Sur les produits infinis et le théorème d'Abel.

Par MIKLÓS SCHWEITZER (†) à Budapest.

On connaît bien le théorème d'Abel qui joue un rôle important dans la théorie des séries entières: la série $\sum_0^\infty a_n$ étant supposée convergente et de somme S, on a $\sum_0^\infty a_n x^n \to S$ pour $x \to 1-0$.

Outre les séries entières, on se sert encore des produits infinis pour le développement des fonctions analytiques. T. F. RITT a démontré que toute fonction analytique $f(z)$, avec $f(0)=1$, se représente d'une façon univoque, dans un certain cercle $|z|<r$, sous la forme[1] $\prod_1^\infty (1+a_n z^n)$. Cela suggère de chercher l'analogue du théorème d'Abel pour les produits de ce genre.

HARDY, le premier à s'occuper de ce problème, est arrivé à un résultat surprenant[2]). On pourrait croire que la convergence de $\Pi(1+a_n)=p$ entraîne l'existence des limites, pour $x \to 1-0$, de $\Pi(1+a_n x)$ et de $\Pi(1+a_n x^n)$ et que ces limites sont égales à p. Or, HARDY construit un exemple d'un produit du premier type qui diverge partout sauf pour $x=0$ et $x=1$, donc dans ce cas la question concernant la limite est dépourvue de sens. Un autre exemple, pour le second type, montre que notre limite peut être égale au double de la valeur de $\Pi(1+a_n)$.

On voit donc que pour les suites d'exposants $1, 1, 1, \ldots$ et $1, 2, 3, \ldots$ le théorème d'Abel n'admet pas d'analogue. La question se pose qu'est-ce qu'on peut dire d'autres suites plus rares comme par exemple $1, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots$ ou $1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots$, D'une façon générale, quelles sont les suites d'entiers $1 \leqq k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots$ pour lesquelles la convergence de

---

(†) Le jeune mathématicien MIKLÓS SCHWEITZER fut tué le 28 janvier 1945, pendant le siège de Budapest, par une balle de fusil allemande. (La rédaction.)

[1]) J. F. RITT, Representation of analytic functions as infinite product, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), pp. 1—3.

[2]) G. H. HARDY, A note on the continuity or discontinuity of a function defined by an infinite product, *Proceedings of the London Math. Society*, (2) **7** (1909), pp. 40—48.

$\Pi(1+a^n)$ entraîne la relation

$$\lim_{x\to 1-0} \prod_1^{\infty}(1+a_n x^{k_n}) = \prod_1^{\infty}(1+a_n).$$

La réponse est fournie par le théorème suivant.

Théorème 1. *Posons*

$$P(x)=\prod_1^{\infty}(1+a_n x^{k_n}).$$

Pour que la limite de $P(x)$, pour $x\to 1$, existe et soit égale à $P(1)$ pour tout produit convergent $\prod_1^{\infty}(1+a_n)$, il faut et il suffit que

$$\frac{k_1+k_2+\ldots+k_n}{k_n}<K, \tag{1}$$

c'est-à-dire que la suite à gauche reste bornée.

Au lieu de faire varier x sur l'axe réel et à gauche de $x=1$, on pourrait aussi le faire varier dans le plan complexe et s'approcher du point 1 par une région angulaire, comprise dans le cercle unité et cela sans modifier essentiellement les raisonnements.

On peut évidemment supposer K entier et il vient immédiatement dont nous nous servirons que les suites remplissant notre hypothèse se decomposent en $2K$ suites au plus dont chacune fortement lacunaire, c'est-à-dire telle que le rapport des termes consécutifs reste au dessus d'une quantité supérieure à 1. Un cas particulier intéressant est fourni par la suite $1, 2, \ldots, 2^n, \ldots$ pour laquelle, par conséquent, l'analogue du théoréme d'Abel est valable. Il n'en est pas ainsi pour la suite $1, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots$ quelque soit k.

