Eine Bemerkung zur Auflösung der eingeschachtelten Rekursion.

Von PAUL CSILLAG (†) in Budapest.

Man versteht unter einer rekursiven Funktion eine zahlentheoretische Funktion, die sich aus den Ausgangsfunktionen 0 und $n+1$ mittels einer endlichen Kette von Substitutionen und Rekursionen aufbauen läßt. Der Begriff der Rekursion kann dabei in verschiedener Weise definiert werden. Man sagt z. B., daß eine Funktion $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ durch *eingeschachtelte* Rekursion aus gewissen Funktionen entsteht, falls zunächst $\varphi(0, a_1, \ldots, a_r)$ als eine dieser Funktionen, ferner für $\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r)$ ein Ausdruck angegeben ist, der aus den gegebenen Funktionen und aus $\varphi(n, a_1, \ldots, a_r)$ als Funktion von $a_1, \ldots, a_r$, unter Festhaltung von n in der ersten Argumentstelle, durch Substitutionen aufgebaut wird. So können in der Definition auch eingeschachtelte Funktionswerte vorkommen, z. B.

$$\varphi(n+1, a) = \beta(n, a, \varphi(n, \varphi(n, a))).$$

RÓZSA PÉTER hat in ihren Untersuchungen über den Zusammenhang der verschiedenen Rekursionsbegriffe gezeigt[1]), daß sich eine solche Einschachtelung immer auflösen läßt, d. h., wird eine Funktion durch eine Kette von Substitutionen und eingeschachtelte Rekursionen aus 0 und $n+1$ aufgebaut, so kann sie auch mittels Substitutionen und uneingeschachtelte Rekursionen definiert werden. Diesen Beweis hat R. PÉTER in einer späteren Arbeit[2]) vereinfacht; nun möchte ich zeigen, daß er durch gleichzeitige Anwendung auf eine geeignet gewählte

(†) PAUL CSILLAG ist am 24. Dezember 1944 an einer jahrelang andauernden, durch die Kriegszeiten und die erlittene Verfolgung erschwerten, Krankheit gestorben. Vorliegende Arbeit wurde aus seinem Nachlaße von Frl. RÓZSA PÉTER unter Presse geordnet. (Bemerkung der Redaktion.)

[1]) R. PÉTER (POLITZER), Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen,* **110** (1934), S. 612—632.

[2]) PÉTER R., A rekurziv függvények elméletéhez, *Math. és Fiz. Lapok,* **42** (1935), S. 25—49 (ungarisch, mit deutschem Auszug). Diese Arbeit werde ich als bekannt voraussetzen.

spezielle Funktion noch übersichtlicher gemacht werden kann: sämtliche im Beweis teilnehmende rekursive Funktionen werden eben von der betreffenden speziellen Funktion geliefert.

Von nun an werde ich solche Funktionen rekursiv nennen, die sich ohne Anwendung von eingeschachtelten Funktionswerten definieren lassen.

Betrachten wir nun eine eingeschachtelte Rekursion. Wie R. PÉTER gezeigt hat, kann man sich dabei auf die Definition einer zweistelligen Funktion $\varphi(n, a)$ beschränken[3]), sogar mit der Normierung[3])

$$\varphi(0, a) = 1,$$

und sonst von folgender (von der Péterschen Bezeichnung unwesentlich abweichender) Form:

$$\varphi(n+1, a) = \beta_l(n, a, \varphi_1, \ldots, \varphi_l),$$

wobei für $i = 1, 2, \ldots, l$

$$\varphi_i = \varphi_i(n, a) = \varphi(n, \beta_{i-1}(n, a, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{i-1}))$$

und $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l$ rekursive Funktionen sind.

