Über die Fouriersche Reihe der Abkühlung.

Von L. FEJES in Kolozsvár.

1. Es seien $0=\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ in zunehmender Größenordnung die nichtnegativen Wurzeln der transzendenten Gleichung $z+h \operatorname{tg} \pi z=0$ $(h>0)$[1]), (x_0, x_1) ein beliebiges reelles Intervall von der Länge $x_1-x_0=2\pi$ und $f(x)$ eine in (x_0, x_1) erklärte reelle L-integrierbare Funktion. Wir nennen die Reihe

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \mu_\nu x + b_\nu \sin \mu_\nu x), \tag{1}$$

$$a_0=\frac{h}{2(1+\pi h)} \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt, \quad a_\nu=\frac{2\mu_\nu}{2\pi\mu_\nu-\sin 2\pi\mu_\nu} \int_{x_0}^{x_1} f(t) \cos \mu_\nu t\,dt,$$

$$b_\nu=\frac{2\mu_\nu}{2\pi\mu_\nu-\sin 2\pi\mu_\nu} \int_{x_0}^{x_1} f(t) \sin \mu_\nu t\,dt, \quad (\nu=1, 2, \ldots)$$

— nach dem Vorschlag des Herrn Professor L. FEJÉR — *die Fouriersche Reihe der Abkühlung* von $f(x)$[2]).

Diese Reihe geht im Grenzfall $h \to \infty$ in die gewöhnliche Fouriersche Reihe über, verhält sich aber trotz dieser formalen Übereinstimmung in mehreren Hinsichten gegenüber der gewöhnlichen Fourier-Reihe verschieden. Fassen wir zunächst kurz die wichtigsten Ergebnisse bezüglich dieser Reihe zusammen!

---

[1]) Setzt man $\mu_\nu=\nu-\frac{1}{2}+\delta_\nu(h)$, so gilt $\frac{1}{2}=\delta_0(h)>\delta_1(h)>\delta_2(h)>\ldots$; $\delta_\nu(h)=\frac{h}{\pi\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$. Für ein festes ν ist dagegen $\lim_{h\to\infty} \delta_\nu(h)=\frac{1}{2}$.

[2]) FOURIER stößt im Problem der „radialen Abkühlung einer Kugel" an den Sonderfall $x_0+x_1=0$, $f(x)+f(-x)=0$, d. h. an das Problem der Entwicklung in $(0, \pi)$ in eine reine Sinusreihe. Dieser Sonderfall ist in erster Reihe dadurch ausgezeichnet, daß $\{\sin \mu_\nu x\}$ in Bezug auf $(0, \pi)$ — und daher auch für $(-\pi, \pi)$ — ein Orthogonalsystem ist, während die Orthogonalität durch Hinzufügung des Systems $\{\cos \mu_\nu x\}$, oder durch Ersetzung von $(-\pi, \pi)$ durch ein anderes Intervall verloren geht.

2. Die Reihe (1) ist als Sonderfall der allgemeineren Cauchyschen Exponentialreihe[3]) im Inneren von (x_0, x_1) mit der gewöhnlichen Fourier-Reihe von $f(x)$ äquikonvergent und stellt hier dieselbe Funktion dar wie die gewöhnliche Fourier-Reihe[4]). Bezeichnen wir die Partialsummen der Reihe (1) mit $s_n(x)$, so gilt genauer:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin n(x-t)}{x-t} f(t)\,dt + \eta_n(x), \tag{2, 1}$$

wobei $\eta_n(x)$ in $(x_0+\delta, x_1-\delta)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen Null strebt, wie klein auch die positive Größe δ sei.

Für die Intervallendpunkte x_0, x_1 gilt[5]):

$$(2, 2) \qquad \begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nt}{t} \frac{f(x_0+t)-f(x_1-t)}{2}\,dt + o(1), \\ s_n(x_1) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nt}{t} \frac{f(x_1-t)-f(x_0+t)}{2}\,dt + o(1). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} [s_n(x_0) + s_n(x_1)] = 0. \tag{2, 3}$$

Es läßt sich ferner zeigen[6]), daß aus der Konvergenz bzw. Divergenz der betrachteten Reihe an einer beliebigen Stelle x die Konvergenz bzw. Divergenz an sämtlichen Stellen $x \pm 2m\pi$ $(m = 1, 2, \ldots)$ folgt. Es gilt die Gleichheit (2, 3) enthaltende Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n(x) + s_n(x+2\pi)}{2} = he^{-hx} \int_{x_0}^{x} e^{ht} f(t)\,dt, \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1, \tag{2, 4}$$

woraus sich die Summe der betrachteten Reihe in $(x_1, x_1+2\pi)$ bestimmen läßt.