Il pourrait paraître paradoxe que la relation en question ne subsiste pas toujours; en effet, le réarrangement de $P(x)$ donne une série entière $\Sigma b_n x^n$ pour laquelle évidemment, le théorème d'Abel est valable. Or, la convergence du produit $\Pi(1+a_n)$ n'entraîne pas nécessairement celle de Σb_n ni la relation $\Sigma b_n = \Pi(1+a_n)$. Observons, sans entrer dans les détails, que l'on peut démontrer que sous l'hypothèse (1) la série Σb_n converge et a pour somme la valeur de $\Pi(1+a_n)$. Notre réarrangement fournit donc une méthode pour passer d'un produit infini à une série équivalente. Cela dit évidemment plus que ce que l'hypothèse (1) assure l'existence de la limite radiale, car ce dernier fait découle déjà, par le théorème d'Abel, de la convergence de Σb_n.

Outre le théorème 1 nous nous occuperons encore d'une sorte de théorème inverse du type Tauber. Pour les séries entières l'inversion du théorème d'Abel n'est possible que sous certaines hypothèses complémentaires. Le théorème qui suit, met en évidence que pour les produits infinis cette différence entre les théorèmes du type Abel et du type TAUBER n'intervient pas. Quand le théorème d'Abel subsiste, il en est de même de son inverse. C'est seulement l'hypothèse évidente $a_n \to 0$ qu'il faut encore poser.

Théorème 2. *Supposons que la suite $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ remplisse la condition* (1) *et que de plus $a_n \to 0$ et, pour $x \to 1$, $P(x) \to p \neq 0$; alors $\prod_1^\infty (1+a_n)$ converge et a p pour valeur.*

L'hypothèse $a_n \to 0$ ne peut pas être supprimée. Par exemple pour $P(x) = (1-x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$, $P(x) = \frac{1}{1+x}$ et $P(x) \to \frac{1}{2}$ lorsque $x \to 1$, tandis que $P(1) = 0$.

L'analogue du théorème 2 pour des séries entières est connu depuis longtemps. En fait, si l'on cherche à formuler le théorème de TAUBER d'une façon générale pour les séries du type $\Sigma a_n x^{k_n}$, on parvient à ce que, sous l'hypothèse (1) et en supposant encore que $a_n \to 0$, l'existence de la limite de $P(x)$ pour $x \to 1$ entraîne la convergence de la série Σa_n. Cela vient immédiatement du second théorème de Tauber[3]) et du fait que la suite $k_1, k_2, \ldots$ ne peut contenir qu'un nombre fini de termes égaux.

Pour la démonstration de nos théorèmes nous aurons à nous servir du lemme suivant.

Lemme. *Lorsque la suite $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ satisfait à l'hypothèse* (1), *on a*

(2) $$l k_n < k_{n+Kl}$$

et

(3) $$k_n \geqq 2^{\left[\frac{n}{2K}\right]}$$

quelles que soient les valeurs positives n et l.

Démonstration. De l'hypothèse (1) et de $k_n \leqq k_{n+1}$ il vient que

$$Klk_n < k_1 + k_2 + \ldots + k_n + k_{n+1} + \ldots + k_{n+Kl} < Kk_{n+Kl}$$

et par conséquent

$$lk_n < k_{n+Kl}.$$

Soit $\nu = \left[\frac{N}{K}\right]$ et posons, dans (2), $l = 2$, $n = (\nu - 2)K$; on obtient que $k_N \geqq k_{\nu k} \geqq 2k_{(\nu-2)K}$. En répétant ce procédé, on arrive à l' né lité

$$k_N \geqq 2^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} = 2^{\left[\frac{N}{2K}\right]}$$

ce qu'il fallait démontrer.

---

[3]) A. TAUBER, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **8** (1897), pp. 273–277.

Démonstration du théorème 1. L'hypothèse est suffisante. En effet, lorsque le produit $\Pi(1+a_n)=p$ converge et diffère de 0, on aura évidemment $a_n \to 0$ et $a_n \neq -1$. En posant encore l'hypothèse (1), on en conclut immédiatement que la suite des k_n ne peut contenir plus de K termes égaux. De là il résulte que les séries entières Σx^{k_n} et $\Sigma a_n x^{k_n}$ sont absolument convergentes pour $|x|<1$ et par conséquent, il en est de même pour le produit infini $\Pi(1+a_n x^{k_n})$. De plus x étant suffisamment proche de 1, on pourra choisir N de sorte que

