Über die allgemeinen Lemniskaten.

Von GYULA SZ. NAGY in Szeged.

§. 1. Einleitung.

Die allgemeine *Lemniskate* $L_n(\varrho)$ n-ten Grades oder kurz L_n ist der Ort der Punkte in einer Ebene, deren Abstände von n festen Punkten der Ebene ein konstantes Produkt ϱ^n ergeben. Die festen Punkte sind die *Mittelpunkte* (Pole, oder Brennpunkte), ϱ ist der *Radius* der Lemniskate. Ein Mittelpunkt ist p-fach, wenn er unter den Mittelpunkten p-mal vorkommt. Die voneinander verschiedenen Mittelpunkte sind die *Kerne* der Lemniskate. Eine Lemniskate n-ten Grades hat also höchstens n Kerne. Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ mit nur einem Kern ist ein (n-facher) Kreis. Wir nehmen im folgenden an, daß die Lemniskate mindestens zwei Kerne besitzt. Dann sind die Kurven $L_2(\varrho)$ Cassinische Kurven. Bezeichnet $2r$ den Abstand der Kerne einer Kurve $L_2(\varrho)$, so ist die Kurve $L_2(r)$ eine Bernoullische Lemniskate.

Besitzen die Lemniskaten $L_n(\varrho)$ und $L_n(\varrho')$ dieselben Mittelpunkte (und hat jeder Mittelpunkt für beide Lemniskaten dieselbe Vielfachheit), so sind die Lemniskaten *konzentrisch* (oder konfokal). Unter den konzentrischen Lemniskaten $L_n(\varrho)$ gibt es eine *uneigentliche* Kurve, und zwar die Kurve $L_n(0)$, die aus isolierten Punkten, aus den Mittelpunkten der eigentlichen Lemniskaten $L_n(\varrho)$ $(\varrho > 0)$ besteht.

Bezeichnen $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die Mittelpunkte einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ und ist $z = x + iy$ ein beliebiger Punkt von $L_n(\varrho)$, so wird die Lemniskate durch die Gleichung

$$(1) \qquad |f(z)| \equiv |(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)| = \varrho^n$$

oder

$$(2) \qquad |f(z)|^2 \equiv f(z) \cdot \overline{f(z)} \equiv \prod_{k=1}^{n}(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k) \equiv \prod_{k=1}^{n}|z-z_k|^2 \equiv$$
$$\equiv \prod_{k=1}^{n}\left[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2\right] = \varrho^{2n}$$

dargestellt. Setzt man

$$(3) \qquad f(x+iy) = U(x,y) + i\,V(x,y)$$

so kann die Gleichung (2) auch in der Form

$$(4) \qquad U^2(x,y) + V^2(x,y) - \varrho^{2n} = 0$$

geschrieben werden.

Eine Lemniskate n-ten Grades ist der Ort der Punkte z in der komplexen Ebene, in denen der absolute Betrag eines Polynoms n-ten Grades derselbe ist. Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Mittelpunkte der Lemniskate. Durch einen beliebigen Punkt ζ geht eine und nur eine der konzentrischen Lemniskaten.

Die durch den Punkt ζ gehende und mit (1) konzentrische Lemniskate besitzt nämlich die Gleichung

$$|f(z)| = |f(\zeta)|. \tag{5}$$

Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist nach (2) und (4) eine n-fach zirkuläre algebraische Kurve $2n$-ter Ordnung, weil die zyklischen (absoluten) Punkte für sie n-fache Punkte sind. Sie besitzt also mit einem Kreis höchstens $2n$ reelle Punkte gemeinsam.

Die geometrische bzw. *zyklische Ordnung* einer (reellen) ebenen Kurve bedeutet die Maximalanzahl der reellen Punkte, in denen die Kurve von einer Geraden bzw. von einem Kreis der Ebene getroffen werden kann. Es gilt also der Satz:

I. *Die geometrische und auch die zyklische Ordnung einer Lemniskate n-ten Grades ist höchstens $2n$ gleich.*

Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ $2n$-ter geometrischer Ordnung besitzt offenbar auch die zyklische Ordnung $2n$. Die geometrische Ordnung einer Lemniskate $2n$-ter zyklischer Ordnung kann aber kleiner als $2n$ sein.

Ist $f_0(z)$ ein Polynom ν-ten Grades und ist

$$f(z) = [f_0(z)]^k \quad (n = k\nu, k > 1), \tag{6}$$

so stimmt die Lemniskate (1) mit der k-fach gerechneten Lemniskate

$$|f_0(z)| = \varrho^\nu$$

überein. Wir nehmen im folgenden an, daß das Polynom $f(z)$ keine Darstellung von der Form (6) besitzt.

Besitzt die Lage der Mittelpunkte einer Lemniskate eine Symmetrie in bezug auf eine Gerade oder auf einen Punkt, so besitzt auch die Lemniskate diese Symmetrie. Die Lemniskate $L_n(\varrho)$ heißt *regelmäßig*, wenn ihre Mittelpunkte die Ecken einer regelmäßigen n-Ecks sind. Die Gleichung einer regelmäßigen Lemniskate hat also die Form

$$|(z-a)^n - b| = \varrho^n, \quad b \neq 0. \tag{7}$$

Wegen der Literatur der Lemniskaten verweisen wir auf ein Werk von G. LORIA[1]). Die Lemniskaten kommen in der neuesten Literatur bei

---

[1]) G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven*, Bd. I, *Algebraische Kurven* (Leipzig, 1910), S. 445–446.

J. L. WALSH[2]) und bei L. HIBBERT[3]) vor. Die gegenwärtige Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich um die rein geometrischen Eigenschaften der Lemniskaten[4]).

