Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen.

Von BÉLA V. SZ. NAGY (Szeged).

Einleitung.

Eine nach 2π periodische stetige Funktion $f(x)$ mit der Fourierschen Reihe

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

kann bekanntlich beliebig genau durch die Fejérschen Mittel

$$\sigma_{1n}(f;\,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

ihrer Fourierschen Reihe approximiert werden.

Hat $f(x)$ sogar eine beschränkte Derivierte[1]), so ist nach einem Satze von S. BERNSTEIN[2]) diese Approximation mindestens von der Ordnung $\frac{\log n}{n}$; genauer gesagt, es gilt

$$|f(x)-\sigma_{1n}(f;\,x)|\leqq\max|f'|\,.\left(\frac{\log 2n}{n}+\frac{1}{\pi n}\right).$$

Die Konstante rechts kann noch verkleinert werden. Für die kleinstmögliche Konstante $\varrho_{1n}^{(1)}$ hat kürzlich S. M. NIKOLSKY die folgende asympto-

---

[1]) Wenn wir im folgenden über die Beschränktheit der Derivierten r-ter Ordnung einer Funktion $f(x)$ sprechen, nehmen wir immer an, daß $f^{(r)}(x)$ fast überall existiert und beschränkt ist, ferner, daß $f(x)$ die r-fach iterierte Integralfunktion von $f^{(r)}(x)$ ist (also, daß $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r-1)}(x)$ absolut stetig sind).

[2]) S. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, *Mém. Acad. Belg.*, (2) 4 (1912), S. 1—104, insbesondere S. 88—89.

tische Formel gefunden[3]):

$$\varrho_{1n}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\log n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wir werden für jedes n den genauen Wert von $\varrho_{1n}^{(1)}$, und die Funktionen, für welche diese maximale Abweichung statthat, bestimmen. Dabei dürfen wir uns offenbar auf den Fall $|f'|\leqq 1$ beschränken.

Satz I. *Unter allen nach 2π periodischen stetigen Funktionen $f(x)$ mit $|f'(x)|\leqq 1$, werden diejenigen durch die Fejérschen Mittel $\sigma_{1n}(f;x)$ (für jedes feste n) am ungenauesten approximiert, für welche $f'(x)$ auf Halbperioden abwechselnd gleich $+1$ und -1 ist. Die auftretende größte Abweichung ist*

$$\varrho_{1n}^{(1)}=\frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{2\nu+1}+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2}\qquad\left(N=\left[\frac{n-1}{2}\right]\right),$$

also

$$\varrho_{1n}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+1}+\frac{R_n}{n}$$

mit

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{n}{n+2}<R_n<\frac{6}{\pi}.$$

Für dieselben Funktionen wird die Approximation am ungünstigsten auch dann, wenn man statt der Fejérschen Mittel mit den Cesàroschen Mitteln $\sigma_{\delta n}(f;x)$ höherer ganzer Ordnung δ approximiert. Bezeichnet $\varrho_{\delta n}^{(1)}$ die maximale Abweichung, so hat man

$$\varrho_{1n}^{(1)}<\varrho_{2n}^{(1)}<\varrho_{3n}^{(1)}<\dots \text{ und } \varrho_{\delta+1,n}^{(1)}-\varrho_{\delta n}^{(1)}<\frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+\delta+1}+\frac{4}{\pi(n+\delta+1)};$$

für die betrachtete Funktionenmenge ist also die Approximation durch Cesàrosche Mittel höherer Ordnung im allgemeinen ungünstiger.

Es sei daran erinnert, daß die Cesàroschen Mittel $\sigma_{\delta n}(f;x)$ von der ganzen Ordnung δ folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\left(1-\frac{k}{n+2}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n+\delta}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Für Funktionen mit einer beschränkten Derivierten höherer Ordnung erhält man eine Approximation mindestens von der Ordnung $\frac{1}{n}$. Wir beweisen den folgenden

---

[3]) S. M. Nikolsky, Sur l'allure asymptotique du reste dans l'approximation au moyen des sommes de Fejér des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, *Bull. Acad. Sci. URSS*, 4 (1940), S. 501—508 (russisch, mit französischem Auszug).

