Die Lage der A-Stellen eines Polynoms bezüglich seiner Nullstellen.

Von GYULA SZ. NAGY in Szeged.

1. Von J. L. WALSH[1]) rührt der folgende Satz her:

Liegt jede Nullstelle des Polynoms

$$f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\ldots+c_n \qquad (n\geqq 2)$$

in einer Kreisscheibe K vom Mittelpunkt ζ und vom Halbmesser r, so enthält die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_h $(h=1,2,\ldots,n)$ vom Halbmesser r, deren Mittelpunkte die n Punkte

$$\zeta_h=\zeta+\left|\sqrt[n]{A}\right|e^{\frac{2\pi i}{n}h} \qquad (h=1,2,\ldots,n)$$

sind, jede A-Stelle von $f(z)$ (d. h. jede Nullstelle des Polynoms $f(z)-A$).

Dieser Satz wurde von WALSH aus dem bekannten Graceschen Satz über die symmetrischen multilinearen Gleichungen hergeleitet.

2. Wir beweisen den Satz

I. *Das Polynom*

$$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) \tag{1}$$

besitzt in jeder Kreisscheibe K_h

$$|z-z_h|\leqq\varrho=\left|\sqrt[n]{A}\right| \qquad (h=1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

mindestens eine A-Stelle.

Die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_n enthält jede A-Stelle des Polynoms $f(z)$. Haben die n Kreisscheiben K_h einen Bereich gemeinsam, so besitzt das Polynom $f(z)$ in keinem inneren Punkte dieses Bereiches eine A-Stelle.

Bezeichnen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die A-Stellen des Polynoms $f(z)$, so ist

$$f(z)-A=(z-a_1)(z-a_2),\ldots(z-a_n).$$

Wäre nun jede A-Stelle von $f(z)$ außerhalb der Kreisscheibe K_p $(1\leqq p\leqq n)$ gelegen, so beständen die Ungleichungen

$$|z_p-a_h|>\varrho \qquad (h=1,2,\ldots,n).$$

---

1) J. L. WALSH, On the location of the roots of certain types of polynomials *Transactions of the American Math. Society,* **24** (1922), S. 163—180, insbes. S. 173.

Daraus folgt, daß

$$|f(z_p)-A|=|A|=|(z_p-a_1)(z_p-a_2)\ldots(z_p-a_n)|>\varrho^n=|A|$$

ist. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des ersten Teiles vom Satz I.

Wäre nun die A-Stelle a_p ausserhalb bzw. innerhalb jedes Kreises K_h gelegen, so beständen die Ungleichungen

$$|a_p-z_p|>0 \quad \text{bzw.} \quad |a_p-z_h|<\varrho \qquad (h=1,2,\ldots,n),$$

woraus die Ungleichung

$$|f(a_p)|=|(a_p-z_1)(a_p-z_2)\ldots(a_p-z_n)|<\varrho^n=|A| \text{ bzw. } |f(a_p)|<\varrho^n=|A|$$

folgt. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des zweiten Teiles vom Satz I.

Aus Satz I folgen die Sätze:

II. *Enthält die Punktmenge $\mathfrak{M}$ jede Nullstelle des Polynoms*

$$f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\ldots+c_n, \tag{3}$$

ist $|A|=\varrho^n$ und bedeutet $\mathfrak{M}'$ die Punktmenge derjenigen Kreisscheiben vom Halbmesser ϱ, deren Mittelpunkte zu $\mathfrak{M}$ gehören, so enthält die Punktmenge $\mathfrak{M}'$ jede A-Stelle des Polynoms $f(z)$. Haben diese Kreisscheiben einen Bereich $\mathfrak{M}''$ gemeinsam, so ist kein innerer Punkt von $\mathfrak{M}''$ eine A-Stelle von $f(z)$.

III. *Liegt jede Nullstelle des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades von der Form (3) in der Kreisscheibe $|z-\zeta|\leqq r$ und ist $|A|=\varrho^n$, so liegt jede A-Stelle des Polynoms $f(z)$ in der Kreisscheibe $|z-\zeta|\leqq\varrho+r$. Ist nun $|A|=\varrho^n>r^n$, so liegt jede A-Stelle von $f(z)$ im Kreisring $\varrho-r\leqq|z-\zeta|\leqq\varrho+r$.*

3. Der Hauptsatz dieser Arbeit ist der folgende:

IV. *Bedeuten $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_n$ beliebige der Gleichung*

$$\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n=|A| \tag{4}$$

genügende positive Zahlen und bezeichnet K_h $(h=1,2,\ldots n)$ den Kreis

$$|z-z_h|=\varrho_h \qquad (h=1,2,\ldots,n), \tag{5}$$

so liegt keine A-Stelle des Polynoms

$$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) \qquad (n\geqq 2) \tag{6}$$

außerhalb jedes Kreises K_h oder innerhalb jedes Kreises K_h $(h=1,2,\ldots n)$.