§. 2. Die singulären Lemniskaten.

Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist *singulär,* wenn sie mindestens einen reellen singulären Punkt besitzt. Die uneigentliche Lemniskate $L_n(0)$ ist offenbar singulär. Die eigentlichen singulären Lemniskaten besitzen außer den zyklischen Punkten die einfachsten singulären Punkte, und zwar reelle mehrfache Punkte mit getrennten Tangenten.

II. *Ist*

$$(8)\quad f(z)=(z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}\dots(z-z_m)^{p_m}$$
$$(p_k\geqq 1,\ \ p_1+p_2+\dots+p_m=n,\ \ z_h\neq z_k,\ \ h\neq k),$$

so ist die eigentliche Lemniskate

$$|f(z)|=|f(\zeta)|\equiv\varrho^n\,(\neq 0;\ \ \zeta\neq z_k,\ \ k=1,2,\dots,m)$$

dann und nur dann singulär, wenn ζ eine Nullstelle der Derivierten $f'(z)$ ist (für welche $f(\zeta)\neq 0$ ist). Ist ζ eine einfache Nullstelle von $f'(z)$, so ist ζ ein Doppelpunkt der Lemniskate mit senkrechten Tangenten. Ist der Punkt ζ eine k-fache Nullstelle von $f'(z)$, so ist er ein $(k+1)$-facher Punkt der Lemniskate. Seine Tangenten bilden eine $(k+1)$-strahlige Windrose. Hat eine Lemniskate m Kerne, so gibt es höchstens $m-1$ mit ihr konzentrische singuläre eigentliche Lemniskaten.

Dieser Satz folgt aus der Taylorschen Formel des Polynoms $f(z)$. Sind

$$f(\zeta)\neq 0, f'(\zeta)=f''(\zeta)=\dots=f^{(k)}(\zeta)=0, f^{(k+1)}(\zeta)\neq 0,$$
$$z-\zeta=re^{i\varphi}\ \text{ und }\ \overline{f(\zeta)}f^{(k+1)}(\zeta)=(k+1)!\,Re^{i\alpha},$$

so ist

$$(9)\quad |f(z)|^2=\overline{f(z)}\,f(z)=|f(\zeta)|^2+r^{k+1}\,[2R\cos(k\varphi+\varphi+\alpha)+\dots+r^{2n-k-1}].$$

Der Punkt ζ liegt auf der Lemniskate $|f(z)|=|f(\zeta)|$. Er ist ein gewöhnlicher bzw. $(k+1)$-facher Punkt, je nachdem $k=0$, bzw. $k>0$ ist. Die Winkel φ der Tangenten der Lemniskate im Punkt ζ genügen der Gleichung $\cos\,[(k+1)\varphi+\alpha]=0.$

Damit ist der Satz bewiesen, weil die Derivierte des Polynoms (8) höchstens $m-1$ solche Nullstellen besitzt, die von Nullstellen des Polynoms $f(z)$ abweichen.

---

[2]) J. L. WALSH, Lemniskaten and equipotential curves of Green's function, *American Math. Monthly,* **42** (1935), S. 1—17.

[3]) L. HIBBERT, Univalence et automorphie pour les polynomes et les fonctions entières, *Bulletin de la Société Math. de France,* **46** (1938), S. 81—113.

[4]) Die gegenwärtige Arbeit hat gewisse Berührungspunkte mit meiner Arbeit, Die Lage der A-Stellen eines Polynoms bezüglich seiner Nullstellen, *diese Acta,* **11** (1947), S. 147—151.

Aus dem Satz II folgt, daß die eigentliche regelmäßige Lemniskate (7) nur dann singulär ist, wenn $|b| = \varrho^n$ ist. Ist $b = -\varrho^n$, ist a der Pol und ist die positive reelle Achse die Polarachse eines Polarkoordinatensystems, so hat die Lemniskate (7) die Gleichung

$$r^n = 2\varrho^n \cos n\varphi. \tag{10}$$

Die regelmäßigen singulären Lemniskaten n-ten Grades sind also Sinusspiralen vom Index n.[5]) Umgekehrt: jede Sinusspirale, deren Index eine natürliche Zahl ist, ist eine regelmäßige Lemniskate.

Aus dem bekannten Gauss-Lucasschen bzw. Jensenschen Satz[6]) über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines Polynoms folgen die Sätze:

III. *Die singulären Punkte der konzentrischen eigentlichen Lemniskaten fallen in das Innere der konvexen Hülle H ihrer Mittelpunkte.*

IV. *Liegen die Mittelpunkte einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ $(\varrho > 0)$ symmetrisch in bezug auf die Achse a und bezeichnet K_h $(h = 1, 2, \ldots \nu)$ je einen Kreis, dessen Durchmesser die Verbindungsstrecke von zwei in bezug auf die Achse a symmetrischen Mittelpunkten ist, so liegt jeder außerhalb der Achse liegende singuläre Punkt der konzentrischen Lemniskaten mindestens auf einer der Kreisscheiben K_h $(h = 1, 2, \ldots, \nu)$.*

§. 3. Topologische Eigenschaften der Lemniskaten.

Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ $(\varrho > 0)$ ist eine reelle endliche algebraische Kurve. Sie besitzt deshalb eine endliche Anzahl von Zügen. *Ein Zug* ist ein geschlossener Teil der Kurve, der stetige Tangenten besitzt. Eine Lemniskate bestimmt ihre Züge eindeutig, weil sie keinen Selbstberührungspunkt besitzt.