Der Wert von $\varphi(n+1, a)$ läßt sich hier sukzessive aus folgenden eingeschachtelten Werten berechnen:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_0(n, a),\\
\varphi_1 &= \varphi(n, \beta_0(n, a)),\\
&\beta_1(n, a, \varphi_1),\\
\varphi_2 &= \varphi(n, \beta_1(n, a, \varphi_1)),\\
&\beta_2(n, a, \varphi_1, \varphi_2),\\
\varphi_3 &= \varphi(n, \beta_2(n, a, \varphi_1, \varphi_2)),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_l &= \varphi(n, \beta_{l-1}(n, a, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{l-1})),\\
\varphi(n+1, a) &= \beta_l(n, a, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l).
\end{aligned}\right\} (K)$$

Der Gedanke der Auflösung dieser Einschachtelungen ist, daß eine rekursive Funktion $\psi(n, a)$ definiert wird, welche, für beliebige $n_1, n_2, \ldots, n_{i+1}, a$ und $i = 0, 1, 2, \ldots, l$, an der Stelle $n = p_0^i\, p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \ldots p_{i+1}^{n_{i+1}}$ den Wert $\beta_i(n_1, a, \psi(n_2, a), \ldots, \psi(n_{i+1}, a))$ annimmt, wo $p_0 = 2$ und p_k die k-te ungerade Primzahl bedeutet. Als Anfangswert $\psi(0, a)$ kann die 0 gewählt werden und die Funktionen $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l$ werden in einer Funktion β_n zusammengefaßt, wo $\beta_n = 1$ für $n > l$ ist. Man kann nun zeigen, daß es eine rekursive Funktion $\omega(n)$ gibt, sodaß für alle n

$$\varphi(n, a) = \psi(\omega(n), a).$$

In dieser Auflösung spielen die speziellen rekursive Funktionen $\gamma_i = p_0^i\, p_1^n\, p_2^{n_1} \ldots, p_{i+1}^{n_i}\, p_{i+2}^a$ eine wichtige Rolle. Auch diese können als β'

[3]) R. PÉTER, Über die mehrfache Rekursion, *Math. Annalen*, 113 (1936), S. 489–527, insbesondere S. 496–497.

gewählt werden, und eben dies ist jener Spezialfall, den ich mit dem allgemeinen parallel laufend betrachten werde.

Es sei also

$$\beta(i, n, a, y_1, \ldots, y_l) = \begin{cases} \beta_i(n, a, y_1, \ldots, y_i) & \text{falls } i \leqq l, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und entsprechend

$$\gamma(i, n, a, y_1, \ldots, y_l) = \begin{cases} \gamma_i(n, a, y_1, \ldots, y_i) = p_0^i p_1^n p_2^{y_1} \ldots p_{i+1}^{y_i} p_{i+2}^a & \text{falls } i \leqq l, \\ 1 & \text{sonst}; \end{cases}$$

ferner sei

$$\psi(0, a) = 0,$$
$$\psi(n, a) = \beta(\nu_0, \nu_1, a, \psi(\nu_2, a), \ldots, \psi(\nu_{l+1}, a)) \quad \text{für } n > 0$$

und entsprechend

$$\tau(0, a) = 0,$$
$$\tau(n, a) = \gamma(\nu_0, \nu_1, a, \tau(\nu_2, a), \ldots, \tau(\nu_{l+1}, a)) \quad \text{für } n > 0,$$

wo $n = p_0^{\nu_0} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots$, also $\nu_i = \pi_i(n)$ den Exponenten von p_i in der Primfaktorenzerlegung von n bedeutet. Da die in den Definitionen vorkommenden Exponenten von n mit den entsprechenden Exponenten von $\gamma(\nu_0, \nu_1, x, \nu_2, \ldots, \nu_{l+1})$ bei beliebigem x übereinstimmen, gilt für alle $n > 0$, x beliebig:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(n, a) = \beta(\nu_0, \nu_1, a, \psi(\nu_2, a), \ldots, \psi(\nu_{l+1}, a)) = \psi(\gamma(\nu_0, \nu_1, x, \nu_2, \ldots, \nu_{l+1}), a) \\ &\text{und} \\ &\tau(n, a) = \gamma(\nu_0, \nu_1, a, \tau(\nu_2, a), \ldots, \tau(\nu_{l+1}, a)) = \tau(\gamma(\nu_0, \nu_1, x, \nu_2, \ldots, \nu_{l+1}), a). \end{aligned}\right\} (*)$$