Die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_h enthält jede A-Stelle des Polynoms $f(z)$ und auch jede B-Stelle, wenn $|B|\leqq|A|$ ist.

Haben die n Kreisscheiben K_h einen Bereich $\mathfrak{B}'$ gemeinsam, so liegt keine A-Stelle des Polynoms $f(z)$ innerhalb von $\mathfrak{B}'$. [Dies gilt aber nicht für jede B-Stelle ($|B|<|A|$).]

Bilden p $(1\leqq p\leqq n)$ der n Kreisscheiben K_h $(h=1,2,\ldots,n)$ einen (zusammenhängenden oder nicht zusammenhängenden) Bereich $\mathfrak{B}$, der *mit keiner der übrigen $n-p$ Kreisscheiben K_h einen Punkt gemeinsam hat, so enthält $\mathfrak{B}$ genau p solche B-Stellen, für welche $|B| \leqq |A|$ ist.*

Dieser Satz läßt sich im allgemeinen nicht verschärfen.

Wir nehmen zum Beweis an, daß a eine solche A-Stelle von $f(z)$ ist, die außerhalb oder innerhalb jedes Kreises K_h $(h=1, 2, \ldots, n)$ liegt. Es gelten also die Ungleichungen

$$|a-z_h| > \varrho_h \quad \text{bzw.} \quad |a-z_h| < \varrho_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

woraus

$$|A| = |f(a)| = |(a-z_1)(a-z_2)\ldots(a-z_n)| > \varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n = |A|$$
$$\text{bzw.} \quad |A| = |f(a)| < \varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n = |A|$$

ist. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des ersten Absatzes von IV.

Die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_h enthält also jede A-Stelle von $f(z)$ und auch jede B-Stelle $(|B| \leqq |A|)$. Es gibt nämlich eine positive Zahl u $(0 < u \leqq 1)$, so daß $|B| = u^n|A| = u\varrho_1 u\varrho_2 \ldots u\varrho_n$ ist. Die Kreisscheibe K_h enthält die Kreisscheibe $K_h(u)$

$$(7) \qquad |z-z_h| \leqq u\varrho_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n;\ 0 < u \leqq 1).$$

Die Gesamtheit der n Kreisscheiben K_h enthält also die n Kreisscheiben $K_h(u)$ und damit jede B-Stelle von $f(z)$.

Wir nehmen zum Beweis des dritten Absatzes von IV an, daß der Bereich $\mathfrak{B}$ aus den Kreisscheiben $K_1, K_2, \ldots, K_p$ besteht. Der aus den Kreisscheiben $K_1(u), K_2(u), \ldots, K_p(u)$ $(0 < u \leqq 1)$ bestehende Bereich $\mathfrak{B}(u)$ ist ein Teil von $\mathfrak{B}$.

Während eine Zahl Z sich von A ausgehend nach B und dann nach Null stetig so nähert, daß inzwischen $|Z|$ monoton abnimmt, bewegen sich die Z-Stellen von $f(z)$ stetig und kann keine Z-Stelle die Begrenzung des entsprechenden Bereichs $\mathfrak{B}(u)$ $\left[u = \left|\sqrt[n]{\frac{Z}{A}}\right| < 1\right]$ und noch weniger die Begrenzung von $\mathfrak{B}$ übertreten. Widrigenfalls hätte nämlich das Polynom $f(z)$ eine Z-Stelle außerhalb der zugehörigen n Kreise $K_h(u)$, $u = \left|\sqrt[n]{\frac{Z}{A}}\right|$. Dies ist aber nach dem ersten Absatz von IV unmöglich. Daraus folgt, daß $f(z)$ in $\mathfrak{B}$ genau soviel A-Stellen, wie B-Stellen $(|B| \leqq |A|)$, oder Nullstellen besitzt.

Ist a eine A-Stelle von $f(z)$ und sind

$$\varrho_h = |a-z_h| \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

so ist $\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n = |A|$ und der Punkt a ist ein gemeinsamer Punkt der n Kreise K_h. Daraus folgt die Richtigkeit des letzten Absatzes von IV.

4. Wählt man die der Gleichung (4) genügenden Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ oder mindestens ihre Aufeinanderfolge auf eine andere Weise, so erhält man wieder n Kreisscheiben K_h, deren Gesamtheit jede B-Stelle des Polynoms $f(z)$ enthält, wenn $|B| \leqq |A|$ ist.