Wir heben schließlich nur noch ein — zum Lebesgueschen Satz über gliedweise Integration der Fourier-Reihen analoges — Ergebnis hervor[7]): Die aus der Reihe (1) durch gliedweise Integration erhaltene Reihe konvergiert in (x_0, x_1) gleichmäßig gegen das unbestimmte Integral

---

[3]) É. Picard, Traité d'analyse II (3e éd.), S. 198—203.

[4]) L. Fejes, Des séries exponentielles de Cauchy, *Comptes Rendus,* **200** (1935), S. 1712—1714.

[5]) Fejes, L., A Cauchy-féle exponenciális sor, *Mat. és Fiz. Lapok,* **45** (1938), S. 115—132.

[6]) Fejes, L., A lehülés Fourier-soráról, *Mat. és Term.-tud. Értesitő,* **61** (1942), S. 478—495.

[7]) s. Fußnote 5.

von $f(x)$:

$$(2, 5)\quad \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = c + a_0 x + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(-\frac{b_\nu}{\mu_\nu}\cos\mu_\nu x + \frac{a_\nu}{\mu_\nu}\sin\mu_\nu x\right), \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

wobei c eine geeignete Konstante bedeutet.

3. Entwickelt man ein Polynom

$$\tau(x) = \sum_{\nu=0}^{m}(\alpha_\nu\cos\mu_\nu x + \beta_\nu\sin\mu_\nu x)$$

in (x_0, x_1), für die $\tau(x_0) + \tau(x_1) \neq 0$ ist, in eine Fouriersche Reihe der Abkühlung, so konvergiert dieselbe für $x_0 < x < x_1$ gegen $\tau(x)$, ist aber wegen (2, 3) keineswegs mit $\tau(x)$ identisch. Zieht man aus dieser Reihe $\tau(x)$ ab, so erhält man eine Reihe der Gestalt

$$(3, 1)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu\cos\mu_\nu x + B_\nu\sin\mu_\nu x),$$

die in allen inneren Punkten des Intervalls (x_0, x_1) gegen Null strebt. Die Unizitätssätze der gewöhnlichen trigonometrischen Reihen verlieren daher für derartige Reihen ihre Gültigkeit. Vielmehr möchte man im ersten Augenblick nach den obigen Betrachtungen erwarten, daß es für die identisch verschwindende Funktion in (x_0, x_1) unendlich viele wesentlich verschiedene Entwicklungen gäbe.

Dies trifft aber nicht zu! Wir werden zeigen, daß eine — gewissen ziemlich allgemeinen Bedingungen genügende — Reihe der Gestalt (3, 1), die in (x_0, x_1) fast überall gegen Null strebt, bis auf die Normierung eindeutig bestimmt ist. Dies folgt aus dem

S a t z: *Es sei* $\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu\cos\mu_\nu x + b_\nu\sin\mu_\nu x)$ *eine Reihe mit den Partialsummen* $s_n(x)$, *für die* $\int\limits_{x_0}^{x} s_n(t)\,dt$ *in* (x_0, x_1) *gleichmäßig gegen das unbestimmte Integral einer L-integrierbaren Funktion* $s(x)$ *strebt, und für die* $\lim\limits_{n\to\infty}[s_n(x_0) + s_n(x_1)] = 0$ *ausfällt. Dann ist diese Reihe die Fouriersche Reihe der Abkühlung von* $s(x)$.

Das Bestehen von (2, 3) erweist sich daher nicht nur als eine notwendige, sondern — im wesentlichen — auch als eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine Reihe von der Gestalt (3, 1) Fourier-Reihe der Abkühlung in (x_0, x_1) sei.

