Linienelementräume deren Zusammenhang durch eine beliebige Transformationsgruppe bestimmt ist.

Von O. VARGA in Debrecen.

Die durch die Übertragungslehre geschaffenen allgemeinen Räume machten es notwendig FELIX KLEINS berühmtes „Erlanger Programm"[1]) zu erweitern[2]). Diese Erweiterungen ermöglichten es, den Gruppenbegriff als geometrisches Klassifikationsprinzip beizubehalten.

Seit der Dissertation von P. FINSLER[3]) wurden die differentialgeometrischen Räume dadurch erneut verallgemeinert, daß an Stelle des Punktes das Linienelement als Raumelement eingeführt wurde. Die Methoden der Übertragungslehre wurden auch auf diese Linienelementmannigfaltigkeiten angewandt. Neben den euklidischzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten — denen sich die Finslerschen Räume unterordnen[4]) — wurden bald auch affin-[5]) und projektivzusammenhängende Räume[6]) von Linienelementen untersucht. In der vorliegenden Note möchte ich zeigen, daß sich E. CARTANS Verallgemeinerung des Erlanger Programms[7]) auch auf Mannigfaltigkeiten von Linienelementen ausdehnen läßt.

1. Kontinuierliche Transformationsgruppe und die Methode des beweglichen Bezugssystems.

Zu Grunde gelegt sei eine r-gliedrige Transformationsgruppe. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß es sich um eine analytische Transformationsgruppe handelt. In diesem Falle kann die Transforma-

---

[1]) F. KLEIN (1). S. Schriftenverzeichnis am Ende vorliegender Arbeit.

[2]) W. WIRTINGER (1), A. SCHOUTEN (1).

[3]) P. FINSLER (1).

[4]) E. CARTAN (3), S. 1—12.

[5]) O. VARGA (1).

[6]) Projektivzusammenhängende zweidimensionale Räume von Linienelementen bei E. CARTAN (2).

[7]) E. CARTAN (1).

tionsgruppe durch infinitesimale Transformationen erzeugt werden. Die infinitesimalen Transformationen mögen durch die r linear unabhängigen Lieschen Symbole

$$(1) \qquad X_1(F),\ X_2(F), \ldots, X_r(F)$$

bestimmt sein. Der allgemeine Operator $X_\sigma(F)$ sei dabei durch

$$(2) \qquad X_\sigma(F) = \xi^i_\sigma \frac{\partial F}{\partial x^i}$$

festgelegt. Eine bestimmte infinitesimale Transformation erhalten wir dann in

$$(3) \qquad \delta x^i = \varepsilon_1 X_1(x^i) + \varepsilon_2 X_2(x^i) + \ldots + \varepsilon_r X_r(x^i).$$

In (3) sind die ε_i beliebig kleine konstante Größen. Damit die infinitesimalen Transformationen eine Gruppe erzeugen, ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß ihre Lieschen Symbole den Lieschen Strukturgleichungen genügen. Dies ist genau der Inhalt der Umkehrung des zweiten Lieschen Fundamentalsatzes[8]. Zu den Strukturgleichungen gelangen wir folgendermaßen: bilden wir aus zwei beliebigen Symbolen $X_\varrho(F)$ und $X_\sigma(F)$ durch die Poissonsche Klammerbildung den neuen linearen Differentialoperator

$$(4) \qquad (X_\varrho X_\sigma) F \equiv X_\varrho(X_\sigma(F)) - X_\sigma(X_\varrho(F)),$$

so muß sich derselbe linear aus den Lieschen Symbolen kombinieren lassen, mit Koeffizienten, die konstant sind. Es gilt also:

$$(5) \qquad (X_\varrho X_\sigma) F = c_{\varrho\sigma\varkappa} X_\varkappa(F).$$

Die Größen $c_{\varrho\sigma\varkappa}$ werden als Strukturkonstanten der Gruppe bezeichnet. Durch (3) war eine bestimmte feste infinitesimale Transformation gegeben. Um die gesamte Transformationsschar zu erhalten, führen wir r Pfaffsche Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ der r Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ein. Sie sind dadurch bestimmt, daß ihre äußere Ableitung den Mauer—Cartanschen Strukturgleichungen

$$(6) \qquad \omega'_\varkappa = -\frac{1}{2} c_{\varrho\sigma\varkappa} [\omega_\varrho \omega_\sigma]$$

genügen[9]. Auf der rechten Seite von (6) soll die eckige Klammer andeuten, daß es sich um das alternierende Produkt der ω_ϱ und ω_σ handelt[10]. Durch die Pfaffschen Gleichungen

$$(7) \qquad \theta^i \equiv dx^i - \omega_\sigma(a, da)\, X_\sigma(x^i) = 0$$

erhalten wir die gesamte infinitesimale Transformationsschar. Die durch

---

[8]) G. Kowalewski (1), insbes. S. 163–166.

