Über projektive Kegelschnittsysteme.

Von B. DOLAPTSCHIJEW (Sofia).

Zweck der vorliegenden Arbeit ist einen Satz über projektive Kegelschnittsysteme herzuleiten, der an und für sich einiges Interesse darbietet, ferner mit Erfolg angewendet werden kann, um die Schnittkurve zweier Rotationsflächen zweiten Grades mit sich schneidenden Drehachsen zu bestimmen.

Es handelt sich um die folgende Frage. Seien

$$f_1+\lambda f_2=0 \tag{1}$$

und

$$f_1'+\lambda' f_2'=0 \tag{2}$$

zwei verschiedene Kegelschnittsbüschel; ist es möglich eine solche Beziehung zwischen den Kurven der beiden Kegelschnittsbüschel festzustellen, daß die Schnittpunkte von je zwei entsprechenden Kurven zu einem festen Kegelschnitt gehören?

Wenn eine Beziehung der besagten Art besteht, so kann man die feste Schnittkurve mittels einer beliebigen Kurve (1) und der entsprechenden Kurve (2) in der Form darstellen:

$$h\equiv(f_1+\lambda f_2)+\mu(f_1'+\lambda' f_2')=0, \tag{3}$$

vorausgesetzt, daß die beiden einander entsprechenden Kurven verschieden sind. Werden die Grundkurven $f_1'=0$ und $f_2'=0$ des zweiten Büschels derart gewählt, daß sie bzw. den Kurven $f_1=0$ und $f_2=0$ entsprechen, dann ist

$$h\equiv f_1+\mu_1 f_1'$$

und auch

$$h\equiv f_2+\mu_2 f_2',$$

vorausgesetzt, daß die Kurven $f_1=0$, $f_2'=0$, und ebenso die Kurven $f_2=0$, $f_2'=0$ verschieden sind. Daraus folgt:

$$f_1+\mu_1 f_1'\equiv\nu(f_2+\mu_2 f_2'),$$

wo ν einen Proportionalitätsfaktor bedeutet; also:

$$f_1-\nu f_2\equiv-\mu_1 f_1'+\nu\mu_2 f_2'.$$

Das bedeutet aber, daß die Kurve

$$g \equiv f_1 - \nu f_2 = 0$$

des ersten Büschels mit der Kurve

$$-\mu_1 f_1' + \nu \mu_2 f_2' = 0$$

des zweiten Büschels identisch ist.

Stellen wir die Kegelschnittsbüschel (1) und (2) mittels der Grundkurven f_1 und g, bzw. f_1' und g dar, so ist nach (3) die feste Schnittkurve

$$h \equiv (f_1 + \lambda g) + \mu (f_1' + \lambda' g) = 0,$$

oder in anderer Form:

$$f_1 + \mu f_1' + (\lambda + \mu \lambda') g = 0. \tag{4}$$

Laut Voraussetzung sind die Kurven $f_1 = 0$, $f_1' = 0$ und $g = 0$ linear unabhängig. Für alle Werte von λ und für die entsprechenden Werte von λ' und μ stellt die Gleichung (4) dieselbe Kurve dar, und der Koeffizient von f_1 bleibt derselbe. Daraus folgt, daß auch die Koeffizienten von f_1' und von g konstant sind, d. h.

$$\mu = \text{konst.} \quad \text{und} \quad \lambda + \mu \lambda' = \text{konst.},$$

oder

$$\lambda' = a + b\lambda \qquad (a,\ b = \text{konst.}).$$

Das bedeutet aber, daß die Beziehung zwischen den beiden Büscheln eine Projektivität ist. Offenbar entspricht dabei die gemeinsame Kurve $g = 0$ sich selbst.

Nehmen wir umgekehrt an, daß zwei Kegelschnittsbüschel eine gemeinsame Kurve $g = 0$ besitzen; es seien die beiden Büschel:

$$f_1 + \lambda g = 0$$

und

$$f_1' + \lambda' g = 0.$$

Lassen wir dem Wert λ den Wert $\lambda' = -\lambda$ entsprechen; die Schnittpunkte der entsprechenden Kurven der beiden Kegelschnittsbüschel liegen dann auf dem festen Kegelschnitt:

$$h \equiv f_1 + f_1' = 0.$$

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer eineindeutigen Beziehung zwischen zwei Kegelschnittsbüscheln, bei welcher die Schnittpunkte je zwei entsprechender Kurven auf einem festen Kegelschnitte liegen, besteht darin, daß die beiden Kegelschnittsbüschel einen gemeinsamen Kegelschnitt besitzen. Die Beziehung ist eine Projektivität bei welcher der gemeinsame Kegelschnitt sich selbst entspricht.

(Eingegangen am 1. Sept. 1943.)