Satz II. *Unter allen nach 2π periodischen stetigen Funktionen $f(x)$ mit $|f^{(r)}(x)| \leqq 1$ (r ist eine feste ganze Zahl größer als 1), werden diejenigen durch die Mittel $\sigma_{\delta n}(f; x)$ (für jedes feste ganze δ und n) am ungenauesten approximiert, für welche $f^{(r)}(x)$ auf Halbperioden abwechselnd $+1$ und -1 ist. Bezeichnet $\varrho_{\delta n}^{(r)}$ die größte Abweichung, so gilt*

$$\varrho_{1n}^{(r)} = \frac{K^{(r)}}{n+1} + \frac{R_n^{(r)}}{(n+1)^{r+1}}, \quad \textit{bzw.} \quad \varrho_{1n}^{(r)} = \frac{K^{(r)}}{n+1} - \frac{S_n^{(r)}}{(n+1)^r},$$

je nachdem r gerade bzw. ungerade ist; hier ist

$$K^{(r)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^r} \text{ [4]},$$

$$|R_n^{(r)}| < \frac{4}{\pi} \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}, \quad 0 < S_n^{(r)} < \frac{2}{\pi(r-1)}.$$

Weiter hat man

$$\varrho_{1n}^{(r)} < \varrho_{2n}^{(r)} < \varrho_{3n}^{(r)} < \ldots; \quad \varrho_{\delta+1,n}^{(r)} - \varrho_{\delta n}^{(r)} < \frac{K^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Es sei bemerkt, daß die weniger scharfe asymptotische Abschätzung

$$\varrho_{1n}^{(r)} = \frac{K^{(r)}}{n+1} + O\left(\frac{\log n}{n^r}\right)$$

kürzlich durch S. M. Nikolsky gefunden wurde[5]; er hat aber weder die exakten Werte, noch die extremalen Funktionen bestimmt.

G. Alexits hat sich kürzlich die Frage gestellt, wie kann eine Funktion $f(x)$ durch die Mittel $\sigma_{\delta n}(f; x)$ approximiert werden, wenn die *konjugierte* Fouriersche Reihe von $f(x)$, d. h. die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx),$$

eine Funktion $\bar{f}(x)$ mit beschränkter Derivierten darstellt[6]? Bezeichnet $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)}$ die größte Abweichung von $f(x)$ und $\sigma_{\delta n}(f; x)$, wenn $f(x)$ die durch

---

[4] Man sieht leicht, daß $K^{(2)} < K^{(4)} < K^{(6)} < \ldots < \frac{4}{\pi} < \ldots < K^{(7)} < K^{(5)} < K^{(3)}$ und $\lim\limits_{r \to \infty} K^{(r)} = \frac{4}{\pi}$.

[5] S. M. Nikolsky, Estimations of the remainder of Fejér's sum for periodical functions possessing a bounded derivative, *Comptes Rendus Acad. Sci. URSS*, **31** (1941), S. 210–214.

[6] Bekanntlich hängt $\bar{f}(x)$ folgendermaßen mit $f(x)$ zusammen:

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \to 0} \int_{\lambda}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2}\, dt.$$

die Bedingung $|\bar{f}'(x)| \leqq 1$ bestimmte Funktionenmenge durchläuft, so gilt nach ALEXITS[7]): $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, insbesondere $\bar{\varrho}_{1n}^{(1)} < \frac{4}{n}$. Wir beweisen den folgenden

Satz III. *Bezeichnet $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)}$ die größte Abweichung von $f(x)$ und $\sigma_{\delta n}(f; x)$, wenn $f(x)$ die Menge der nach 2π periodischen stetigen Funktionen mit $|\bar{f}'(x)| \leqq 1$ durchläuft, so gilt*

$$\frac{1}{n+1} < \bar{\varrho}_{1n}^{(1)} < \frac{3}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} < \bar{\varrho}_{2n}^{(1)} < \frac{4}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} < \bar{\varrho}_{3n}^{(1)} < \frac{3}{n+1},$$

$$\bar{\varrho}_{3n}^{(1)} < \bar{\varrho}_{4n}^{(1)} < \bar{\varrho}_{5n}^{(1)} < \ldots \text{ und } \bar{\varrho}_{\delta+1,n}^{(1)} - \bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)} < \frac{1}{n+\delta+1} \quad (\text{für } \delta = 3, 4, \ldots).$$

In den Fällen $\delta = 3, 4, \ldots$ (und dann für jedes n) wird die maximale Abweichung für diejenigen Funktionen $f(x)$ erreicht, für welche $\bar{f}'(x)$ auf Halbperioden abwechselnd gleich $+1$ und -1 ist.

In den Fällen $\delta = 1, 2$ sind diese Funktionen keine Extremalen mehr, es gibt dann vermutlich überhaupt keine von n unabhängige Extremale.