[9]) G. Kowalewski (1), S. 135–137 und E. Cartan (4), S. 183–191.

[10]) Zu dem Kalkül der äußeren Differentialformen vgl. E. Cartan (5).

(7) bestimmten Pfaffschen Formen θ^i der $n+r$ Veränderlichen x^i und a_ϱ sind vollständig integrabel. Dies folgt daraus, daß die nach dem *Frobeniusschen Theorem* dazu notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen

$$\theta^{i\prime} = 0$$

auf Grund von

$$\theta^i = 0$$

wegen (5) und (6) erfüllt sind[11]). Die Integralmannigfaltigkeiten sind durch

$$x^{i\prime} = \Phi^i(x^1, \ldots, x^n, a_1, \ldots, a_r)$$

bestimmt. Die $x^{i\prime}$ spielen die Rolle von Integrationskonstanten und sind in der Umgebung eines festen $\overset{0}{x}{}^i$ Wertsystems beliebig wählbar. Löst man diese Gleichungen nach den x^i auf — was unter den getroffenen Voraussetzungen stets möglich ist — so erhält man in

$$x^i = f^i(x^{1\prime}, \ldots, x^{n\prime}, a_1, \ldots, a_r) \tag{8}$$

oder kürzer

$$x^i = S_a x^{i\prime} \tag{8'}$$

die Transformationsgruppe. Wegen dieses Tatbestandes wurde oben bemerkt, daß (5), (6) und (7) die gesamte infinitesimale Transformationsschar bestimmt.

Wir geben noch die geometrische Deutung der Gleichungen (7). Es handelt sich dabei um die von E. CARTAN herrührende Verallgemeinerung der *Darbouxschen Methode* des beweglichen Bezugssystems[12]). Bei einer Transformationsgruppe G läßt sich stets ein aus einer endlichen Anzahl von Punkten bestehendes Gebilde angeben, das nur bei der identischen Transformation invariant bleibt. Wir bezeichnen dieses Gebilde als Bezugssystem R_0. Unter Einwirkung der Transformationen S_a von G erhalten wir eine Schar R_a von Bezugssystemen. Wir bezeichnen R_a als das bewegliche Bezugssystem. Die Größen x^i bezeichnen wir als die auf R_0 bezogenen Koordinaten. In Bezug auf R_a definieren wir nun Relativkoordinaten ξ^i folgendermassen: Durch S_a^{-1} geht R_a in R_0 über, der Punkt mit den Koordinaten x^i geht dann in einen Punkt mit Koordinaten

$$\xi^i = S_a^{-1}\, x^i$$

über. Durch ξ^i definieren wir die Relativkoordinaten. Sind R_a und R_{a+da} zwei benachbarte Bezugssysteme, so wird die Transformation,

---

11) E. CARTAN (4), S. 193.

12) E. CARTAN (6).

die R_a nach R_{a+da} bringt, den Punkt x^i in $x^i + dx^i$ überführen, dx^i genügt dabei den Gleichungen (7). Die Relationen (7) besagen also, daß ein Punkt mit seinem Bezugssystem im Sinne der Gruppe G fest verbunden ist[13]).

2. **Aufbau der Linienelementgeometrie.**

Wir gehen von einem n-dimensionalen Punktraum aus, den wir auf Koordinaten $u^1, u^2, \ldots, u^n$ beziehen. Denselben erweitern wir dadurch zu einer Linienelementmannigfaltigkeit, daß wir zu jedem Punkt sämtliche hindurchgehende Linienelemente hinzunehmen. Die Richtung eines Linienelementes wird durch das Verhältnis der n nicht sämtlich verschwindenden Parameter $\dot{u}^1, \dot{u}^2, \ldots, \dot{u}^n$ angegeben. Ein Linienelement ist also durch $(u, \dot{u})$ bestimmt und die Mannigfaltigkeit ist $(2n-1)$-dimensional.