Ein einfach geschlossener Teil eines Zuges der Lemniskate ist ein *Zykel.* Schneidet ein Zug sich nicht, so ist er ein Zykel. Ein Zykel kann auch Winkelpunkte besitzen. Ein Zug mit dem einzigen Doppelpunkt P besteht aus zwei Zykeln, die in P einen Winkelpunkt haben.

Ein Zykel C einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ begrenzt einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$. Ein Punkt z liegt innerhalb von C, wenn er ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist. Dann wird der Punkt z von C umschlossen.

Nach einem klassischen Satz von Cauchy über die analytischen Funktionen erreicht der absolute Betrag des Polynoms $f(z)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ sein Maximum in keinem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$. Der Wert von $|f(z)|$ ist in jedem Punkte von C gleich ϱ^n, weil C ein Teil der Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist. Für jeden inneren Punkt ζ von $\mathfrak{B}$ besteht also die Ungleichung $|f(\zeta)| < \varrho^n$. ζ ist also kein Punkt der Lemniskate $L_n(\varrho)$.[7])

---

[5]) Loria, a. a. O., S. 470—477. Die Figur 15 bei Hibbert (a. a. O., S. 111) stellt eine regelmäßige Lemniskate 4-ten Grades dar.

[6]) G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Berlin, 1925), Bd. I, S. 89, Aufgabe 31; S. 90, Aufgabe 35.

[7]) Vgl. Pólya—Szegő, a. a. O., S. 111—112, Aufgaben 137—139, 142, 143.

Die Funktion $|f(z)|$ ist im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$ stetig und erreicht dort in einem inneren Punkt z_0 sein Minimum $M = |f(z_0)| = \varrho_0^n < \varrho^n$. Wäre nun $M > 0$, so hätte die Lemniskate $|f(z)| = \varrho_0^n$ in $\mathfrak{B}$ einen durch z_0 gehenden Zykel C_0, weil sie wegen der Ungleichung $\varrho_0^n < \varrho^n$ den Rand von $\mathfrak{B}$ nicht übertreten kann. Dann bestände die Ungleichung $|f(z)| < M$ für jeden innerhalb von C_0 liegenden Punkt des Bereiches $\mathfrak{B}$; M wäre also kein Minimum von $|f(z)|$ in $\mathfrak{B}$. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $f(z_0) = 0$ und deshalb z_0 ein Kern der Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist. Aus der Stetigkeit von $|f(z)|$ folgt, daß der Bereich $\mathfrak{B}$ mindestens einen Zug jeder konzentrischen Lemniskate $L_n(\varrho'), 0 \leqq \varrho' < \varrho$, enthält. Es gilt also der Satz:

V. *Kein Zykel einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ schneidet oder umschließt einen anderen Zykel. Zwei Zykel haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Jeder Zykel umschließt mindestens einen Kern. Keine Lemniskate besitzt mehr Zykel, als Kerne.*

Ist $0 < \varrho' < \varrho$, so besitzt die Lemniskate $L_n(\varrho')$ innerhalb jedes Zykels der konzentrischen Lemniskate $L_n(\varrho)$ mindestens einen Zug.

Zum Beweis dieses Satzes muß man noch zeigen, daß zwei Zykel C_1 und C_2 einer Lemniskate nicht zwei verschiedene gemeinsame Punkte A und B haben können. Widrigenfalls könnte man nämlich aus den vier Bögen, in welche das Zykelpaar C_1, C_2 von den Punkten A und B geteilt wird, zwei schneidende Zykel zusammensetzen.

Ein Zug oder ein Zykel einer Lemniskate heißt von Kern k, wenn es innerhalb von ihm k Kerne der Lemniskate gibt. Aus dem Satz V folgt der Satz

VI. *Kein Zug einer Lemniskate wird von einem anderen Zug umschlossen. Zwei Züge einer Lemniskate können einander in einem Punkte P nur dann schneiden, wenn P für beide Züge ein Doppelpunkt, für die Lemniskate ein mindestens vierfacher Punkt ist. Ein k-kerniger Zug besitzt höchstens $k-1$ Doppelpunkte.*

Die Sinusspirale (10) liefert ein Beispiel für Lemniskaten mit schneidenden Zügen. Ist nämlich $n = 2k$ eine gerade Zahl, so besteht die Sinusspirale aus k Zügen mit je einem Doppelpunkt, und zwar mit je einem Inflexionsknoten. Die k Doppelpunkte fallen in den n-fachen Punkt der Lemniskate zusammen.

Aus den Sätzen II, V und VI ergibt sich der Satz

VII. *Bezeichnen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ bzw. $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{m-1}$ die verschiedenen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n-ten Grades bzw. die von $z_1, z_2, \ldots, z_m$ abweichenden Nullstellen der Derivierten $f'(z)$, sind ferner*

$$0 < |f(\zeta_1)| \leqq |f(\zeta_2)| \leqq \ldots \leqq |f(\zeta_p)| < |f(\zeta_{p+1})| \leqq |f(\zeta_{p+2})| \leqq \ldots \leqq |f(\zeta_{m-1})|,$$

$$|f(\zeta_h)| = (\varrho_h^*)^n \ (h = 1, 2, \ldots, m-1), \quad 0 < \varrho_0 < \varrho_1^*, \ \varrho_p^* < \varrho_p < \varrho_{p+1}^*$$

$$\textit{und} \ \varrho_{m-1}^* < \varrho_{m-1},$$

und bezeichnet endlich $L(\varrho)$ die Lemniskate $|f(z)| = \varrho^n$, so besitzt jede Lemniskate $L(\varrho_0)$, $L(\varrho_p)$ bzw. $L(\varrho_{m-1})$ m, $m-p$ Züge bzw. einen Zug. Die Lemniskaten $L(\varrho_h^*)$ sind singulär. Die Lemniskate $L(\varrho_p^*)$ besteht aus $m-p$ Zügen.

