Bemerkung zu einer Arbeit von R. Fueter über die Klassenkörpertheorie.

Von LADISLAUS RÉDEI in Szeged.

Bezeichne k den Körper der rationalen Zahlen, D eine ungerade quadratfreie natürliche Zahl.

1. In einer Arbeit von FUETER[1]) kommt unter anderen wichtigen Anwendungen auch folgendes vor: Ist $D \equiv 1 \pmod 8$, so muß es in $k(\sqrt{-D})$ eine gerade Anzahl Klassen in jedem Geschlechte geben, damit die Grundeinheit in $k(\sqrt{D})$ die Norm -1 hat. Ich habe schon früher kurz bemerkt[2]), daß dieser Satz inhaltslos ist, da die Geschlechter des Körpers $k(\sqrt{-D})$ im genannten Fall $D \equiv 1 \pmod 8$ stets eine gerade Anzahl Klassen enthalten. Erst neulich bin ich in einer Arbeit von HECKE[3]) auf folgende Stelle aufmerksam geworden: „Bisher sind allerdings nur sehr selten Beziehungen zwischen den Körpern $k(\sqrt{D})$ und $k(i, \sqrt{D})$ gefunden worden. Ich nenne den Dirichletschen Satz, daß die Klassenzahl des Körpers $k(i, \sqrt{D})$ (abgesehen von dem Faktor 2) gleich dem Produkt der Klassenzahlen der beiden Körper $k(\sqrt{D})$ und $k(\sqrt{-D})$ ist, sowie einen Satz von FUETER über eine notwendige Bedingung, daß die Norm der Grundeinheit in $k(\sqrt{D})$ gleich -1 sei." Hieraus ist klar, daß HECKE der Inhaltslosigkeit obigen Satzes nicht gewahr wurde, er hat sogar dessen scheinbare Bedeutung stark hervorgehoben. Andererseits ist meine Bemerkung in der Arbeit[2]) in einer

---

[1]) R. FUETER, Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluß auf die Zahlentheorie, *Jahresb. D. M. V.*, **20** (1911), S. 46.

[2]) L. RÉDEI u. H. REICHARDT, Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers, *Journ. f. Math.*, **170** (1933), S. 74.

[3]) E. HECKE, Über die Konstruktion der Klassenkörper reeller quadratischer Körper mit Hilfe von automorphen Funktionen, *Gött. Nachr.* (1910), S. 620. — Hier in Anm.[1]) wird Band- und Seitenzahl obiger Stelle in der Arbeit von Fueter falsch angegeben.

Fußnote versteckt, und deshalb dachte ich richtig gehandelt zu haben, daß ich hiermit auf diese Frage nochmals zurückgekommen bin.

2. Weiter möchte ich hier kurz bemerken, daß man zwischen den von FUETER betrachteten Körpern tatsächlich Zusammenhänge feststellen kann. Und zwar erhält man aus der Arbeit[2]) unmittelbar folgendes. Sind alle geraden Invarianten der Klassengruppe von $k(\sqrt{-D})$ durch 4 teilbar, so gilt ähnliches auch für $k(\sqrt{D})$.[4]) Wenn dies umgekehrt der Fall ist, so sind für $k(\sqrt{-D})$ entweder alle geraden Invarianten durch 4 teilbar oder alle mit einer einzigen Ausnahme (und zwar je nachdem alle oder nicht alle Primfaktoren von D der Gestalt $8l \pm 1$ sind). Aus einer Arbeit[5]) von mir folgt ähnlich leicht dasselbe (ohne den Zusatz in den Klammern) samt der Bemerkung[4]) auch für 8 statt 4. Diese Sätze über die durch 4 teilbaren Invarianten lassen sich auf Grund einer Arbeit[6]) von mir bedeutend erweitern, worauf ich an einer anderen Stelle eingehen will. Auch über die durch 8 teilbaren Invarianten läßt sich mit Hilfe der Arbeit[5]) mehr aussagen. Nach einer neueren Arbeit[7]) von mir kann man hoffen, daß sich weitere Zusammenhänge zwischen den 2-Klassengruppen von $k(\sqrt{D})$ und $k(\sqrt{-D})$ herausstellen mit Einbeziehung aller Invarianten 2^n, oder sogar zwischen den p-Klassengruppen (p Primzahl) von anderen Paaren geeigneter algebraischer Zahlkörper. Für $p \neq 2$ gibt es in dieser Richtung meines Wissens nur den folgenden Satz von SCHOLZ[8]). Unter den Klassengruppen von zwei quadratischen Zahlkörpern $k(\sqrt{d})$, $k(\sqrt{-3d})$ hat die des imaginären Körpers ebensoviel oder um 1 mehr durch 3 teilbare Invarianten als die des reellen.

(Eingegangen am 31. März 1944.)

---

[4]) Das gilt allgemeiner für das Körperpaar $k(\sqrt{d})$, $k(\sqrt{d_1})$, wenn $d = d_1 d_2$ und d, d_1, d_2 Diskriminantenzahlen sind.

[5]) L. RÉDEI, Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper, I, *Journ. f. Math.*, **180** (1938), S. 1—43.

[6]) L. RÉDEI, Über die D-Zerfällungen zweiter Art, *Math. u. Naturwiss. Anzeiger d. ung. Akad.*, **56** (1937), S. 89—125. (Ungarisch.)

[7]) L. RÉDEI, Über die Klassengruppen und Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, *Journ. f. Math.*, **186** (1944), S. 80—90.

[8]) A. SCHOLZ, Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander, *Journ. f. Math.*, **166** (1932), S. 201—203.