Daraus folgt die entscheidende „auflösende Eigenschaft" der Funktion $\psi(n, a)$: für alle v ist

$$\psi(n, \psi(v, a)) = \psi(\tau(n, v), a).$$

Denn für $n = 0$ ergibt sich das aus

$$\psi(0, \psi(v, a)) = 0 = \psi(\tau(0, v), a);$$

gilt ferner die Behauptung bereits für alle Werte kleiner als ein $n > 0$, so ist (da in (*) statt x auch v gesetzt werden kann)

$$\begin{aligned} \psi(n, \psi(v, a)) &= \beta(\nu_0, \nu_1, a, \psi(\nu_2, \psi(v, a)), \ldots, \psi(\nu_{l+1}, \psi(v, a))) = \\ &= \beta(\nu_0, \nu_1, a, \psi(\tau(\nu_2, v), a), \ldots, \psi(\tau(\nu_{l+1}, v), a)) = \\ &= \psi(\gamma(\nu_0, \nu_1, v, \tau(\nu_2, v), \ldots, \tau(\nu_{l+1}, v)), a) = \\ &= \psi(\tau(n, v), a), \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung auch für n, und so auch allgemein.

Nun werde ich dieselbe Einschachtelungskette, aus welcher sich der Funktionswert $\varphi(n+1, a)$ aufbaut, auf die Funktion $\psi(n, a)$ — vorläufig auf einer unbestimmt gehaltenen Stelle b statt n — anwenden.

Sei also

$$\left.\begin{array}{ll}\beta^{(0)}=\beta^{(0)}(n,b,a)=\beta_0(n,a), & \psi_1=\psi_1(n,b,a)=\psi(b,\beta^{(0)}),\\ \beta^{(1)}=\beta^{(1)}(n,b,a)=\beta_1(n,a,\psi_1), & \psi_2=\psi_2(n,b,a)=\psi(b,\beta^{(1)}),\\ \dots\quad\dots\quad\dots & \dots\quad\dots\quad\dots\\ \beta^{(l-1)}=\beta^{(l-1)}(n,b,a)=\beta_{l-1}(n,a,\psi_1,\dots,\psi_{l-1}), & \psi_l=\psi_l(n,b,a)=\psi(b,\beta^{(l-1)}),\\ \beta^{(l)}\;=\beta^{(l)}(n,b,a)\;=\beta_l(n,a,\psi_1,\dots,\psi_l) & \end{array}\right\}(K^*)$$

und entsprechend

$$\begin{array}{ll}\gamma^{(0)}=\gamma^{(0)}(n,b,a)=\gamma_0(n,a), & \tau_1=\tau_1(n,b,a)=\tau(b,\gamma^{(0)}),\\ \dots\quad\dots\quad\dots & \dots\quad\dots\quad\dots\\ \gamma^{(l-1)}=\gamma^{(l-1)}(n,b,a)=\gamma_{l-1}(n,a,\tau_1,\dots,\tau_{l-1}), & \tau_l=\tau_l(n,b,a)=\tau(b,\gamma^{(l-1)}),\\ \gamma^{(l)}\;=\gamma^{(l)}(n,b,a)\;=\gamma_l(n,a,\tau_1,\dots,\tau_l). & \end{array}$$

Mit Hilfe der letzteren lassen sich sämtliche Zwischenwerte der Einschachtelung als Werte der Funktion $\psi(n,a)$ ausdrücken wie folgt:

$$\beta^{(i)}(n,b,a)=\psi(\gamma^{(i)}(n,b,0),\ a)\qquad \text{für } i=0,1,2,\dots,l$$

und

$$\psi_i(n,b,a)=\psi(\tau_i(n,b,0),\ a)\qquad \text{für } i=1,2,\dots,l.$$

Es ist nämlich (da in (*) statt x auch 0 gesetzt werden kann)