Ist ϱ genügend klein, so liegt die Lemniskate $L(\varrho)$ in der Umgebung der Kerne $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Sie besteht aus m einkernigen Zügen. Diese Züge bleiben getrennt, solange $\varrho < \varrho_1$ ist. Die Anzahl der Züge von $L(\varrho)$ kann nämlich bei Vergrößerung des Radius ϱ sich nur dann verändern, wenn zwei oder mehrere Züge sich in einem singulären Punkt vereinigen. Dies findet nur bei einer singulären Lemniskate $L(\varrho)$ statt.

Wir nehmen erstens an, daß $\varrho_1^* < \varrho_2^* < \ldots < \varrho_p^*$ sind. Die Lemniskate $L(\varrho_1^*)$ hat dann einen Doppelpunkt in ζ_1, wo zwei bei den Kurven $L(\varrho_0)$ getrennte Züge sich in einen Zug vereinigen. Die Kurve $L(\varrho_1^*)$ besitzt also $m-1$ Züge und diese Anzahl bleibt bei den Lemniskaten $L(\varrho_1)$ unverändert. Bei der singulären Lemniskate $L(\varrho_2^*)$ gehen zwei Züge der Lemniskaten $L(\varrho_1)$ in einen Zug über. Die Lemniskate $L(\varrho_2^*)$ und die Lemniskaten $L(\varrho_2)$ bestehen also aus $m-2$ Zügen. So sieht man ein, daß die Lemniskaten $L(\varrho_p)$ bzw. $L(\varrho_{m-1})$ $m-p$ Züge bzw. einen Zug besitzen.

Es seien im zweiten Fall $\varrho_1^* = \varrho_2^* = \ldots = \varrho_p^*$ und $\zeta_h \neq \zeta_k$ $(h = 1, 2, \ldots, p;$ $k = h+1, h+2, \ldots, p)$. Dann wird die Anzahl der Züge der Lemniskaten $L(\varrho_0)$ bei der Lemniskate $L(\varrho_1^*)$ durch die in den Doppelpunkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ stattfindenden Verschmelzungen um p verkleinert.

Im dritten Fall sind $\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_p$. Dann werden $p+1$ getrennte Züge der Lemniskaten $L(\varrho_0)$ bei der Kurve $L(\varrho_1^*) \equiv L(\varrho_p^*)$ in einen Zug vereinigt, der in ζ_1 einen $(p+1)$-fachen Punkt besitzt. Die Lemniskaten $L(\varrho_p^*)$ und $L(\varrho_p)$ bestehen wieder aus $m-p$ Zügen.

Die betrachteten drei Fälle können verwechselt und kombiniert vorkommen, während man von einer Lemniskate $L(\varrho_0)$ ausgehend durch die Vergrößerung des Radius ϱ zu einer Lemniskate $L(\varrho_p)$ gelangt. Jedesmal nimmt die Anzahl der Züge um p ab. Damit ist der Satz VII bewiesen, weil jede Lemniskate $L(\varrho_{m-1})$ aus $m-(m-1) = 1$ Zug besteht.

§. 4. Die Lage der Lemniskaten $L_n(\varrho)$ in bezug auf die konzentrischen Kreise vom Halbmesser ϱ.

Es gilt der Satz

VIII. *In einer (abgeschlossenen) Kreisscheibe vom Mittelpunkt Q und vom Halbmesser ϱ besitzt jede Lemniskate vom Radius ϱ, die in Q einen Mittelpunkt hat, mindestens einen Punkt*[8]).

---

[8]) Nach einem Satz von PÓLYA—SZEGŐ, a. a. O., Aufgabe 139, gilt auch der Satz: Liegen die Mittelpunkte einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ innerhalb eines Kreises K vom Halbmesser ϱ, so besitzt die Lemniskate mindestens einen Punkt auf K.

Bezeichnen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ die Kerne einer Lemniskate $L_n(\varrho)$, so liegt kein Punkt der Lemniskate außerhalb der m Kreise K_h

$$|z-z_h| = \varrho \quad (h=1,2,\ldots,m) \tag{11}$$

oder innerhalb jedes dieser m Kreise.

Die Gesamtheit der m Kreisscheiben K_h enthält jeden Punkt der Lemniskate. Haben diese m Kreisscheiben einen Bereich gemeinsam, so liegt kein Punkt der Lemniskate im Innern dieses Bereiches.

Die Lemniskate $L_n(\varrho)$ hat in diesem Satz eine Gleichung von der Form

$$|f(z)| \equiv |(z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}\ldots(z-z_m)^{p_m}| = \varrho^n \tag{12}$$
$$(p_h \geqq 1,\ p_1+p_2+\ldots+p_m = n).$$

Enthält die Kreisscheibe K_1 keinen Punkt der Lemniskate, so enthält sie keine Nullstelle des Polynoms

$$g(z) \equiv f(z) - \varrho^n \equiv (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n).$$

Es bestehen also die Ungleichungen

$$|z_1-a_h| > \varrho \quad (h=1,2,\ldots,n) \text{ und } |g(z_1)| \equiv |(z_1-a_1)(z_1-a_2)\ldots(z_1-a_n)| > \varrho^n.$$

Dies ist aber unmöglich, weil

$$|g(z_1)| = |f(z_1)-\varrho^n| = |0-\varrho^n| = \varrho^n$$

ist. Dieser Widerspruch rechtfertigt den ersten Absatz von VIII.