Ebenso, wie das Bernsteinsche, kann auch dieses Problem auf den Fall höherer Derivierten übertragen werden. Unser Ergebnis ist der

Satz IV. *Unter allen nach 2π periodischen stetigen Funktionen $f(x)$ mit $|\bar{f}^{(r)}(x)| \leqq 1$ (r ist eine feste ganze Zahl größer als 1), werden diejenigen durch die Mittel $\sigma_{\delta n}(f; x)$ (für alle festen ganzen δ und n) am ungenauesten approximiert, für welche $\bar{f}^{(r)}(x)$ auf Halbperioden abwechselnd gleich $+1$ und -1 ist. Bezeichnet $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(r)}$ die größte Abweichung, so gilt*

$$\bar{\varrho}_{1n}^{(r)} = \frac{\bar{K}^{(r)}}{n+1} + \frac{\bar{R}_n^{(r)}}{(n+1)^{r+1}}, \quad bzw. \quad \bar{\varrho}_{1n}^{(r)} = \frac{\bar{K}^{(r)}}{n+1} - \frac{\bar{S}_n^{(r)}}{(n+1)^r},$$

je nachdem r gerade, bzw. ungerade ist; hier ist

$$\bar{K}^{(r)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^r},^{8)}$$

---

[7]) G. ALEXITS, Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de FOURIER, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **48** (1941), S. 410—433 (ungarisch mit französischem Auszug).

[8]) Man sieht leicht, daß $\bar{K}^{(2)} > \bar{K}^{(4)} > \bar{K}^{(6)} > \ldots > \frac{4}{\pi} > \ldots > \bar{K}^{(7)} > \bar{K}^{(5)} > \bar{K}^{(3)}$ und $\lim_{r\to\infty} \bar{K}^{(r)} = \frac{4}{\pi}$. Diese Größen hängen mit den in der Differenzenrechnung gebrauchten (Eulerschen) Zahlen E_r, bzw. C_r zusammen; $\bar{K}^{(2)} = \frac{\pi}{2}$, $\bar{K}^{(3)} = \frac{\pi^2}{8}$, $\bar{K}^{(4)} = \frac{\pi^3}{24}$, usw.

$$|\bar{R}_n^{(r)}| < \frac{4}{\pi}\,\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}, \quad 0 < \bar{S}_n^{(r)} < \frac{2}{\pi(r-1)}.$$

Man hat wieder

$$\bar{\varrho}_{1n}^{(r)} < \bar{\varrho}_{2n}^{(r)} < \bar{\varrho}_{3n}^{(r)} < \dots \;\; und \;\; \bar{\varrho}_{\delta+1,n}^{(r)} - \bar{\varrho}_{\delta n}^{(r)} < \frac{\bar{K}^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Alle diese Sätze ließen sich auch auf die Hölderschen Mittel übertragen[9]).

§ 1.

Es sei

$$\varphi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^r} \quad \text{und} \quad \psi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^r} \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Ist $r > 1$, so konvergieren diese Reihen gleichmäßig, folglich sind dann $\varphi_r(x)$ und $\psi_r(x)$ überall stetig; $\psi_r(0) = \psi_r(\pi) = 0$. Im Falle $r = 1$ gibt es gleichmäßige Konvergenz nur im Inneren von $(0, 2\pi)$ und es ist dort $\varphi_1(x) = -\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$ und $\psi_1(x) = \frac{\pi - x}{2}$. Die Reihen sind die Fourierschen Reihen ihrer Summen (auch im Falle $r = 1$).

Nach einer Bemerkung von Fejér ist $\psi_1(x) - \sigma_{1n}(\psi_1; x)$ auf $(0, \pi)$ positiv und auf $(\pi, 2\pi)$ negativ. Diese Funktion verschwindet ja in $x = \pi$ und ihre Derivierte ist auf $(0, 2\pi)$ gleich

$$-\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos kx = -\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 < 0.$$

Da die Cesàroschen Mittel höherer Ordnung sich als arithmetische Mittel mit positiven Gewichten aus den Mitteln erster Ordnung ableiten lassen, stimmt das Vorzeichen von $\psi_1(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_1; x)$ für beliebige positive ganze δ und n mit demjenigen von $\sin x$ überein.

Allgemeiner: für jedes ungerade r stimmt das Vorzeichen von $\psi_r(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_r; x)$ mit demjenigen von $\sin x$ überein. Dies sieht man durch Schluß von r auf $r+2$ folgendermaßen: Die Funktion $\psi_{r+2}(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_{r+2}; x)$ ist auf $(0, \pi)$ nach oben, auf $(\pi, 2\pi)$ nach unten konvex, da ihre zweite Derivierte gleich $-(\psi_r(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_r; x))$ ist. Da sie an den Stellen $0, \pi$ und 2π verschwindet, muß sie auf $(0, \pi)$ positiv und auf $(\pi, 2\pi)$ negativ sein.