Wir wollen diesen Satz an einigen Anwendungen erläutern. Bemerken wir zunächst, daß die Bedingung über die gleichmäßige Konvergenz der durch gliedweise Integration erhaltene Reihe sicherlich erfüllt ist, wenn z. B. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(a_\nu^2+b_\nu^2)^{\frac{1}{2}}}{\nu}$ konvergiert. Aus der Konvergenz dieser Reihe folgt aber — wie wir sehen werden — die gleichzeitige Konvergenz der Folge $\{s_n(x_0)+s_n(x_1)\}$. Mithin erhält man durch geeignete Komposition von zwei Reihen der Gestalt (3, 1), für die $\sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu^2+B_\nu^2)^{\frac{1}{2}}/\nu$ konvergiert und die in (x_0, x_1) fast überall gegen Null streben, eine dritte Reihe, für die $\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0)+s_n(x_1)]=0$ ausfällt. Diese letztere ist aber als Fourier-Reihe der Abkühlung von $f(x)\equiv 0$ identisch Null. Wir erhalten daher aus unserem Satz als

Korollar: *Eine Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu\cos\mu_\nu x+b_\nu\sin\mu_\nu x)$, *für die* $\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2)^{\frac{1}{2}}/\nu$ *konvergiert, und die in* (x_0, x_1) *fast überall gegen Null strebt, ist bis auf die Normierung eindeutig bestimmt.*

Als eine weitere Anwendung betrachten wir die „Reihe" $\sin\mu_n x$, in der also mit Ausnahme von b_n sämtliche Koeffizienten verschwinden. Dieselbe ist nach dem obigen Satze in $(-\pi, \pi)$ die Fouriersche Reihe der Abkühlung von $\sin\mu_n x$. Wir erhalten daraus auf einem indirekten Weg das Fouriersche Ergebnis, daß nämlich die Folge

$$\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\mu_\nu}{2\pi\mu_\nu-\sin 2\pi\mu_\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\mu_\nu x \qquad \nu=1, 2, \ldots$$

in $(0, \pi)$ ein normiertes Orthogonalsystem ist.

Vor dem Beweis unseres Satzes wollen wir vollständigkeitshalber den Beweisgang der Ergebnisse von 2 kurz zusammenfassen.

4. Wir erklären zunächst, was unter einer Cauchyschen Exponentialreihe zu verstehen ist. Betrachten wir zwei ganze Funktionen $\chi(z)$ und $\psi(z)$, deren Summe $\pi(z)=\chi(z)+\psi(z)$ nur einfache Nullstellen besitzt und die außerdem folgender Bedingung genüge leisten: Es lassen sich zwei positive Größen σ und M_σ und eine mit dem Anfangspunkt konzentrische Kreisfolge $K_1, K_2, \ldots$ mit den Halbmessern $r_1<r_2<\ldots$ $(r_n\to\infty)$ derart angeben, daß für sämtliche Werte von n

$$\int_{K_n^+}\left\{\left|\frac{\psi(z)}{\pi(z)}\right|+\left|\frac{\chi(-z)}{\pi(-z)}\right|\right\}|e^{\sigma z}||dz|<M_\sigma \tag{4, 1}$$

ausfällt, wobei K_n^+ den in der Halbebene $R[z]\geqq 0$ liegenden Teil von K_n bedeutet. Sind zwei derartige Funktionen $\chi(z)$ und $\psi(z)$ vorhanden, so bezeichnen wir mit $\bar\sigma$ die obere Grenze derjenigen Größen σ, zu denen sich eine die Ungleichung (4, 1) befriedigende Schranke M_σ angeben läßt. Betrachten wir nun ein beliebiges reelles Intervall (x_0, x_1) von der Länge $x_1 - x_0 = \sigma$ und eine in (x_0, x_1) L-integrierbare Funktion $f(x)$ und bilden die Reihe

$$\sum_{\pi(\lambda)=0} \frac{\chi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-t)} f(t)\, dt,$$

wobei die Summation in einer gewissen Reihenfolge auf sämtliche Wurzeln λ der Gleichung $\pi(\lambda) = 0$ zu erstrecken ist. Von dieser Reihe bilden wir durch gewisse Anordnung und Gruppierung der Glieder eine wohlbestimmte neue Reihe. Und zwar fassen wir sämtliche Glieder der ursprünglichen Reihe, für die $r_{\nu-1} \leqq |\lambda| < r_\nu$ $(r_0 = 0)$ ist, in einem einzigen Glied der neuen Reihe zusammen. Die so erhaltene Reihe

$$(4,2) \qquad f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r_{\nu-1} \leqq |\lambda| < r_\nu} c_\lambda e^{\lambda x}, \quad c_\lambda = \frac{\chi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\lambda t} f(t)\, dt$$

nennen wir die Cauchysche Exponentialreihe von $f(x)$.