Für einen beliebigen Punkt z_0, der außerhalb bzw. innerhalb jedes der m Kreise K_h liegt, bestehen die Ungleichungen

$$|z_0-z_h| > \varrho \text{ bzw. } |z_0-z_h| < \varrho \quad (h=1,2,\ldots,m),$$

woraus die Ungleichung

$$|f(z_0)| > \varrho^n \text{ bzw. } |f(z_0)| < \varrho^n$$

folgt. Der Punkt z_0 liegt also nicht auf der Lemniskate. — Damit ist der Satz VIII bewiesen, weil sein dritter Absatz aus dem zweiten einfach folgt.

Aus dem Satz VIII folgt:

IX. *Enthält die Kreisscheibe K: $|z-\alpha| \leqq r$ jeden Kern einer Lemniskate $L_n(\varrho)$, so liegt die Lemniskate in der Kreisscheibe $|z-\alpha| \leqq \varrho + r$. Ist $\varrho > r$, so liegt die Lemniskate ganz im Kreisring*

$$\varrho - r \leqq |z-\alpha| \leqq \varrho + r. \tag{13}$$

Ist $\varrho > 2r$, so besteht die Lemniskate $L_n(\varrho)$ aus einem Zug.

Jede Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist kreisförmig, wenn ihr Radius genügend groß ist[9]*.*

Der zweite Absatz dieses Satzes folgt aus dem ersten und aus dem Satz III, weil die singulären Punkte der konzentrischen Lemnis-

[9] Dieser Satz wurde von F. Lucas, Statique des polynomes, *Bulletin de la Société Math. de France*, **17** (1888), S. 17—69, ohne Beweis ausgesprochen.

katen $L_n(\varrho)$ im Kreise K liegen. Eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ ist also nicht singulär, wenn $\varrho - r \geqq r$ ist, weil sie im Kreis K keinen Punkt besitzt.

Der dritte Absatz des Satzes IX folgt aus der folgenden Form von (13)

$$\varrho\left(1-\frac{r}{\varrho}\right) \leqq |z-\alpha| \leqq \varrho\left(1+\frac{r}{\varrho}\right).$$

§ 5. Konzentrische Kreissysteme einer Lemniskate $L_n(\varrho)$.

Genügen die positiven Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ der Gleichung

$$\varrho_1^{p_1} \varrho_2^{p_2} \ldots \varrho_m^{p_m} = \varrho^n, \tag{14}$$

so bilden die Kreisscheiben K_h

$$|z-z_h| \leqq \varrho_h \quad (h=1, 2, \ldots m) \tag{15}$$

ein *konzentrisches Kreissystem* der Lemniskate (12). Die Gesamtheit der Kreisscheiben (11) ist auch ein konzentrisches Kreissystem der Lemniskate (12).

X. *Jedes konzentrische Kreissystem einer Lemniskate enthält die ganze Lemniskate. Der Durchschnitt der Kreisscheiben eines konzentrischen Systems enthält keinen Punkt der Lemniskate im Innern.*

Bezeichnen $S_1, S_2, \ldots$ verschiedene konzentrische Kreissysteme, so enthält ihr Durchschnitt jeden Punkt der Lemniskate.

Hat die Kreisscheibe K_1 eines konzentrischen Kreissystems S von einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ mit keiner der übrigen Kreisscheiben von S einen Punkt gemeinsam, so enthält die Kreisscheibe K_1 einen ganzen Zug und außerdem keinen anderen Punkt der Lemniskate. Dieser Zug besitzt keinen singulären Punkt.

Liegt nämlich ein Punkt z_0 außerhalb bzw. innerhalb jeder Kreisscheibe des Kreissystems (14), so sind

$$|z_0-z_h| > \varrho_h \quad \text{bzw.} \quad |z_0-z_h| < \varrho_h \quad (h=1, 2, \ldots, m)$$

und

$$|f(z_0)| \equiv |(z_0-z_1)^{p_1} (z_0-z_2)^{p_2} \ldots (z_0-z_m)^{p_m}| > \varrho_1^{p_1} \varrho_2^{p_2} \ldots \varrho_m^{p_m} = \varrho^n$$
$$\text{bzw.} \quad |f(z_0)| < \varrho^n.$$

Der Punkt z_0 ist also kein Punkt der Lemniskate (12). Damit ist der erste Absatz von X bewiesen. Der zweite Absatz folgt aus dem ersten ohne Weiteres.

Für einen beliebigen Randpunkt z_0' der Kreisscheibe K_1 im dritten Absatz von X bestehen die Ungleichungen $|z_0'-z_h| > \varrho$ $(h=2, 3, \ldots, m)$ und $|f(z_0')| > \varrho^n$.

Der Rand der Kreisscheibe K_1 wird also von keinem Zug der Lemniskate geschnitten. Die Kreisscheibe K_1 enthält den Kern z_1, wo $|f(z_1)| = 0$ ist. Aus der Stetigkeit von $|f(z)|$ folgt, daß es auf jedem

Halbmesser (z_1, z'_0) mindestens einen Punkt z gibt, wo $|f(z)| = \varrho^n$ ist. Die Lemniskate $L_n(\varrho)$ besitzt mindestens einen Zug Z_1 in der Kreisscheibe K_1, weil Z_1 den Rand von K_1 nicht übertreten kann. Aus demselben Grunde enthielte die Kreisscheibe K_1 mit einem Punkte eines anderen Zuges den ganzen Zug. Der Kern z_1 der Lemniskate $L_n(\varrho)$ wird nach Sätzen V und VI nur von einem Zykel der Kurve umschlossen. Daraus folgt, daß der Zug Z_1 aus einem Zykel besteht und daß die Lemniskate außerhalb von Z_1 in K_1 keinen anderen Punkt besitzt.

