Sur l'approximation des courbes convexes par des polygones.

Par D. LÁZÁR (†) à Kolozsvár.

1. Nous allons démontrer le théorème suivant qui nous a été suggéré par une Note de M. L FEJES[1]):

À chaque courbe convexe fermée il existe un polygone circonscrit et un polygone inscrit, chacun à n côtés, dont les aires T_n et t_n satisfont à l'inégalité

$$\frac{T_n - t_n}{T_n} \leqq \sin^2 \frac{\pi}{n},$$

ou à celle équivalente

$$\frac{t_n}{T_n} \geqq \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

2. Convenons de désigner l'aire d'un polygone p par $|p|$.

Nous commençons la démonstration par la remarque suivante que nous empruntons à la Note citée de M. FEJES: Il existe un polygone circonscrit P_n et un polygone inscrit p_n à la courbe donnée, chacun à n côtés et tels que p_n est inscrit à P_n et que les côtés de p_n découpent de P_n des triangles de même aire[2]).

Tenant compte de ce fait, notre théorème sera démontré dès que nous aurons vérifié l'inégalité $\frac{|p_n|}{|P_n|} \geqq \cos^2 \frac{\pi}{n}$ pour tout couple de polygones convexes à n côtés, p_n et P_n, dont p_n est inscrit à P_n de façon que ses côtés découpent de P_n des triangles de même aire.

(†) Le jeune mathématicien DEZSŐ LÁZÁR est succombé, en 1943, victime de la guerre dans un camp de travail en Ucraïne. (La rédaction.)

[1]) L. FEJES, Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen, *Compositio Math.*, 6 (1939), pp. 456—467.

[2]) On voit aisément, par un raisonnement de continuité, que cela est toujours possible. De plus, on peut fixer d'avance l'un des sommets de p_n.

Pour le montrer, désignons par $\bar{p}_n$ un polygone d'aire minimum parmi les polygones à n côtés inscrits au polygone convexe à n côtés donné P_n, et dont les côtés découpent de P_n n triangles de même aire. *Il s'agit de déterminer parmi les polygones P_n d'aire donnée A ceux pour lesquels $|\bar{p}_n|$ est le plus petit possible.*

L'existence d'un tel polygone extrémal $\bar{P}_n$ est assurée par le théorème de Weierstraß sur les functions continues dans un ensemble fermé. En effet, on peut évidemment se borner au cas où le polygone varié P_n est situé dans un cercle fixe C de rayon[3] $\varrho = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}A}{3}}$, le cas général y pouvant toujours être réduit par une transformation affine. L'ensemble des points $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ de l'espace E_{2n} pour lesquels l'enveloppe convexe des points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ dans le plan E_2 est un polygone P_n compris dans le cercle C et d'aire A, est évidemment *fermé* et $|\bar{p}_n|$ sera une fonction continue dans cet ensemble, lorsqu'on convient de poser $|\bar{p}_n| = A$ si P_n se réduit à un polygone ayant moins de n côtés.

3. Envisageons un polygone extrémal $\bar{P}_n$. M. Fejes a démontré[4]) que *A, B, C et D étant quatre sommets consécutifs de $\bar{P}_n$, on a*

$$AD \parallel BC. \tag{I}$$

Cette proposition est évidemment une conséquence de la suivante: *Les sommets du polygone $\bar{p}_n$ correspondant à $\bar{P}_n$ coïncident avec les milieux des côtés de $\bar{P}_n$.* Les triangles aBb et cbC ayant la même aire, la hauteur correspondant au côté Bb des premier triangle est plus petite que celle correspondant an côté bC du second.

Supposons le contraire. Soient $a, b, c, \ldots$ les sommets de $\bar{p}_n$ qui se trouvent respectivement sur les côtés consécutifs $AB, BC, CD, \ldots$ et supposons, pour fixer les idées, que $\overline{Bb} > \overline{bC}$.

Déplaçons le sommet b lelong du segment bB au point b'; comme alors la hauteur du triangle abc correspondant à b diminue, $|\bar{p}_n|$ diminue aussi. Puis tournons la droite BC autour de b' jusqu'à ce qu'on ait $|aB'b'| = |b'C'c|$, B' et C' étant les points provenant de B et C. Le polygone ainsi obtenu $AB'C'D\ldots$ soit désigné par P_n'.

Lorsque $\overline{bb'}$ est assez petit, on a $\overline{Bb'} > \overline{b'C}$ et $\overline{B'b'} > \overline{b'C'}$, donc $|P_n'| > |\bar{P}_n|$. D'autre part, lorsque $\overline{Bb'}$ est assez petit, alors $|P_n'| < |\bar{P}_n|$. Comme $|P_n|$ varie d'une manière continue avec b', il y aura une position

[3]) C'est le cercle circonscrit à un triangle régulier ayant l'aire A.

[4]) Nous recapitulons la démonstration de la note citée sous [1]) avec une légère modification due à M. Fejes.