Für ungerades r ist die Funktion $\varphi_r(x) - \sigma_{\delta n}(\varphi_r; x)$ auf $(0, \pi)$ monoton fallend, da ihre Derivierte gleich $-(\psi_{r-1}(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_{r-1}; x))$,

[9]) Die Ergebnisse dieser Arbeit (mit der Ausnahme des Hilfssatzes in § 4 und der daraus folgenden Verschärfung des Satzes III) wurden schon in ungarischer Sprache mitgeteilt in *Matematikai és Fizikai Lapok*, 49 (1942), S. 123–138.

also negativ ist. Wenn $\alpha_{r\delta n}$ den Wert der Funktion in $\pi/2$ bedeutet, dann ist also $\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r;\,x)-\alpha_{r\delta n}$ auf $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ positiv und auf $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ negativ. Da diese Funktion außerdem gerade und nach 2π periodisch ist, stimmt ihr Vorzeichen überall mit demjenigen von $\cos x$ überein.

Die Funktion $\psi_2(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}$ ist auf $(0,\pi)$ positiv und nach oben konvex. Die Konvexität folgt daraus, daß $\psi_2''(x)=\varphi_1'(x)=\left(-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\right)'=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}<0$; die Positivität folgt aus der Konvexität und daraus, daß die Funktion in 0 und π verschwindet. Nach einem Satze von Fejér[10]) bleiben die Cesàroschen Mittel der Sinusreihe einer auf $(0,\pi)$ positiven und nach oben konvexen Funktion unterhalb dieser Funktion. Demnach stimmt das Vorzeichen von $\psi_2(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_2;\,x)$ überall mit demjenigen von $\sin x$ überein.

Ähnliches gilt auch für die übrigen $\psi_r(x)$ mit geradem r, was man wieder durch Schluß von r auf $r+2$ einsieht.

Für gerades r größer als 1 ist die Funktion $\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r;\,x)$ auf $(0,\pi)$ monoton fallend, weil ihre Derivierte gleich $-(\psi_{r-1}(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_{r-1};\,x))$, also negativ ist. Bezeichnet $\alpha_{r\delta n}$ wieder den Wert in $\pi/2$, so stimmt das Vorzeichen von $\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r;\,x)-\alpha_{r\delta n}$ überall mit demjenigen von $\cos x$ überein.

Zusammenfassend: *Für die Funktionen*

$$\Phi_{r\delta n}(x)=\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r;\,x)-\varphi_r\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sigma_{\delta n}\left(\varphi_r;\,\frac{\pi}{2}\right)\quad(\delta,n=1,2,\ldots)$$

und

$$\Psi_{r\delta n}(x)=\psi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_r;\,x)$$

gilt Folgendes:

$$\operatorname{sgn}\Phi_{r\delta n}(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sin x, & \textit{wenn } r=2,4,6,\ldots,\\ \operatorname{sgn}\cos x, & \textit{wenn } r=3,5,7,\ldots,\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}\Psi_{r\delta n}(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\sin x, & \textit{wenn } r=1,3,5,\ldots,\\ \operatorname{sgn}\cos x, & \textit{wenn } r=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

10) L. Fejér, Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe, *Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, **13** (1933), S. 80—88.

§ 2.

In unseren Problemen dürfen wir offenbar immer annehmen, daß

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Es möge $\mathfrak{K}^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ die Klasse derjenigen nach 2π periodischen Funktionen bedeuten, für welche $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ und $|f^{(r)}(x)| \leq 1$. Wir haben die Größe

$$\varrho_{\delta n}^{(r)} = \max_{f \in \mathfrak{K}^{(r)}} \max_x |f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x)|$$

und die Funktionen, für die dieses Maximum erreicht wird, zu bestimmen.

Wenn $f(x) \in \mathfrak{K}^{(r)}$ und

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

so ist

$$(-1)^{\frac{r}{2}} f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad \text{für gerades } r,$$

$$(-1)^{\frac{r+1}{2}} f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \qquad \text{für ungerades } r.$$

Auf Grund des Parsevalschen Satzes ergeben sich leicht die Beziehungen:

$$(1)\ f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x) = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x+y)\, \Phi_{r\delta n}(y)\, dy \quad \textit{für gerades } r,$$

$$(2)\ f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x) = \frac{(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x+y)\, \Psi_{r\delta n}(y)\, dy \quad \textit{für ungerades } r.$$