Diese Reihe ergibt im Fall $\chi(z) = e^{\pi z}$, $\psi(z) = -e^{-\pi z}$ die gewöhnliche Fourier-Reihe, im Fall $\chi(z) = (z+h)\, e^{\pi z}$, $\psi(z) = (z-h)\, e^{-\pi z}$ die Fouriersche Reihe der Abkühlung. Im ersten Fall kann man etwa $r_n = n + \frac{1}{2}$, im zweiten etwa $r_n = n$ setzen.

Für die Partialsummen der Reihe (4, 2) gilt

$$\sum_{|\lambda| < r_n} c_\lambda e^{\lambda x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{\chi(z)}{\pi(z)} \int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)} f(t)\, dt\, dz.$$

Mit Rücksicht auf $\dfrac{\chi(z)}{\pi(z)} = 1 - \dfrac{\psi(z)}{\pi(z)}$ können wir das rechtstehende Integral in die Summe folgender drei Integrale zerlegen:

$$(4,3) \qquad \sum_{|\lambda| < r_n} c_\lambda e^{\lambda x} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_n^+} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} F(z; x)\, dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n^+} F(z; x)\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n^+} \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} F(-z; x)\, dz,$$

wobei wir der Kürze halber die Bezeichnung

$$F(z; x) = \int_{x_0}^{x_1} e^{z(x-t)} f(t)\, dt$$

eingeführt haben. Der Beweis von (2, 1) beruht auf der Bemerkung, daß das hier auftretende mittlere Integral das Dirichletsche Integral von

$f(x)$ ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+} F(z;\, x)\, dz = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sin r_n(x-t)}{x-t} f(t)\, dt,$$

wovon wir uns durch die Vertauschung der Integrationsreihenfolge unmittelbar überzeugen können. Gleichzeitig läßt es sich zeigen, daß die beiden anderen Integrale in (4, 3) für $x_0 + \delta \leqq x \leqq x_1 - \delta$ $(\delta > 0)$ gleichmäßig gegen Null streben.

Diese letztere Behauptung ist mit Rücksicht auf die Bedingung (4, 1) eine unmittelbare Folgerung der nahe liegenden und leicht beweisbaren Tatsache: das Integral

$$F(z;\, x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_1} e^{-z(t-x_0)} f(t)\, dt$$

strebt in $\Re(z) \geqq 0$ mit $\frac{1}{z}$ gleichmäßig gegen Null.

Ähnlicherweise lassen sich (2, 2), (2, 4) und (2, 5) aus der obigen Integraldarstellung der Partialsummen bzw. aus der Gleichung

$$c + c_0 x + \sum_{|\lambda| < r_n} \frac{c_\lambda}{\lambda} e^{\lambda x} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n} \frac{\chi(z)}{z\pi(z)} F(z;\, x)\, dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+} \frac{\psi(z)}{z\pi(z)} F(z;\, x)\, dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+} \frac{1}{z} F(z;\, x)\, dz -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_n^+} \frac{\chi(-z)}{-z\pi(-z)} F(-z;\, x)\, dz$$

herleiten. In die Einzelheiten wollen wir jedoch nicht näher eingehen.

5. Zum Beweis des in 3. angedeuteten Satzes machen wir einige vorbereitende Bemerkungen. Wir wollen die Operation, welche die beliebig hingeschriebene Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu \cos\mu_\nu(x - \alpha_\nu)$$

in

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \frac{\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu) + \cos\mu_\nu(x + 2\pi - \alpha_\nu)}{2}$$

überführt, mit Φ bezeichnen. Es gilt

$$\Phi\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu) = \frac{1+\cos 2\pi\mu_\nu}{2}\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu) - \frac{\sin 2\pi\mu_\nu}{2}\sin\mu_\nu(x-\alpha_\nu),$$

woraus sich wegen $\mu_\nu + h\,\mathrm{tg}\,\pi\mu_\nu = 0$

$$\Phi \cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu) = h\,\frac{h\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)+\mu_\nu \sin\mu_\nu(x-\alpha_\nu)}{h^2+\mu_\nu^2} \tag{5, 1}$$

ergibt.