Einem beliebigen Linienelement $(\underset{0}{u}, \underset{0}{\dot{u}})$ ordnen wir einen Tangentialraum zu. Diese Zuordnung kann so getroffen werden, wie dies im Falle eines Punktraumes von H. Weyl durchgeführt wurde[14]). Demnach ist der zum Linienelement $(\underset{0}{u}, \underset{0}{\dot{u}})$ gehörige Vektorkörper ein n-dimensionaler, linearer, zentrierter Raum. Die unmittelbare „kegelförmige" Umgebung des Mittelpunktes wird mit der unmittelbaren „kegelförmigen" Umgebung von $(\underset{0}{u}, \underset{0}{\dot{u}})$ durch eine affin-lineare Beziehung zur Koinzidenz gebracht. Letzteres besagt genauer: Wir wählen n beliebige linear unabhängige Vektoren $\underset{(k)}{e^i}$ des Körpers, dieselben machen wir zu Achsen eines Koordinatensystems x^i. Der Richtung $\underset{0}{\dot{u}^i}$ entspreche

$$\underset{0}{\dot{x}^i} = \underset{(k)}{e^i} \underset{0}{\dot{u}^k}. \tag{9}$$

Dabei sei $\underset{0}{\dot{u}^i}$ so normiert, daß

$$\underset{0}{\dot{x}^i} \underset{0}{\dot{x}^i} = \varepsilon^2 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Die kegelförmige Umgebung, die zu der vom Ursprung der x^i ausgehenden Richtung $\underset{0}{\dot{x}^i}$ gehört, ist durch

$$\begin{cases} x^k \underset{0}{\dot{x}^k} < \varepsilon \\ \dfrac{x^k \underset{0}{x^k}}{\sqrt{x^k x^k}} < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \end{cases} \tag{10}$$

festgelegt. Die affin-lineare Beziehung, die x^i und u^i zur Deckung

[13]) Vgl. zu diesen Paragraphen E. Cartan (4) und G. Kowalewski (1).

[14]) H. Weyl (1), S. 92—93.

bringt, ist durch

$$x^i = e^i_{(k)} u^k \tag{11}$$

bestimmt, wobei die x^i aus der Umgebung (10) zu nehmen sind.

In der Linienelementmannigfaltigkeit soll nun eine, durch die Transformationsgruppe G bestimmte Geometrie aufgebaut werden. Dies geschehe durch zwei Forderungen.

I. *In jedem, zu einem Linienelement gehörigen Tangentialraum soll die durch die Gruppe G bestimmte Kleinsche Geometrie gelten.*

Durch diese Forderung wird die zu einer kegelförmigen Umgebung von $(u, \dot{u})$ gehörige loka'e Geometrie festgelegt. Sie besteht bekanntlich in den Differentialinvarianten von (6) und (7).

Den Zusammenhang der Tangentialräume legt die folgende zweite Forderung fest:

II. *Tangentialräume, die zu benachbarten Linienelementen $(u, \dot{u})$ und $(u+du, \dot{u}+d\dot{u})$ gehören, hängen durch eine infinitesimale Transformation* (3) *zusammen.*

Die zweite Forderung bedeutet geometrisch folgendes: ist x^i ein Punkt im Tangentialraum von $(u, \dot{u})$, dann ordnen wir demselben im Tangentialraum von $(u+du, \dot{u}+d\dot{u})$ denjenigen Punkt x^i+dx^i zu, der die gleichen Relativkoordinaten besitzt. Dies besagt, daß zwei passende Bezugssysteme von $(u, \dot{u})$ bzw. $(u+du, \dot{u}+d\dot{u})$ so ineinander übergehen, als ob sie in ein und denselben Kleinschen Raum eingebettet wären.

Die Koeffizienten ε_i in (3) hängen in unserem Falle von der Wahl der u^i, $\dot{u}^i$, u^i+du^i, $\dot{u}^i+d\dot{u}^i$ ab, d. h. sie sind Funktionen dieser Größen. Da für

$$du^i = 0, \quad d\dot{u}^i = 0$$

die

$$\varepsilon_\varrho = 0$$

sind, und in infinitesimalen Transformationen Glieder von höherer als erster Ordnung in du^i und $d\dot{u}^i$ vernachlässigt werden, sind diese Funktionen Summen zweier Pfaffscher Formen in du^i und $d\dot{u}^i$:

$$\varepsilon_\varrho = -(\pi_\varrho(u, \dot{u}, d\dot{u}) + \omega_\varrho(u, \dot{u}, du)). \tag{12}$$

Man erhält also:

$$\bar{\omega}^i \equiv dx^i + \pi_\varrho(u, \dot{u}, d\dot{u})\, X_\varrho(x^i) + \omega_\varrho(u, \dot{u}, du)\, X_\varrho(x^i) = 0. \tag{13}$$

Die Gleichungen (13) bestimmen den „Zusammenhang“ der zur Gruppe G gehörigen Linienelementmannigfaltigkeit.