Bezeichne $f_r^*(x)$ diejenige in die Klasse $\mathfrak{K}^{(r)}$ gehörige Funktion, für welche

$$(f_r^*(x))^{(r)} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}} \operatorname{sgn} \cos x, & \text{wenn } r \text{ gerade ist,} \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}} \operatorname{sgn} \sin x, & \text{wenn } r \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Da

$$\operatorname{sgn} \cos x \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\cos(2\nu+1)x}{2\nu+1}$$

und

$$\operatorname{sgn} \sin x \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)x}{2\nu+1},$$

so ist

$$f_r^*(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu(r+1)}\frac{\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

a) *Fall eines ungeraden r.* Es sei $f(x)$ beliebig aus $\mathfrak{K}^{(r)}$. Aus (2) folgt, mit Rücksicht auf $\operatorname{sgn}\Psi_{r\delta n}(x)=\operatorname{sgn}\sin x=(-1)^{\frac{r+1}{2}}(f_r^*(x))^{(r)}$:

$$|f(x)-\sigma_{\delta n}(f;x)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}f^{(r)}(x+y)\,\Psi_{r\delta n}(y)\,dy\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f^{(r)}(x+y)|\,|\Psi_{r\delta n}(y)|\,dy\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\Psi_{r\delta n}(y)|\,dy=\frac{(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{\pi}\int_0^{2\pi}(f_r^*(y))^{(r)}\Psi_{r\delta n}(y)\,dy=f_r^*(0)-\sigma_{\delta n}(f_r^*;0).$$

Wie man sich leicht davon überzeugen kann, besteht hier überall das Gleichheitszeihen in einem Punkte $x=x_0$ nur dann, wenn $f(x)=\pm f_r^*(x-x_0)$ ist.

Hieraus folgt, daß[11])

$$\varrho_{\delta n}^{(r)}=f_r^*(0)-\sigma_{\delta n}(f_r^*;0)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N}\left[1-\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2\nu+1}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\right]\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}+$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Für den speziellen Fall der Fejérschen Mittel und für $r=1$ erhält man:

$$\varrho_{1n}^{(1)}=\frac{4}{\pi(n+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{2\nu+1}+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2},$$

folglich ist[12])

---

[11]) Die größte in $\frac{n-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl wird in folgendem mit N bezeichnet.

[12]) Von hier an werden wir die folgenden Abschätzungen mehrmals anwenden: Ist $p(x)$ auf $(a, a+2h)$ positiv und monoton fallend, so ist $\sum_{\nu=0}^{h-1}p(a+2\nu)\geqq\frac{1}{2}\int_a^{a+2h}p(x)\,dx$; wenn $p(x)$ außerdem nach unten konvex ist, so ist $\sum_{\nu=0}^{h-1}p(a+2\nu+1)\leqq\frac{1}{2}\int_a^{a+2h}p(x)\,dx$; Gleichheit besteht nur im Falle gewisser Treppenfunktionen, bzw. gewisser stückweise linearer stetiger Funktionen.

$$\varrho_{1n}^{(1)} < \frac{4}{\pi(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2N+2}\frac{dx}{x}\right)+\frac{2}{\pi}\int\limits_{2N+2}^{\infty}\frac{dx}{x^2} < \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+1}+\frac{6}{\pi n}$$

und

$$\varrho_{1n}^{(1)} > \frac{2}{\pi(n+1)}\int\limits_{1}^{2N+3}\frac{dx}{x}+\frac{2}{\pi}\int\limits_{2N+3}^{\infty}\frac{dx}{x^2} > \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+1}+\frac{2}{\pi(n+2)}.$$

Ferner hat man

$$\varrho_{\delta+1,n}^{(1)}-\varrho_{\delta n}^{(1)} = \frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\frac{1}{2\nu+1},$$

also

$$0<\varrho_{\delta+1,n}^{(1)}-\varrho_{\delta n}^{(1)} < \frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{2\nu+1} < \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+\delta+1}+\frac{4}{\pi(n+\delta+1)}.$$

Damit ist Satz I bewiesen.

Ist nun r eine ungerade Zahl größer als 1, so hat man

$$\varrho_{1n}^{(r)} = \frac{4}{\pi(n+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{(2\nu+1)^r}+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}} = \frac{K^{(r)}}{n+1}-\frac{S_n^{(r)}}{(n+1)^r}$$

mit

$$K^{(r)} = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^r} \quad \text{und} \quad S_n^{(r)} = \frac{4}{\pi}(n+1)^{r-1}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{2\nu-n}{(2\nu+1)^{r+1}};$$

dabei ist

$$0<S_n^{(r)}<\frac{2}{\pi}(n+1)^{r-1}\int\limits_{2N+3}^{\infty}\frac{dx}{x^r}<\frac{2}{\pi(r-1)}.$$

Ferner ist

$$\varrho_{\delta+1,n}^{(r)}-\varrho_{\delta n}^{(r)} = \frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\frac{1}{(2\nu+1)^r},$$

also

$$0<\varrho_{\delta+1,n}^{(r)}-\varrho_{\delta n}^{(r)}<\frac{K^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Damit haben wir Satz II für ungerade r bewiesen.