Der Satz IX läßt sich auf folgende Weise ergänzen:

XI. *Bezeichnet δ bzw. Δ den kleinsten bzw. den größten Abstand zwischen je zwei Kernen einer Lemniskate $L_n(\varrho)$ mit m Kernen, so besteht die Lemniskate aus m Zügen bzw. aus einem Zug, je nachdem $\varrho < \frac{\delta}{2}$ bzw. $\varrho \geqq \Delta$ ist.*

Ist der Radius der Lemniskate genügend klein, so besteht sie aus m kreisförmigen Zügen.

Sind $2\varrho < \delta$ und $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_m = \varrho$, so hat eine Kreisscheibe des zugehörigen konzentrischen Kreissystems S mit keiner der übrigen Kreisscheiben von S einen Punkt gemeinsam. Jede Kreisscheibe enthält also einen Zug der Lemniskate.

Sind $\varrho \geqq \Delta$ und $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_m = \varrho$, so enthält jede Kreisscheibe des zugehörigen konzentrischen Kreissystems jeden Mittelpunkt der Lemniskate und damit ihre konvexe Hülle H. Die konzentrischen Lemniskaten $L_n(\varrho)$, $\varrho \geqq \Delta$, haben also in H keinen Punkt und deshalb keinen singulären Punkt. Sie bestehen also aus einem Zug.

Damit ist der erste Absatz von XI bewiesen.

Sind

$$|z_k - z_1| = d_k, \quad 0 < d = \text{Min } d_k \quad (k = 2, 3, \ldots, m), \; 2\varrho \leqq d \tag{16}$$

und

$$\varrho_k = d_k - \varrho_1 \text{ bzw. } \varrho'_k = d_k + \varrho'_1 \quad (k = 2, 3, \ldots, m), \tag{17}$$

und besteht die Gleichung

$$\varrho_1^{p_1} \varrho_2^{p_2} \ldots \varrho_m^{p_m} = \varrho_1'^{p_1} \varrho_2'^{p_2} \ldots \varrho_m'^{p_m} = \varrho^n \quad (2\varrho \leqq d), \tag{18}$$

so besitzt die Lemniskate (12) im Kreise $|z - z_1| \leqq \varrho_1$ einen Zug, weil dieser Kreis außerhalb der Kreise $|z - z_k| \leqq \varrho_k$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$ liegt. Die Lemniskate hat im Innern des Kreises $|z - z_1| \leqq \varrho'_1$ keinen Punkt, weil dieser Kreis innerhalb der Kreise $|z - z_k| \leqq \varrho'_k$ liegt. Die Lemniskate besitzt also einen Zug im Kreisring

$$\varrho'_1 \leqq |z - z_1| \leqq \varrho_1 \leqq \varrho. \tag{19}$$

Aus der Gleichung (18) folgt die Ungleichung

$$(20)\quad 1 > \left(\frac{\varrho_1'}{\varrho_1}\right)^{p_1} = \prod_{k=2}^{m}\left(\frac{\varrho_k}{\varrho_k'}\right)^{p_k} = \prod_{k=2}^{m}\left(\frac{1-\frac{\varrho_1}{d_k}}{1+\frac{\varrho_1'}{d_k}}\right)^{p_k} \geqq \left(\frac{1-\frac{\varrho_1}{d}}{1+\frac{\varrho_1'}{d}}\right)^{n-p_1} > \left(\frac{1-\frac{\varrho}{d}}{1+\frac{\varrho}{d}}\right)^{n-p_1},$$

also

$$(21)\quad 1 > \frac{\varrho_1'}{\varrho_1} > \left(\frac{1-\frac{\varrho}{d}}{1+\frac{\varrho}{d}}\right)^{\frac{n}{p_1}-1} \geqq \left(\frac{1-\frac{\varrho}{d}}{1+\frac{\varrho}{d}}\right)^{n-1} > \left(1-\frac{2\varrho}{d}\right)^{n-1} > 1-2\varrho\frac{n-1}{d}.$$

Ist also $\frac{2(n-1)\varrho}{d} = \varepsilon < 1$, so gilt die Ungleichung $1-\varepsilon < \frac{\varrho_1'}{\varrho_1} < 1$.

Durch diese Ungleichung ist auch der zweite Absatz des Satzes XI bewiesen.

§. 6. Sternartige Lemniskaten.

XII. *Enthält die eine von der Geraden g begrenzte (abgeschlossene) Halbebene E die konvexe Hülle H der Mittelpunkte einer Lemniskate, so wird die in der anderen Halbebene E' liegende Teilmenge der Lemniskate von einer zu g senkrechten beliebigen Geraden f entweder in einem, oder in keinem Punkte getroffen.*

Liegen die Punkte ζ_1' und ζ_2' der Halbebene E' auf einer zu g senkrechten Geraden f und liegt ζ_1' der Geraden g näher als ζ_2', so liegt ζ_1' jedem Punkte z von E näher als ζ_2'. Dies ist klar, wenn auch der Punkt z auf f ist. Sind z, ζ_1', ζ_2' die Ecken eines Dreieckes, so hat dieses Dreieck bei ζ_1' einen Stumpfwinkel. Deshalb ist $|\zeta_1'-z| < |\zeta_2'-z|$. Diese Ungleichung besteht für jeden Mittelpunkt z_h der Lemniskate (12). Hieraus folgt, daß $|f(\zeta_1')| < |f(\zeta_2')|$ ist. Die Lemniskate (12) enthält also höchstens einen der Punkte ζ_1' und ζ_2'[10]). Damit ist der Satz bewiesen.