$\bar{b}$ de b' entre b et B, telle que pour le polygone $P_n' = P_n^*$ correspondant on ait $|P_n^*| = |\bar{P}_n| = A$.

Cependant, les aires des triangles $aB'\bar{b}$ et $\bar{b}C'c$ sont plus grandes que les aires des triangles découpés du polygone original $\bar{P}_n$. On obtient donc, par une variation continue convenable des sommets $a, b, c, \ldots$, un polygone inscrit à P_n^* dont les côtés découpent de P_n^* des triangles ayant tous la même aire, plus grande que celle des triangles originaux. Or cela est en contradiction avec la définition de $\bar{P}_n$ comme polygone extrémal, ce qui prouve notre proposition.

4. Nous disons que le polygone extrémal $\bar{P}_n$ jouit aussi de la propriété suivante: *A, B, C, D et E étant cinq sommets consécutifs de $\bar{P}_n$, on a*

$$AE \parallel BD. \tag{II}$$

Les sommets a, b, c, d de $\bar{p}_n$ se trouvant, comme nous venons de voir, respectivement aux milieux des côtés AB, BC, CD, DE de $\bar{P}_n$, notre proposition est équivalente à ce que $ad \parallel bc$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que la distance δ_a du point a à la droite bc diffère de la distance correspondante δ_d, par exemple $\delta_a < \delta_d$. Déplaçons le sommet C en C' voisin, parallèlement à BD et de sorte de diminuer sa distance à la droite AE. Remplaçons le point b par le point d'intersection b' des droites bc et BC', et le point c par le point d'intersection c' des droites bc et DC'. Tandis que, par cette transformation, l'aire de $\bar{P}_n$ reste invariante, celle de $\bar{p}_n$ diminue et cela dans l'ordre $\eta = \overline{CC'}$, c'est-à-dire que, en désignant par $\bar{p}_n'$ le polygone $ab'c'd\ldots$, $(|\bar{p}_n'| - |\bar{p}_n|)/\eta$ tend, pour $\eta \to 0$, vers une valeur finie négative. On a, en effet, $|\bar{p}_n'| - |\bar{p}_n| = \dfrac{\delta_a - \delta_d}{4}\eta$.

Déplaçons ensuite b' sur la droite BC' en b'' et c' sur la droite DC' en c'', de sorte que les côtés ab'', $b''c''$ et $c''d$ du polygone obtenu $\bar{p}_n''$ découpent de $\bar{P}_n'$ des triangles ayant tous la même aire. Or l'ordre des distances $\overline{b'b''}$ et $\overline{c'c''}$, ainsi que celle des angles des droites $b'b''$, ac' et $c'c''$, $b'd$, est évidemment égal à η. Il en résulte que la variation $\bar{p}_n'' - \bar{p}_n'$ est de l'ordre η^2. Donc si l'on remplace b et c par b'' et c'', alors l'aire de $\bar{p}_n$ diminue dans l'ordre η, d'où il s'ensuit que $\bar{P}_n'$ fournit, pour η assez petit, le polygone inscrit $\bar{p}_n''$ d'aire inférieure à celle de $\bar{p}_n$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\bar{P}_n$ est extrémal.

5. Pour achever la démonstration, il ne nous reste qu'à montrer que tout polygone P_n satisfaisant aux conditions (I) et (II) est l'image affine d'un polygone régulier.

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que pour certains sommets consécutifs A, B, C, D de P_n on ait[5]) $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$. Les conditions (I) et (II) entraînent alors que $AEB\sphericalangle=BDC\sphericalangle$, c'est-à-dire que E se trouve sur le cercle circonscrit au trapèze équilatère $ABCD$; comme $AE \| BD$, on a de plus $\overline{AB}=\overline{DE}$.

Tous les sommets de P_n se trouvent donc sur le même cercle et tous ses côtés sont égaux. Par conséquent, P_n est régulier, ce qu'il fallait démontrer.

(Reçu le 7 avril 1941)

---

[5]) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un trapèze $ABCD$ puisse être transformé par une affinité de manière qu'on ait $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$, est $\overline{AD}<3\overline{BC}$. Nous disons que sur un polygone convexe fermé $A_1A_2\ldots A_n$ on peut trouver quatre sommets consécutifs $A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, A_{k+2}$ (bien entendu, $A_{n+i}\equiv A_i$) de sorte que l'inégalité $3\overline{A_kA_{k+1}}>\overline{A_{k-1}A_{k+2}}$ soit satisfaite. En effet, sous l'hypothese contraire, on obtiendrait par addition $3\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kA_{k+1}}\leqq\sum_{k=1}^{n}\overline{A_{k-1}A_{k+2}}$; tandis que par addition des inégalités $\overline{A_{k-1}A_{k+2}}<\overline{A_{k-1}A_k}+\overline{A_kA_{k+1}}+\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$ on a $\sum_{=1}^{n}\overline{A_{k-1}A_{k+2}}<3\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kA_{k+1}}$.