Aus (5, 1) geht klar hervor, daß die beiden Reihen, die wir aus einer Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ — für die etwa $|\varrho_\nu| \leqq 1$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gilt — durch gliedweise Integration bzw. durch Anwendung der Operation Φ erhalten, für sämtliche Werte von x äquikonvergent sind. Wesentlich aber ist für uns, daß die Reihe $\Phi \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ wiederum eine Reihe von der Gestalt $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ ist, während dies für die durch formale Integration erhaltene Reihe im allgemeinen (genauer im Fall $\varrho_0 \neq 0$) nicht zutrifft.

Wir zeigen nun, daß jedes Polynom $\tau(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \varrho_\nu \cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ der Gleichung

$$\Phi\tau(x) = he^{-hx}\int_{x_0}^{x} e^{ht}\tau(t)\,dt + e^{-h(x-x_0)}\,\Phi\tau(x_0) \tag{5, 2}$$

genügt[8]). Dazu sei nur bemerkt, daß das unbestimmte Integral

$$\int e^{ht}\cos\mu_\nu(t-\alpha_\nu)\,dt = e^{hx}\,\frac{h\cos\mu_\nu(t-\alpha_\nu)+\mu_\nu\sin\mu_\nu(t-\alpha_\nu)}{h^2+\mu_\nu^2} + C$$

ist, woraus sich wegen (5, 1) leicht (5, 2) ergibt.

Wir beweisen noch folgenden

Hilfssatz: Konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ in (x_0, x_1) gleichmäßig gegen Null, so verschwinden sämtliche Koeffizienten ϱ_ν dieser Reihe.

Zum Beweis beachte man, daß die Reihe $\Phi\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu \cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ wegen (5, 2) ebenfalls gleichmäßig gegen Null zustrebt. Wir können ferner voraussetzen, daß die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\varrho_\nu|$ konvergiert, denn die Operation Φ^2 (d. h. die zweimalige Anwendung von Φ) eine derartige Reihe liefert.

Setzen wir nun im Gegensatz zu unserem Hilfssatz voraus, daß die Reihe nicht identisch verschwindet. Der erste nicht verschwindende

---

[8]) Mit Hilfe von (5, 2) läßt sich (2, 4) auf den Beweis von (2, 3) und (2, 5) zurückführen.

Koeffizient sei $\varrho_N = 1$. Wenden wir auf die betrachtete Reihe die Operation Φ^k an. Dadurch geht ϱ_ν in $\dfrac{h^k}{(h^2+\mu_\nu^2)^{\frac{k}{2}}}\varrho_\nu$, α_ν etwa in $\alpha_{\nu k}$ über. Wir normieren die erhaltene Reihe derart, daß der Koeffizient von $\cos\mu_N(x-\alpha_{Nk})$ wiederum 1 sei:

$$(5,3)\qquad \frac{(h^2+\mu_N^2)^{\frac{k}{2}}}{h^k}\,\Phi^k\sum_{\nu=N}^{\infty}\varrho_\nu\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)=$$

$$=\cos\mu_N(x-\alpha_{Nk})+(h^2+\mu_N^2)^{\frac{k}{2}}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{\varrho_\nu}{(h^2+\mu_\nu^2)^{\frac{k}{2}}}\cos\mu_\nu(x-\alpha_{\nu k}).$$

Es gilt aber

$$\left|(h^2+\mu_N^2)^{\frac{k}{2}}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{\varrho_\nu}{(h^2+\mu_\nu^2)^{\frac{k}{2}}}\cos\mu_\nu(x-\alpha_{\nu k})\right|\leqq\lambda^k\sum_{\nu=N+1}^{\infty}|\varrho_\nu|,$$

$$\lambda=\frac{(h^2+\mu_N^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^2+\mu_{N+1}^2)^{\frac{1}{2}}}<1,$$

und somit kann die Reihe (5, 3) für genügend große Werte von k keineswegs Null als Summe besitzen. Aus diesem Widerspruch folgt unser Hilfssatz.