3. Krümmungstheorie und Isomorphismus.

Die äußere Ableitung $\tilde{\omega}^{i\prime}$ der Formen (13) ist im allgemeinen von Null verschieden. Verschwindet dieselbe, so heißt dies, daß eine Linienelementmannigfaltigkeit einer Kleinschen Geometrie vorliegt. In der Tat, bei konstanten $\dot{u}^i$ ist das Gleichungssystem

$$dx^i + \omega_\varrho(u, \dot{u}, du)\, X_\varrho(x^i) = 0,$$

wegen den getroffenen Voraussetzungen vollständig integrabel.

Im allgemeinen Fall ist die äußere Ableitung $\tilde{\omega}^{i\prime}$ von $\tilde{\omega}^i$ nicht identisch Null, man erhält:

$$\tilde{\omega}^{i\prime} = X_\varkappa(x^i)\, \Omega_\varkappa, \tag{14'}$$

wobei

$$\Omega_\varkappa = \pi'_\varkappa + \omega'_\varkappa - \frac{1}{2} c_{\varrho\sigma\varkappa}[\pi_\varrho + \omega_\varrho, \pi_\sigma + \omega_\sigma]. \tag{14}$$

Wenn wir diese alternierende Form zweiten Grades weiter entwickeln, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Omega_\varkappa = \sum_{(i,k)} A_{\varkappa ik}[d\dot{u}^i d\dot{u}^k] + B_{\varkappa ik}[du^i d\dot{u}^k] + \\ + \sum_{(i,k)} C_{\varkappa ik}[du^i du^k]. \end{aligned} \tag{15}$$

Auf der rechten Seite von (15) soll im ersten und dritten Posten über alle Kombinationen der Zeigerpaare i, k summiert werden. Setzen wir

$$\begin{aligned} \pi_\varrho &= p_{\varrho k}(u, \dot{u})\, d\dot{u}^k, \\ \omega_\varrho &= m_{\varrho k}(u, \dot{u})\, du^k, \end{aligned} \tag{16}$$

so erhält man

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\varkappa ik} &= \frac{\partial p_{\varkappa k}}{\partial \dot{u}^i} - \frac{\partial p_{\varkappa i}}{\partial \dot{u}^k} - \frac{1}{2} c_{\varrho\sigma\varkappa}(p_{\varrho i} p_{\sigma k} - p_{\varrho k} p_{\sigma i}), \\ B_{\varkappa ik} &= \frac{\partial p_{\varkappa k}}{\partial u^i} - \frac{\partial m_{\varkappa i}}{\partial \dot{u}^k} - c_{\varrho\sigma\varkappa} p_{\varrho k} m_{\sigma i}, \\ C_{\varkappa ik} &= \frac{\partial m_{\varkappa k}}{\partial u^i} - \frac{\partial m_{\varkappa i}}{\partial u^k} - \frac{1}{2} c_{\varrho\sigma k}(m_{\varrho i} m_{\sigma k} - m_{\varrho k} m_{\sigma i}). \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Wir geben die geometrische Deutung der Größen $\Omega_\varkappa$ an. Gegeben sei eine beliebige geschlossene und rektifizierbare Kurve K und längs derselben eine stetig differenzierbare Folge von Linienelementen durch

$$\left\{ \begin{aligned} u^i &= u^i(t), \\ \dot{u}^i &= \dot{u}^i(t). \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Im Falle eines Kleinschen Raumes kommen wir, wenn wir das bewegliche Bezugssystem mit den zu ihm relativ festen x^i um K — auf Grund von (13) — herumführen, zum selben Punkt x^i zurück, da ja jeder

Tangentialraum mit dem gegebenen Raum zusammenfällt, d. h. es ist

$$\int_K dx^i = 0, \tag{19}$$

zufolge (13). Im allgemeinen Falle fällt der Punkt x^i in Anfangs- und Endlage nicht zusammen, die Tangentialräume sind verschieden. Betrachten wir eine beliebige stetig differenzierbare Fläche F, die von K berandet ist, so gilt bekanntlich

$$\int_K \tilde{\omega}^i = \iint_p \tilde{\omega}^{i\prime}. \tag{20}$$

Hieraus kommt wegen (13) und (14′)

$$\int_K dx^i = -\iint_p \Omega_\varkappa X_\varkappa(x^i). \tag{21}$$

Die $\Omega_\varkappa$, oder aber die sie bestimmende Größen (17), geben die Abweichung vom Kleinschen Raum an und können als *Krümmungsgrößen* bezeichnet werden.