b) *Fall eines geraden* r. Es sei $f(x)$ beliebig aus $\overset{\circ}{\mathfrak{K}}{}^{(r)}$. Es folgt aus (1) und aus $\operatorname{sgn}\Phi_{r\delta n}(x)=\operatorname{sgn}\cos x=(-1)^{\frac{r+1}{2}}(f_r^*(x))^{(r)}$, durch eine zur obigen analoge Rechnung, daß

$$|f(x)-\sigma_{\delta n}(f;x)|\leqq f_r^*(0)-\sigma_{\delta n}(f_r^*;0).$$

Gleichheit besteht in einem Punkte $x=x_0$ wieder nur dann, wenn

$f(x) = \pm f_r^*(x-x_0)$ ist. Demnach ist

$$\varrho_{\delta n}^{(r)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{N} \left[1 - \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\right] \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}} + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Für die Fejérschen Mittel hat man insbesondere:

$$\varrho_{1n}^{(r)} = \frac{4}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^r} + \\ + \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}} = \frac{K^{(r)}}{n+1} + \frac{R_n^{(r)}}{(n+1)^{r+1}},$$

mit

$$K^{(r)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^r} \quad \text{und} \quad R_n^{(r)} = -\frac{4}{\pi}(n+1)^r \sum_{\nu=N+1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2\nu-n}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Da die Funktion $p(s) = \frac{4}{\pi}(n+1)^r \frac{s-n}{(s+1)^{r+1}}$ auf der Halbgeraden $n \leqq s < \infty$ positiv, bis zur Stelle $s_0 = n + \frac{n+1}{r}$ wachsend, dann aber fallend ist, so ist $R_n^{(r)} = \sum_{\nu=N+1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} p(2\nu)$ absolut genommen kleiner als $p(s_0)$, d. h. es ist

$$|R_n^{(r)}| < \frac{4}{\pi} \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}.$$

Man hat ferner

$$\varrho_{\delta+1,n}^{(r)} - \varrho_{\delta n}^{(r)} = \frac{4}{\pi(n+\delta+1)} \sum_{\nu=0}^{N} \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+\delta}\right) \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^r},$$

also ist

$$0 < \varrho_{\delta+1,n}^{(r)} - \varrho_{\delta n}^{(r)} < \frac{K^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Hiermit ist Satz II auch für gerade r bewiesen.

§ 3.

Mit $\bar{\mathfrak{K}}^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ wollen wir die Klasse derjenigen nach 2π periodischen stetigen Funktionen $f(x)$ mit der Fourierreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

bezeichnen, für welche

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

die Fouriersche Reihe einer zur Klasse $\mathfrak{K}^{(r)}$ gehörigen Funktion $\overline{f}(x)$ ist. Wir haben jetzt die Größen

$$\overline{\varrho}^{(r)}_{\delta n} = \max_{f \in \overline{\mathfrak{K}}^{(r)}} \max_{x} |f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x)|,$$

sowie die Funktionen, für die diese Maxima erreicht werden, zu bestimmen.

Wenn $f(x) \in \overline{\mathfrak{K}}^{(r)}$, dann gilt im Falle eines geraden r:

$$(-1)^{\frac{r}{2}}\, \overline{f}^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r\, (a_k \sin kx - b_k \cos kx),$$

und im Falle eines ungeraden r:

$$(-1)^{\frac{r-1}{2}}\, \overline{f}^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r\, (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Auf Grund des Parsevalschen Satzes ergeben sich die Beziehungen:

$$(3)\quad f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x) = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}^{(r)}(x+y)\, \Psi_{r\delta n}(y)\, dy \quad \textit{für gerades } r,$$

$$(4)\quad f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x) = \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}^{(r)}(x+y)\, \Phi_{r\delta n}(y)\, dy \quad \textit{für ungerades } r.$$

Sei $g_r^*(x)$ diejenige zu $\overline{\mathfrak{K}}^{(r)}$ gehörige Funktion, für welche

$$\overline{g}_r^{*(r)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}} \operatorname{sgn} \sin x, & \text{wenn } r \text{ gerade ist,} \\ (-1)^{\frac{r-1}{2}} \operatorname{sgn} \cos x, & \text{wenn } r \text{ ungerade ist;} \end{cases}$$

d. h , es sei

$$g_r^*(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu r} \frac{\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Durch eine schon angewendete Schlußweise erhalten wir aus (3) und (4), mit Rücksicht auf unsere Feststellungen betreffend das Vorzeichen der Funktionen Φ und Ψ in § 1, daß

$$|f(x) - \sigma_{\delta n}(f;\, x)| \leqq g_r^*(0) - \sigma_{\delta n}(g_r^*;\, 0)$$

für $r = 2, 3, \ldots$ und für $\delta, n = 1, 2, \ldots$, und daß das Gleichheitszeichen in einem Punkte $x = x_0$ nur dann gilt, wenn $f(x) = \pm g_r^*(x - x_0)$ ist. Demnach ist

$$\overline{\varrho}^{(r)}_{\delta n} = g_r^*(0) - \sigma_{\delta n}(g_r^*;\, 0) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{N} \left[1 - \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\right] \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}} +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Abschätzungen auf Grund dieser Reihendarstellung ergeben sich, wie für die $\varrho^{(r)}_{\delta n}$ in § 2, nur hat man die Rolle gerader und ungerader r zu vertauschen.