$$1-\frac{1}{k_N} \leqq x \leqq 1-\frac{1}{k_{N+1}}.$$

Or, faisons la décomposition

$$\frac{P(x)}{p}=\prod_1^m \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n} \prod_{m+1}^N \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n} \prod_{N+1}^\infty (1+a_n x^{k_n}) \frac{1}{\prod\limits_{N+1}^\infty (1+a_n)}$$

où nous avons choisi m de sorte que pour $n>m$ on ait toujours $|a_n|<\frac{1}{3}$. Quand $x \to 1$, on aura évidemment

$$\prod_1^m \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n} \to 1 \tag{4}$$

et comme $N \to \infty$, on aura aussi

$$\prod_{N+1}^\infty (1+a_n) \to 1. \tag{5}$$

Pour vérifier la convergence des deux autres produits, nous nous servirons de l'inégalité bien connue suivante, facile à prouver: Si $|u_n|<\frac{1}{2}$ pour $n=k+1, k+2, \ldots, M$, alors

$$e^{-2\sum\limits_{k+1}^M |u_n|} \leqq \left| \prod_{k+1}^M (1+u_n) \right| \leqq e^{\sum\limits_{k+1}^M |u_n|}. \tag{6}$$

Écrivons

$$\prod_{m+1}^N \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n}=\prod_{m+1}^N \left(1-\frac{a_n(1-x^{k_n})}{1+a_n}\right);$$

alors, en posant dans l'inégalité (6) $u_n=-\dfrac{a_n(1-x^{k_n})}{1+a_n}$, $k=m$, $M=N$ et en observant que pour $n>m$

$$|u_n| \leqq \frac{|a_n|\,|1-x^{k_n}|}{1-|a_n|}<\frac{|a_n|}{1-|a_n|}<\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},$$

la vérification de la relation

(7) $$\prod_{m+1}^{N} \frac{1+a_n x^{k_n}}{1+a_n} \to 1$$

se réduit à celle de

$$\sum_{m+1}^{N} |u_n| \to 0 \qquad (x \to 1,\ N \to \infty).$$

Or,

$$|1-x^{k_n}| = (1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{k_n-1}) < \frac{k_n}{k_N},$$

donc

$$|u_n| < \frac{|a_n|\frac{k_n}{k_N}}{1-|a_n|} < \frac{3}{2}\,\frac{|a_n|k_n}{k_N}$$

et de là

$$\sum_{m+1}^{N} |u_n| < \frac{3}{2}\sum_{m+1}^{N} \frac{|a_n|k_n}{k_N} < \frac{3}{2}\sum_{1}^{N} \frac{|a_n|k_n}{k_N} < \frac{3K}{2}\,\frac{|a_1|k_1+|a_2|k_2+\ldots+|a_N|k_N}{k_1+k_2+\ldots+k_N}$$

et

$$\frac{|a_1|k_1+\ldots+|a_N|k_N}{k_1+\ldots+k_N} \to 0,$$

puisque $|a_N| \to 0$.

La relation

(8) $$\prod_{N+1}^{\infty} (1+a_n x^{k_n}) \to 1$$

découle aussi de l'inégalité (6), en y posant $u_n = a_n x^{k_n}$, $k=N$, $M=\infty$; tout cela est permis, car $|a_n| x^{k_n} < \frac{1}{2}$ et la série $\Sigma |u_n|$ converge absolument. Or,

$$\sum_{N+1}^{\infty} |u_n| = \sum_{N+1}^{\infty} |a_n| x^{k_n} < \operatorname*{Max}_{\nu > N} |a_\nu|\, K\,(x^{k_{N+1}} + x^{k_{N+K+1}} + x^{k_{N+2K+1}} + \ldots)$$

et par (2) et comme

$$x^{k_{N+1}} < \left(1-\frac{1}{k_{N+1}}\right)^{k_{N+1}} < \frac{1}{e},$$

il résulte que

$$x^{k_{N+1}} + x^{k_{N+K+1}} + x^{k_{N+2K+1}} + \ldots < \sum_{0}^{\infty} x^{n k_{N+1}} = \frac{1}{1-x^{k_{N+1}}} < \frac{e}{e-1};$$

par conséquent

$$\sum_{N+1}^{\infty} |u_n| < \operatorname*{Max}_{\nu > N} |a_\nu| \frac{Ke}{e-1} \to 0;$$

donc, eu égard de (6), la rélation (8) est vérifiée. Enfin, en combinant (4), (5), (7) ét (8), l'existence de la limite radiale est démontrée.