Eine Punktmenge M wird in bezug auf die Punktmenge M^* *sternartig* genannt, wenn jede von einem beliebigen Punkt A^* der Menge M^* ausgehende Halbgerade mit der Menge M höchstens einen Punkt gemeinsam hat.

Wendet man den Satz XII auf die Stützgeraden g des konvexen Bereiches H an, so erhält man leicht den Satz

XIII. *Bezeichnet $H\left(\frac{\pi}{2}\right)$ die Menge der Punkte, von denen aus die konvexe Hülle H der Mittelpunkte einer Lemniskate unter einem*

---

10) Das Prinzip dieses Beweises rührt von L. Fejér her; vgl. seine Arbeit: Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimalforderungen gewisser Art entspringen, *Math. Annalen*, **85** (1922), S. 41–48.

Winkel $\leqq \frac{\pi}{2}$ *erscheint, so ist die in* $H\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *liegende Teilmenge der Lemniskate sternartig in bezug auf die Punktmenge* H.

Dieser Satz enthält den folgenden Satz[11]) von WALSH in sich: Enthält eine Kreisscheibe K vom Halbmesser R jeden Mittelpunkt einer Lemniskate und bezeichnet K' die konzentrische Kreisscheibe vom Halbmesser $R' = R\sqrt{2}$, so ist die außerhalb von K' liegende Teilmenge der Lemniskate sternartig in bezug auf die Kreisscheibe K.

Aus einem Punkte des Randkreises von K' erscheint nämlich die Kreisscheibe K unter einem Rechtwinkel.

Aus den Sätzen VIII, XII und II folgt

XIV. *Liegen die Mittelpunkte einer Lemniskate* $L_n(\varrho)$ *auf einer Geraden* a, *so ist die Lemniskate symmetrisch auf die Achse* a *und liegt in einem Parallelstreifen von der Breite* 2ϱ, *dessen Mittelgerade die Achse* a *ist. Diese Lemniskate besitzt mit einer zu der Achse* a *senkrechten Geraden entweder zwei (verschiedene oder zusammenfallende) Punkte gemeinsam, oder keine.*

Ist diese Lemniskate singulär, so ist ihr singulärer Punkt notwendigerweise ein Doppelpunkt, dessen Tangenten mit der Achse die Winkel $\pm\frac{\pi}{4}$ bilden. Dies folgt aus der Eigenschaft eines Polynoms $f(z)$ mit lauter reellen Nullstellen, daß jede von den mehrfachen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ abweichende Nullstelle der Derivierten $f'(z)$ einfach ist. Eine zu a senkrechte Gerade besitzt also mit der Lemniskate auch dann nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam, wenn sie durch einen singulären Punkt der Kurve geht. Damit ist der Satz XIV bewiesen.

§. 7. Tangenten und Normalen der Lemniskate.

Ist

$$F(x, y) = \prod_{k=1}^{n} [(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2], \tag{22}$$

so hat die Gleichung (2) die Form

$$G(x, y) \equiv F(x, y) - \varrho^{2n} = 0. \tag{23}$$

Für einen Punkt (x, y) der eigentlichen Lemniskate $L_n(\varrho)$ bestehen dann die Gleichungen

$$F(x, y) = \varrho^{2n} \neq 0, \quad G_x(x, y) = F_x(x, y), \quad G_y(x, y) = F_y(x, y)$$

und

$$\frac{F_x(x, y)}{F(x, y)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x-x_k}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}, \tag{24}$$

$$\frac{F_y(x, y)}{F(x, y)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{y-y_k}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}.$$

---

[11]) A. a O.

Wir können annehmen, daß die Lemniskate (23) im Nullpunkt von der x-Achse berührt wird, weil man diese Lage durch eine Koordinatentransformation immer erreichen kann.

Aus diesen Annahmen folgt, daß

$$F(0,0)=\prod_{k=1}^{n}(x_k^2+y_k^2)=\varrho^{2n}\neq 0,\quad \frac{F_x(0,0)}{F(0,0)}=-2\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k^2+y_k^2}=0$$

und

$$\frac{F_y(0,0)}{F(0,0)}=-2\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{x_k^2+y_k^2}\neq 0 \text{ bzw.} =0$$

sind, je nachdem der Nullpunkt ein gewöhnlicher bzw. singulärer Punkt der Lemniskate ist.

Bezeichnet $z_k'=x_k'+iy_k'$ das Spiegelbild des Mittelpunktes $z_k=x_k+iy_k$ an dem Einheitskreis, so sind

$$x_k'=\frac{x_k}{x_k^2+y_k^2}=\frac{x_k}{r_k^2} \text{ und } y_k'=\frac{y_k}{x_k^2+y_k^2}=\frac{y_k}{r_k^2}\quad (k=1,2,\dots,n).$$

Ist also der Nullpunkt ein gewöhnlicher Punkt der Lemniskate (23) und wird sie dort von der x-Achse berührt, so sind

$$(25)\qquad X'=n\xi'=\sum_{k=1}^{n}x_k'=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k^2+y_k^2}=0 \text{ und } Y'=n\eta'=\sum_{k=1}^{n}y_k'\neq 0.$$

Der Schwerpunkt $\zeta'=\xi'+i\eta'$ der Punkte z_k' $(k=1,2,\dots,n)$ und damit auch der Punkt $Z'=X'+iY'=n\zeta'=\sum_{k=1}^{n}z_k'$, fallen also auf die y-Achse, d. h. auf die zum Nullpunkt gehörige Normale der Lemniskate.