Daraus folgt der Satz:

V. *Bezeichnet $\mathfrak{M}_1$ eine aus dem im Satz* IV *bestimmten Kreisscheiben $K_1, K_2, \ldots, K_n$ bestehende Punktmenge und sind $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ verschiedene Punktmengen derselben Art, die zu verschiedenen Lösungen der Gleichung* (4), *oder zu verschiedenen Aufeinanderfolgen der Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ von derselben Lösung gehören, und ist $\mathfrak{M}^*$ der Durchschnitt der Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$, so enthält auch die Punktmenge $\mathfrak{M}^*$ jede B-Stelle des Polynoms $f(z)$, sobald $|B| \leqq |A|$ ist.*

Läßt man aus der Punktmenge $\mathfrak{M}_i$ der n Kreisscheiben $K_1^{(i)}, K_2^{(i)}, \ldots, K_n^{(i)}$ die Menge der Punkte weg, die für jeden Kreis $K_h^{(i)}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ innere Punkte sind, so enthält auch die übrigbleibende Punktmenge jede A-Stelle des Polynoms $f(z)$.

5. Man kann den folgenden Satz ebenso beweisen, wie den Satz IV:

VI. *Bedeuten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ beliebige, der Gleichung*

$$\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n = |A| \qquad (n = 2p + q,\ p \geqq 1,\ q \geqq 0)$$

genügende positive Zahlen und bezeichnet C_h bzw. K_j den (von einer Cassinischen Kurve begrenzten) Bereich

$$|(z - z_{2h-1})(z - z_{2h})| \leqq \varrho_{2h-1} \varrho_{2h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

bzw. die Kreisscheibe

$$|z - z_{2p+j}| \leqq \varrho_{2p+j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

so enthält die Gesamtheit der Bereiche $C_1, C_2, \ldots, C_p, K_1, K_2, \ldots, K_q$ jede A-Stelle des Polynoms

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

und auch jede B-Stelle, wenn $|B| \leqq |A|$ ist.

6. Die Sätze IV und V lassen sich leicht auf die Untersuchung der Lage der Wurzeln von algebraischen Gleichungen anwenden. So erhält man z. B.[2]:

Jede trinomische Gleichung von der Form

$$z^5 - 16 z^3 + A = 0, \qquad |A| \leqq 8$$

---

[2]) GYULA SZ. NAGY, Összefüggések a polinomok zérushelyei és A-helyei között és alkalmazásuk algebrai egyenletek gyökei helyzetének vizsgálatára (ungarisch mit deutschem Auszug: Relationen zwischen den Nullstellen und A-Stellen der Polynome und ihre Anwendung auf die Untersuchung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen), *Múzeumi Füzetek, Kolozsvár,* 1 (1943), S. 132—152.

hat in den Kreisringen

$$0{\cdot}015 \leqq |z \pm 4| \leqq 0{\cdot}016 \text{ bzw. } 0{\cdot}793 \leqq |z| \leqq 0{\cdot}805$$

je eine bzw. je drei Wurzeln.

Hier ist

$$f(z) = z^5 - 16\,z^3 = z^3\,(z+4)\,(z-4).$$

7. Es gilt auch der folgende Satz:

VII. *Enthält der Konvexbereich* $\mathfrak{B}$ *jede Nullstelle des Polynoms*

$$f(z) = (z-z_1)\,(z-z_2)\dots(z-z_n),$$

ist ferner arc $A = \alpha$ *und bezeichnet endlich* S_k *den Parallelstreifen, der von* $\mathfrak{B}$ *während seiner in der Richtung* $\gamma_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ *stattfindenden Parallelverschiebung überstrichen wird, so enthält die Gesamtheit der Parallelstreifen* $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ *jede* A*-Stelle des Polynoms* $f(z)$.

Bezeichnet S^* die aus den Streifen $S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ bestehende Punktmenge, so entsteht S^* offenbar so, daß man aus der komplexen Ebene gewisse n Winkelräume W_k von der Öffnung $\frac{2\pi}{n}$ wegläßt. Die Schenkel des Winkelraumes W_k bilden mit der positiven reellen Achse die Winkel γ_k und γ_{k+1}.

Der Scheitelwinkelraum W_k' von W_k enthält offenbar den Konvexbereich $\mathfrak{B}$ und damit jede Nullstelle des Polynoms $f(z)$.

Wir nehmen zum Beweis des Satzes an, daß eine A-Stelle a des Polynoms $f(z)$ im Innern von W_k liegt.

Wird nun der Anfangspunkt z_i des Wektors $\overrightarrow{z_i a}$ durch eine Parallelverschiebung in den gemeinsamen Scheitel von W_k und W_k' überführt, so wird der Endpunkt des Vektors $\overrightarrow{z_i a}$ in das Innere von W_k gelangen. Daraus folgt, daß

$$\gamma_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k < \operatorname{arc}(a - z_i) < \gamma_{k+1} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}(k+1) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und

$$n\gamma_k = \alpha + 2\pi k < \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arc}(a - z_i) = \operatorname{arc} f(a) < n\gamma_{k+1} = \alpha + 2\pi(k+1).$$

Hieraus folgt, daß $\operatorname{arc} f(a) \not\equiv \operatorname{arc} A = \alpha \pmod{2\pi}$ und somit $f(a) \neq A$. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes VII.

(Eingegangen am 18. April 1945.)