Pour prouver la nécessité de l'hypothése (1), nous envisageons une suite $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ qui ne satisfait pas à l'hypothèse et nous construisons un produit infini $\Pi(1+a_n)$, convergent mais pour lequel la limite de $P(x)$ pour $x \to 1$ n'existe pas.

Dans ce cas, en posant

$$K_n = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{k_n}$$

on a $\overline{\lim}\, K_n = \infty$. Posons encore

$$M_n = \frac{k_1 + k_3 + \ldots + k_{2n+1}}{k_{2n+1}},$$

alors

$$M_n > \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_3 + k_3 + k_5 + k_5 + \ldots + k_{2n+1}}{k_{2n+1}} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{2n} + k_{2n+1}}{k_{2n+1}} = \frac{1}{2} K_{2n+1}$$

et

$$\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_{2n+1}}{k_{2n+1}} \geqq \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_{2n+1} + k_{2n+2} - k_{2n+2}}{k_{2n+2}} = K_{2n+2} - 1,$$

donc

$$M_n > \frac{1}{2} K_{2n+1} \geqq \frac{1}{2} (K_{2n+2} - 1);$$

il s'ensuit que

$$\overline{\lim}\, M_n = \infty.$$

Posons

$$\varepsilon_n = \min_{\nu \leqq n} M_\nu^{-\frac{1}{3}},$$

alors il est manifeste que la suite des ε_n va en décroissant vers zéro. Envisageons les produits partiels $\prod_1^n (1 + a_\nu) = p_n$ où nous choisirons a_ν de sorte que l'on ait $p_{2n} = 1 + \varepsilon_n$, $p_{2n+1} = 1$ et cela pour tous les n. Comme évidemment $\varepsilon_n \to 0$, on aura aussi $p_n \to 1$, c'est que le produit converge vers la valeur 1.

$$a_1 = 0 \text{ puisque } p_1 = 1 + a_1 = 1;$$

$$a_{2n} = \frac{p_{2n} - p_{2n-1}}{p_{2n-1}} = \varepsilon_n;$$

$$a_{2n+1} = \frac{p_{2n+1} - p_{2n}}{p_{2n}} = -\frac{\varepsilon_n}{1 + \varepsilon_n};$$

$$a_{2n}+a_{2n+1}=\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n}; \qquad a_{2n}\,a_{2n+1}=\frac{-\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n};$$

$$P(x)=\prod_1^{\infty}(1+a_n x^{k_n})=\prod_1^{\infty}(1+a_{2n}\,x^{k_{2n}})\,(1+a_{2n+1}\,x^{k_{2n+1}}).$$

Un calcul facile donne que

$$P(x)=\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n}x^{k_{2n}}(1-x^{k_{2n+1}})+\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}(x^{k_{2n}}-x^{k_{2n+1}})\right).$$

Nous allons montrer que, pour $x\to 1$, $P(x)$ ne reste pas borné. En effet, posons $x=1-\dfrac{1}{k_N}$ et faisons aller N à l'infini. Comme chaque facteur de $P(x)$ est plus grand que 1, on aura

$$P(x)>\prod_1^{N}\left(1+\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n}x^{k_{2n}}\;(1-x^{k_{2n+1}})+\frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}(x^{k_{2n}}-x^{k_{2n+1}})\right)\geqq$$

$$\geqq\prod_1^{N}\left(1+\frac{\varepsilon_n^2}{1+\varepsilon_n}x^{k_{2n}}\,(1-x^{k_{2n+1}})\right).$$

De plus $\varepsilon_n<1$, puisque $M_n>1$;

$$x^{k_{2n}}=\left(1-\frac{1}{k_{2N+1}}\right)^{k_{2n}}\geqq\frac{1}{4}$$

et

$$1-x^{k_{2n+1}}=(1-x)\;(1+x+x^2+\ldots+x^{k_{2n+1}-1})>$$

$$>\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}\left(1-\frac{1}{k_{2N+1}}\right)^{k_{2N+1}}>\frac{1}{4}\,\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}.$$