Damit ist auch Satz IV bewiesen.

§ 4.

Es bleibt nur noch übrig, Satz III zu beweisen.

Die Abschätzungen der $\bar{\varrho}^{(1)}_{\delta n}$ von unten folgen leicht, wenn man die Abweichung der speziellen Funktion $f(x)=\cos x$ aus $\bar{\mathfrak{K}}^{(1)}$ von ihren Mitteln $\sigma_{\delta n}(f;x)$ im Punkte $x=0$ ausrechnet.

Die Beziehung (4) gilt auch für $r=1$. Ehe wir aber auf diesem Grund weitergehen, müssen wir das Vorzeichen der Funktion $\Phi_{1\delta n}$ diskutieren.

Da auf $(0, 2\pi)$ gilt: $\varphi_1(y)=-\log\left(2\sin\frac{y}{2}\right)$, so hat man

$$\Phi'_{11n}(y)=(\varphi_1(y)-\sigma_{1n}(y))'=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{y}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\sin ky=$$
$$=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{y}{2}+\frac{(n+1)\sin y-\sin(n+1)y}{4(n+1)\sin^2\frac{y}{2}}=-\frac{1}{n+1}\,\frac{\sin(n+1)y}{4\sin^2\frac{y}{2}}.\text{[13]}$$

Wegen der rekursiven Beziehung

$$\binom{n+\delta+1}{n}\sigma_{\delta+1,n}=\sum_{m=0}^{n}\binom{m+\delta}{m}\sigma_{\delta m}$$

zwischen den Cesàroschen Mitteln erhält man

$$\binom{n+2}{2}\Phi'_{12n}(y)=\sum_{m=0}^{n}\binom{m+1}{1}\Phi'_{11m}(y)=-\frac{\sum_{m=0}^{n}\sin(m+1)y}{4\sin^2\frac{y}{2}}$$

und

$$\binom{n+3}{3}\Phi'_{13n}(y)=\sum_{m=0}^{n}\binom{m+2}{2}\Phi'_{12m}(y)=-\frac{\sum_{m=0}^{n}(n+1-m)\sin(m+1)y}{4\sin^2\frac{y}{2}},$$

also ist $\Phi'_{13n}(y)$ auf $(0,\pi)$ negativ[14]). Dann ist aber auch $\Phi'_{1\delta n}(y)$ mit

---

[13]) Die Summenformel von $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\sin ky$, aus welcher sich auch die Positivität dieser Summe auf $(0,\pi)$ ergibt, wurde zuerst von F. Lukács gefunden, vgl. P. Turán, Über die arithmetischen Mittel der Fourier-Reihe, *Journal London Math. Soc.*, **10** (1935), S. 277—280.

[14]) Siehe Anm. [13]).

$\delta > 3$ auf $(0, \pi)$ negativ. Da $\Phi_{1\delta n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ist $\operatorname{sgn} \Phi_{1\delta n}(y) = \operatorname{sgn} \cos y$ für jedes y und für $\delta \geqq 3$.

Wenn also $\delta \geqq 3$, dann kann man denselben Schluß anwenden, wie in den vorigen §-en. Für $\bar{\varrho}^{(1)}_{\delta n}$ ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck, wie für die übrigen $\bar{\varrho}^{(r)}_{\delta n}$ mit ungeradem r (siehe § 3). Die extremalen Funktionen sind die Funktionen $g_1^*(x - x_0)$.

Da, wie man leicht nachrechnet, für jedes δ gilt:

$$\sigma_{\delta n}(g_1^*; 0) - \sigma_{\delta+1, n}(g_1^*; 0) =$$

$$= \frac{4}{\pi(n+\delta+1)} \sum_{\nu=0}^{N}{}' \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+\delta}\right) \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} =$$

$$= \frac{1}{n+\delta+1} \sigma_{\delta n}(\operatorname{sgn} \cos; 0) \begin{cases} > 0 \\ < \frac{1}{n+\delta+1}, \end{cases}$$

so ist für $\delta \geqq 3$:

$$0 < \bar{\varrho}^{(1)}_{\delta+1, n} - \bar{\varrho}^{(1)}_{\delta n} < \frac{1}{n+\delta+1};$$

ferner ist

$$\bar{\varrho}^{(1)}_{3n} = g_1^*(0) - \sigma_{3n}(g_1^*; 0) = (g_1^*(0) - \sigma_{1n}(g_1^*; 0)) + (\sigma_{1n} - \sigma_{2n}) + (\sigma_{2n} - \sigma_{3n}) <$$

$$< \left(\frac{4}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} - \frac{4}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2\nu - n}{(2\nu+1)^2}\right) + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3},$$

also

$$\bar{\varrho}^{(1)}_{3n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\pi(n+1)^2} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} < \frac{3}{n+1}.$$

(Die zweite Summe wurde dabei auf ähnliche Weise abgeschätzt, wie die Größe $R_n^{(r)}$ in § 2.)