Nun ist zum Beweis unseres Satzes nur noch ein einziger Schritt übrig. Konvergieren die unbestimmten Integrale der Partialsummen $s_n(x)$ einer Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\varrho_\nu\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ in (x_0, x_1) gleichmäßig gegen das unbestimmte Integral einer L-integrierbaren Funktion $s(x)$:

$$\int_{x_0}^{x}s_n(t)\,dt\to\int_{x_0}^{x}s(t)\,dt,\qquad x_0\leqq x\leqq x_1,$$

und ist dabei $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi s_n(x_0)=0$, so ist wegen (5, 2) auch $\Phi\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\varrho_\nu\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)$ gleichmäßig konvergent mit der Summe

$$\Phi\sum_{\nu=0}^{\infty}\varrho_\nu\cos\mu_\nu(x-\alpha_\nu)=he^{-hx}\int_{x_0}^{x}e^{ht}s(t)\,dt,\qquad x_0\leqq x\leqq x_1.$$

Diese Reihe ist aber zufolge unseres Hilfssatzes mit derjenigen Reihe identisch, die wir aus der Fourierschen Reihe der Abkühlung von $s(x)$ mittels der Operation Φ erhalten. Dies ist aber nur möglich, falls die betrachtete Reihe die Fouriersche Reihe der Abkühlung von $s(x)$ ist.

6. Zum Schluß machen wir noch einige Bemerkungen. Es sei $\varphi(x)$ eine reelle Funktion, die in (x_0, x_1) eine Ableitung von beschränkter Schwankung besitzt und für die $\varphi(x_0)+\varphi(x_1)=0$ gilt. Es läßt sich

leicht zeigen, daß für die Koeffizienten a_ν, b_ν der Fourierschen Reihe der Abkühlung von $\varphi(x)$ $a_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$, $b_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$ gilt. Setzt man $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$, so leuchtet ein, daß eine beliebige Funktion $f(x)$, die in (x_0, x_1) eine Ableitung von beschränkter Schwankung besitzt, sich in (x_0, x_1) in eine absolut konvergente Reihe der Gestalt $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (A_\nu \cos \mu_\nu x + B_\nu \sin \mu_\nu x)$ entwickeln läßt.

Die Summe dieser Reihe ist eine fastperiodische Funktion. Da aber aus (5, 2) durch Multiplikation mit e^{hx} und Differentiation $h\tau(x+2\pi) + \tau'(x+2\pi) = h\tau(x) - \tau'(x)$ folgt, so gelangen wir an folgendes Ergebnis: Erweitern wir die in einem beliebigen Intervall (x_0, x_1) erklärte Funktion $f(x)$, die eine Ableitung von beschränkter Schwankung besitzt, von (x_0, x_1) aus durch folgende Vorschrift: 1. $f(x)$ sei für alle reelle Werte von x stetig, 2. es bestehe zwischen $f(x+a)$ und $f(x)$ die Differentialgleichung

$$hf(x+a) + f'(x+a) = hf(x) - f'(x) \quad \text{mit} \quad a = x_1 - x_0,$$

so ist die erhaltene Funktion fastperiodisch.

Schließlich sei bemerkt, daß wir gleichzeitig mit der hier betrachteten Reihe, die als Reihe der Kugelabkühlung bezeichnet werden kann, auch eine andere Reihe, die Fouriersche Reihe der Würfelabkühlung, in Betracht ziehen können. In dieser nimmt die Rolle der Gleichung $z + h \operatorname{tg} \pi z = 0$ die Gleichung $z - h \operatorname{cotg} \pi z = 0$ über. Die Reihe der Würfelabkühlung steht in gewisser Hinsicht in engerer Verbindung mit der gewöhnlichen Fourierschen Reihe als die Reihe der Kugelabkühlung. Dies ist zu erwarten, wenn wir bedenken, daß für die positiven Wurzeln $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \ldots$ von $z - h \operatorname{cotg} \pi z = 0$ $\lim_{\nu \to \infty} (\bar{\mu}_\nu - \nu) = 0$ ausfällt, während für die Folge $\mu_0, \mu_1, \ldots$ $\lim_{\nu \to \infty} (\mu_\nu - \nu) = \frac{1}{2}$ gilt.

(Eingegangen am 10. März 1943.)