En nous servant de l'inégalité $\Pi(1+u_n)>\Sigma\, u_n$ $(u_n>0)$ et de celles qui précèdent, nous obtenons que

$$P(x)>\prod_1^{N}\left(1+\frac{\varepsilon_n^2}{32}\,\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}\right)>\sum_1^{N}\frac{\varepsilon_n^2}{32}\,\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}>$$

$$>\sum_1^{N}\frac{\varepsilon_N^2}{32}\,\frac{k_{2n+1}}{k_{2N+1}}=\frac{\varepsilon_N^2}{32}\left(M_N-\frac{k_1}{k_{2N+1}}\right)>\frac{\varepsilon_N^2}{64}\,M_N.$$

Choisissons N de sorte que $M_N\geqq M_n$ pour tous les $n<N$ (comme $\lim M_n=\infty$ il y a une infinité de tels N). Pour de tels N on a précisément $M_N=\dfrac{1}{\varepsilon_N^3}$, donc

$$P(x)>\frac{1}{64\,\varepsilon_N}.$$

Comme $\varepsilon_N\to 0$ pour $N\to\infty$, le produit $P(x)$ n'est pas borné pour $x\to 1$.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 2. Les inégalités (4), (7) et (8) assurent que toujours que $a_n\neq -1$ $(n=1,2,\ldots)$ et $a_n\to 0$,

$$\frac{P(x)}{\prod\limits_{1}^{N}(1+a_n)} \to 1$$

pour $x \to 1$, x parcourant les valeurs $1-\frac{1}{k_N}$, avec $N \to \infty$. Comme de plus $P(x) \to p \neq 0$, il vient que $\prod\limits_{1}^{N}(1+a_n) \to p$, ce qu'il fallait démontrer.

Il nous reste à prouver que l'hypothèse $a_n \neq -1$ est toujours remplie. Supposons que $a_\nu = -1$ et posons $Q(x) = \prod\limits_{n \neq \nu}(1+a_n x^{k_n})$; alors $P(x) = (1-x^{k_\nu})\, Q(x) \to p$ et comme $\frac{1-x^{k_\nu}}{1-x} \to k_\nu$ pour $x \to 1$, il résulte que $(1-x)\, Q(x) \to \frac{p}{k_\nu}$. D'autre part, nous allons montrer que $(1-x)\, Q(x) \to 0$. Comme $a_n \to 0$, il y a un $m > \nu$ de sorte que

$$1+|a_n| < 2^{\frac{1}{4K}}$$

pour tout $n > m$. Faisons la décomposition

$$Q(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq \nu}}^{m}(1+a_n x^{k_n}) \prod_{m+1}^{N}(1+a_n x^{k_n}) \prod_{N+1}^{\infty}(1+a_n x^{k_n})$$

et choisissons N de sorte que $1-\frac{1}{k_N} \leqq x \leqq 1-\frac{1}{k_{N+1}}$; alors le premier des trois produits reste évidemment inférieur à une constante M_1 et, de par (8), le troisième reste inférieur à une constante M_2. Quant au second, une évaluation grossière donne

$$\prod_{m+1}^{N}(1+a_n x^{k_n}) < \prod_{m+1}^{N}(1+|a_n|) < 2^{\frac{N}{4K}}$$

d'où, grace à la limitation posée de x et à l'inégalité (3),

$$|(1-x)Q(x)| < M_1 M_2 \frac{2^{\frac{N}{4K}}}{k_N} < M_1 M_2 \frac{2^{\frac{N}{4K}}}{2^{\left[\frac{N}{2K}\right]}} < M_1 M_2 \frac{2^{\frac{N}{4K}}}{2^{\frac{N}{2K}-1}} = \frac{2M_1M_2}{2^{\frac{N}{4K}}}.$$

Il s'ensuit pour $N \to \infty$ et $x \to 1$ que

$$(1-x)\, Q(x) \to 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(Reçu le 11 janvier 1943)