Aus unseren Formeln für die Derivierten von $\Phi_{11n}(y)$ und $\Phi_{12n}(y)$ sieht man leicht, daß diese Funktionen nicht das Vorzeichen von $\cos x$ haben, ihre Nullstellen hängen sogar vom Index n ab. Diese Tatsache läßt vermuten, daß in diesen Fällen keine von n unabhängige Extremale mehr gibt.

Die Abschätzungen $\bar{\varrho}^{(1)}_{1n} < \frac{3}{n+1}$ und $\bar{\varrho}^{(1)}_{2n} < \frac{4}{n+1}$ ergeben sich aus dem folgenden Hilfssatz über numerische Reihen, wenn man diesen auf die Fouriersche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ der in die Klasse gehörigen stetigen Funktion $f(x)$ anwendet, und bemerkt, daß die Fejérschen Mittel der Fourierschen Reihe von $\bar{f}'(x)$, d. h. der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, im Absolutwert unterhalb $\max |\bar{f}'|$, also unterhalb 1 bleiben.

Hilfssatz. *Sind die Cesàroschen Mittel erster Ordnung* σ'_{1n} *der Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} k u_k$ *im Absolutwert nicht größer als* 1, *so streben die Cesàroschen Mittel erster Ordnung* σ_{1n} *der Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *gegen einen endlichen Wert* U, *und man hat* $|U-\sigma_{1n}|<\frac{3}{n+1}$. *Für die Mittel zweiter Ordnung* σ_{2n} *gilt:* $|U-\sigma_{2n}|<\frac{4}{n+1}$.[15])

Mit den Bezeichnungen $s_k=\sum_{h=0}^{k} h u_h$ und $d_k=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ hat man: $\sigma'_{1k}=\frac{1}{k+1}\sum_{h=0}^{k} s_h$, ferner für $p>n>0$

$$\sigma_{1p}-\sigma_{1n}=\sum_{k=0}^{p}\left(1-\frac{k}{p+1}\right)u_k-\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)u_k=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{p} u_k-\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} k u_k+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k u_k=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{p}\frac{s_k-s_{k+1}}{k}-\frac{s_p}{p+1}+\frac{s_n}{n+1}=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{p} d_k s_k=\sum_{k=n+1}^{p} d_k((k+1)\sigma'_{1k}-k\sigma'_{1,k-1})=$$

$$=-d_{n+1}(n+1)\sigma'_{1n}+(d_{n+1}-d_{n+2})(n+2)\sigma'_{1,n+1}+\ldots+$$

$$+(d_{p-1}-d_p)p\sigma'_{1,p-1}+d_p(p+1)\sigma'_{1p}.$$

Wegen $|\sigma'_{1k}|\leqq 1$ und $d_k-d_{k+1}>0$ folgt hieraus, daß

$$|\sigma_{1p}-\sigma_{1n}|\leqq d_{n+1}(n+1)+(d_{n+1}-d_{n+2})(n+2)+\ldots+(d_{p-1}-d_p)p+d_p(p+1)=$$

$$=(2n+3)d_{n+1}+d_{n+2}+d_{n+3}+\ldots+d_p=(2n+3)d_{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{p+1}.$$

Hieraus sieht man, daß die Folge σ_{1p} konvergent ist, und, wenn der Limes mit U bezeichnet wird, dann gilt:

$$|U-\sigma_{1n}|\leqq(2n+3)\,d_{n+1}+\frac{1}{n+2}<\frac{3}{n+1}.$$

Die Abschätzung

$$|U-\sigma_{2n}|<\frac{4}{n+1}$$

folgt endlich auf Grund der Beziehung

$$\sigma_{1n}-\sigma_{2n}=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)u_k-\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\left(1-\frac{k}{n+2}\right)u_k=$$

$$=\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)k u_k=\frac{1}{n+2}\sigma'_{1n}.$$

Damit wurde auch der Satz III vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 15. Juni 1944.)

---

[15]) A. a. O. [7]) beweist Alexits auf anderem Weg, daß $|U-\sigma_{1n}|<\frac{4}{n}$.