Die Krümmungsgrößen (17) sind nicht völlig unabhängig. Durch Bildung der äußeren Ableitung von (14) erhält man

$$\Omega'_\varkappa - c_{\varrho\sigma\varkappa}[\Omega_\varrho\, \omega_\sigma] = 0. \tag{22}$$

Entwickelt man diese äußere Form dritten Grades, so erhält man diejenigen Relationen zwischen den Krümmungsgrößen, die als Verallgemeinerungen der Bianchischen Identitäten anzusprechen sind.

Zwei zur selben Gruppe gehörigen Mannigfaltigkeiten $(u, \dot{u})$ und $(\bar{u}, \dot{\bar{u}})$ sind isomorph, wenn es eine erweiterte Punkttransformation

$$\begin{aligned} \bar{u}^i &= \bar{u}^i(u^1, \ldots, u^n) \\ \dot{\bar{u}}^i &= \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k}\, \dot{u}^k \end{aligned} \tag{23}$$

gibt, die die eine Mannigfaltigkeit in die andere überführt und dabei den Zusammenhang der Tangentialräume erhält. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die entsprechenden Pfaffschen Formen $\tilde{\omega}_\varrho$ und $\bar{\tilde{\omega}}_\varrho$ nach Ausführung der Substitution (23) der Identität

$$\tilde{\omega}_\sigma \equiv \bar{\tilde{\omega}}_\sigma \tag{24}$$

genügen. Aus (24) folgt durch äußere Ableitung

$$\tilde{\omega}'_\sigma \equiv \bar{\tilde{\omega}}'_\sigma. \tag{25}$$

Für beide Mannigfaltigkeiten müssen die Strukturkonstanten übereinstimmen, da es sich um dieselbe Gruppe handelt. Nach der Umkehrung des Lieschen dritten Fundamentalsatzes definieren ja die $c_{\varkappa\sigma\lambda}$ — die noch gewissen Relationen genügen müssen — in abstrakto eine Gruppe[15].

[15]) G. Kowalewski (1), S. 169—187.

Daraus folgt nun wegen der Definition (14) der Ω_σ, daß

$$\Omega_\sigma \equiv \bar{\Omega}_\sigma \tag{26}$$

sein muß. Damit ist gleichbedeutend, daß für beide Mannigfaltigkeiten die entsprechenden Krümmungsgrößen (17) identisch übereinstimmen. Hieraus folgt, daß auch sämtliche Ableitungen dieser Größen identisch gleich sind. Bestehen umgekehrt die Gleichungen (nicht Identitäten!) (24), (25), (26) und stimmen die Ableitungen entsprechender Krümmungsgrößen überein, so kann man Transformationen der Gestalt (23) finden, die diese identisch befriedigen. Die Mannigfaltigkeiten sind dann isomorph. Dazu ist nur zu bemerken, daß für die Differentialgleichungen (24) die übrigen Bedingungen (25), (26) u. s. f. genau mit ihren Integrabilitätsbedingungen übereinstimmen.

Schriftenverzeichnis.

E. Cartan, (1) Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, **40** (1923).

(2) Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés, *Matematica*, **3**, **4** (1930).

(3) Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, **79** (Paris, 1934).

(4) La théorie des groupes finis et continus et la géometrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile, fasc. XVIII des *Cahiers scientifiques* (Paris, 1937).

(5) Leçons sur les invariants intégraux (Paris, 1922).

(6) La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile, *Bull. Sc. Math. de France*, **34** (1910).

P. Finsler, (1) Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen (Dissertation Göttingen, 1918).

F. Klein, (1) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, *Math. Ann.*, **43** (1893) und Kleins *Ges. Abh.* (Berlin, 1921), Bd. **1**, S. 460.

G. Kowalewski, (1) Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen (Leipzig, 1931).

A. Schouten, (1) Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **50**.

O. Varga, (1) Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen, *Lotos*, **84** (Prag, 1936).

H. Weyl, (1) Raum — Zeit — Materie, 5. Aufl. (Berlin, 1923).

W. Wirtinger, (1) On a general infinitesimal geometry in reference to the theory of relativity, *Trans. of the Cambridge Philosophical Society*, **22** (1921).

(Eingegangen am 15. Mai 1944.)