$$\beta^{(0)}(n,b,a)=\beta_0(n,a)=\beta(0,n,a,0,\dots,0)=\beta(0,n,a,\psi(0,a),\dots,\psi(0,a))=$$
$$=\psi(\gamma(0,n,0,0,\dots,0),a)=\psi(\gamma_0(n,0),a)=\psi(\gamma^{(0)}(n,b,0),a)$$

und demnach

$$\psi_1(n,b,a)=\psi(b,\psi(\gamma^{(0)}(n,b,0),a))=\psi(\tau(b,\gamma^{(0)}(n,b,0)),a)=$$
$$=\psi(\tau_1(n,b,0),a).$$

Angenommen nun, daß unsere Behauptungen für alle $\beta^{(k)}$ mit $k=0,1,\dots,i-1$ und für alle ψ_k mit $k=1,2,\dots,i$ bereits bewiesen sind, wo $i\leqq l$, es wird (statt x in (*) wieder 0 gesetzt)

$$\beta^{(i)}(n,b,a)=\beta_i(n,a,\psi_1,\dots,\psi_i)=$$
$$=\beta_i(n,a,\psi(\tau_1(n,b,0),a),\dots,\psi(\tau_i(n,b,0),a))=$$
$$=\beta(i,n,a,\psi(\tau_1(n,b,0),a),\dots,\psi(\tau_i(n,b,0),a),\psi(0,a),\dots,\psi(0,a))=$$
$$=\psi(\gamma(i,n,0,\tau_1(n,b,0),\dots,\tau_i(n,b,0),0,\dots,0),a)=$$
$$=\psi(\gamma_i(n,0,\tau_1(n,b,0),\dots,\tau_i(n,b,0)),a)=$$
$$=\psi(\gamma^{(i)}(n,b,0),a)$$

und demnach, falls $i<l$,

$$\psi_{i+1}(n,b,a)=\psi(b,\beta^{(i)}(n,b,a))=\psi(b,\psi(\gamma^{(i)}(n,b,0),a))=$$
$$=\psi(\tau(b,\gamma^{(i)}(n,b,0)),a)=\psi(\tau_{i+1}(n,b,0),a).$$

Für $i=l$ ergibt unsere Behauptung

$$\beta^{(l)}(n,b,a)=\beta_l(n,a,\psi_1,\dots,\psi_l)=\psi(\gamma^{(l)}(n,b,0),a).$$

Demzufolge läßt sich die rekursive Funktion $\omega(n)$, für welche

$$\varphi(n,a)=\psi(\omega(n),a),$$

mit einem geeigneten Anfangswert durch

$$\omega(n+1) = \gamma^{(l)}(n, \omega(n), 0)$$

definieren. Damit auch

$$\psi(\omega(0), a) = \varphi(0, a) = 1$$

sein soll, sei z. B.

$$\omega(0) = 2^{l+1},$$

nach den Definitionen ist ja

$$\psi(2^{l+1}, a) = \beta(l+1, 0, a, 0, \ldots, 0) = 1.$$

Nehmen wir an, daß für ein n bereits

$$\varphi(n, a) = \psi(\omega(n), a).$$

Dann kann in der Einschachtelungskette (K) für $\varphi(n, \ldots)$ überall $\psi(\omega(n), \ldots)$ gesetzt werden. Damit geht aber (K) in die Einschachtelunskette (K^*) der Werte $\psi(b, \ldots)$ für $b = \omega(n)$ über. Diese endet mit

$$\psi(\gamma^{(l)}(n, \omega(n), 0), a) = \psi(\omega(n+1), a)$$

und so ist

$$\varphi(n+1, a) = \psi(\omega(n+1), a), \qquad \text{q. e. d.}$$

Da nun sämtliche benutzte Hilfsfunktionen, und so auch $\psi(n, a)$ und $\omega(n)$ rekursiv sind, so läßt sich die eingeschachtelte Rekursion für $\varphi(n, a)$ tatsächlich in eine Definition ohne Einschachtelungen auflösen.

(Eingegangen am 9. März 1946.)