, h) = (g, Uh-h) = 0,$$

folglich ist $U^*g - g = 0$, d. h. g ist gegenüber U^* invariant. Auf Grund der für die unitären Transformationen geltenden Gleichung $UU^* = I$ folgt hieraus $Ug = U(U^*g) = g$, d. h. g ist auch gegenüber U invariant, also in $\mathfrak{N}$ enthalten.

Damit ist der Satz bewiesen. Von der Voraussetzung, daß U unitär ist, wurde nur benutzt, daß $\|Uf\| = \|f\|$ (letzter Schritt in (1) und (2)), und daß jedes Element, das bei U^* invariant ist, auch bei U invariant bleibt. *Der Gedankengang gilt also umsomehr für jede solche beschränkte lineare Transformation T statt U,*

a) *die eine Kontraktion ist, d. h. für die immer $\|Tf\| \leqq \|f\|$ gilt,*

b) *die mit ihrer Adjungierten T^* die gleichen Elmente invariant läßt.*

In den letzten Jahren gelang es, den v. Neumannschen Satz durch verschiedene sehr einfache Methoden derart zu verallgemeinern, daß die Rolle von U eine beliebige Kontraktion, d. h. eine nur die Bedingung a) genügende lineare Transformation T übernimmt[5]). Das legt die Frage nahe, ob Bedingung b) nicht

[5]) Vgl. z. B. Garrett Birkhoff, The mean ergodic theorem, *Duke Math. Journal*, **5** (1939), S. 19—20; E. R. Lorch, Means of iterated transformations in reflexive vector spaces, *Bulletin American Math. Society*, **45** (1939), S. 945—947; F. Riesz, Some mean ergodic theorems, *Journal London Math. Society*, **13** (1938), S. 274—278; Another proof of the mean ergodic theorem, *diese Acta*, **10** (1941), S. 75—76.

schon aus Bedingung a) folgt? Wir werden diese Frage bejahend beantworten.

§. 2.

Wir beweisen den soeben angekündigten Satz:

Ist T eine Kontraktion, d. h. eine lineare Transformation mit $\|Tf\| \leqq \|f\|$ für jedes f aus $\mathfrak{H}$, so haben T und ihre Adjungierte T^* die gleichen invarianten Elemente.

Mit T ist bekanntlich auch T^* eine Kontraktion, d. h. es gilt auch

$$\|T^*f\| \leqq \|f\|.$$

Schreibt man hier insbesondere $f = Tg$, so erhält man

$$\|T^*Tg\| \leqq \|Tg\|. \tag{3}$$

Man hat ferner

$$\|g - T^*Tg\|^2 = (g - T^*Tg, g - T^*Tg) = \\ = (g, g) - (g, T^*Tg) - (T^*Tg, g) + (T^*Tg, T^*Tg) = \\ = \|g\|^2 - 2\|Tg\|^2 + \|T^*Tg\|^2,$$

also, wegen (3),

$$\|g - T^*Tg\|^2 \leqq \|g\|^2 - \|Tg\|^2. \tag{4}$$

Nun sei g ein gegenüber T invariantes Element. Dann ist die rechte Seite von (4) gleich 0, folglich ist $g - T^*Tg = 0$, d. h., g ist auch gegenüber T^*T invariant.

Also ist

$$T^*g = T^*(Tg) = g,$$

d. h., g ist auch gegenüber T^* invariant.

Damit wurde gezeigt, daß die Elemente, die bei T invariant sind, auch bei T^* invariant bleiben. Da man aber die Rolle von T und T^* miteinander vertauschen kann, folgt hieraus, daß T und T^* dieselben Invarianten besitzen.

(Eingegangen am 4. Mai 1942.)