Daraus ergibt sich die folgende einfache Konstruktion der Normalen der Lemniskate in einem gewöhnlichen Punkt:

XV. *Ist ζ ein gewöhnlicher Punkt der Lemniskate*

$$|f(z)|\equiv|(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)|=|f(\zeta)|\quad (f(\zeta)\neq 0,\ f'(\zeta)\neq 0),$$

bezeichnet z_k' das Spiegelbild des Mittelpunktes z_k $(k=1,2,\dots,n)$ am Kreis $|z-\zeta|=1$ (oder an einem Kreis $|z-\zeta|=R$) und bezeichnet ζ' den Schwerpunkt der n Punkte z_k', so ist $\zeta'\neq\zeta$ und die Verbindungsgerade der Punkte ζ und ζ' schneidet die Lemniskate im Punkt ζ senkrecht. In dieser Konstruktion läßt sich der Punkt ζ' durch den Punkt Z' ersetzen, wenn

$$Z'-\zeta=\sum_{k=1}^{n}(z_k'-\zeta)=n(\zeta'-\zeta)$$

ist.

Aus diesem Satz folgt die bekannte Konstruktion[12]) der Normalen in einem Punkte M der Cassinischen Kurve mit den Mittelpunkten (Brennpunkten) F_1 und F_2:

---

[12]) LORIA, a. a. O., S. 217, Tafel VII, Fig. 53.

Man trage auf die Halbgerade MF_1 bzw. MF_2 die Strecke $\overline{MG_1}=\overline{MF_2}$ bzw. $\overline{MG_2}=\overline{MF_1}$ ab. Wenn N die vierte Ecke des Parallelogramms ist, das MG_1 und MG_2 als anstoßende Seiten hat, so ist die Gerade MN die Normale der Kurve im Punkte M.

Gehören nämlich die Zahlen 0, z_1, z_2, z_1', z_2', bzw. Z' zu den Punkten M, F_1, F_2, G_1, G_2, bzw. N, so ist $Z'=z_1'+z_2'$ und der Punkt G_k ist das Spiegelbild des Punktes F_k $(k=1, 2)$ am Kreis $|z|=R$, wenn

$$R^2=|z_1z_2|=|z_1z_1'|=|z_2z_2'|$$

ist.

Aus dem Satz XV folgt

XVI. *Die konvexe Hülle H der Mittelpunkte einer Lemniskate wird von jeder Normalen der Kurve in zwei Stücke geteilt. Eine Ausnahme kommt nur dann vor, wenn die Mittelpunkte der Lemniskate auf einer Geraden a liegen, weil dann auch diese Gerade eine Normale der Kurve ist.*

Die Gleichung (25) läßt sich auch in der Form

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{d_k}=0,\quad \frac{1}{d_k}=x_k'=\frac{x_k}{x_k^2+y_k^2} \tag{26}$$

schreiben. Hier bedeutet d_k den mit Vorzeichen versehenen Durchmesser des Kreises, der durch den Punkt z_k geht und im Nullpunkt die y-Achse berührt. Die Durchmesser d_h und d_k besitzen entgegengesetzte Vorzeichen bzw. dasselbe Vorzeichen, je nachdem die Punkte z_h und z_k von der y-Achse getrennt bzw. nicht getrennt werden. Liegt z_k auf der y-Achse, so ist $\frac{1}{d_k}=0$.

Wir können die Indizes der Punkte z_k so wählen, daß

$$\frac{1}{d_1}\geqq\frac{1}{d_2}\geqq\ldots\geqq\frac{1}{d_n}\quad\text{und}\quad -d_n=D\geqq 0.$$

Gibt es in der Summe (26) mindestens p positive und höchstens q negative Glieder, so sind

$$\frac{p}{d_p}\leqq\frac{q}{D}\ \text{und}\ \frac{p}{d_1}\geqq\frac{1}{D}\ \text{oder}\ D\leqq\frac{qd_p}{p}\leqq(n-1)\,d_p\ \text{und}\ d_1\leqq pD\leqq(n-1)\,D.$$

Hieraus erhält man unter anderem den Satz

XVII. *Es seien k und K einander in einem Punkte ζ der Lemniskate $L_n(\varrho)$ von außen berührende Kreise vom Durchmesser d bzw. $D=(n-1)\,d$. Enthält die Kreisscheibe k mindestens einen Kern der Lemniskate, so enthält die Kreisscheibe K mindestens einen. Enthält die Kreisscheibe k mindestens p Mittelpunkte der Lemniskate (jeden Mittelpunkt nach seiner*

Vielfachheit gerechnet), so enthält die Kreisscheibe K' vom Durchmesser $D'=\frac{n-p}{p}d$, von der die Kreisscheibe k im Punkt ζ von außen berührt wird, mindestens einen Kern der Lemniskate.

Aus dem Satz XV läßt sich der Satz ableiten:

XVIII. *Hat eine Lemniskate $L_n(\varrho)$ die Kerne $z_1, z_2, \ldots, z_m$, bezeichnet p_h die Vielfachheit des Mittelpunktes z_h ($p_h \geqq 1$, $p_1+p_2+\ldots+p_m=n$) und bezeichnet $K(\sigma)$ $(0<\sigma\leqq 1)$ den Durchschnitt der $m-1$ Kreisscheiben*

$$|z-z_1|\leqq \frac{\sigma p_1}{n-p_1}|z-z_h| \qquad (h=2, 3,\ldots, m),$$

so bilden die zu einem in $K(\sigma)$ liegenden beliebigen Punkt ζ der Lemniskate gehörige Normale und der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ einen Winkel $\varphi \leqq \operatorname{arc}\sin\sigma \leqq \frac{\pi}{2}$.

Im Innern des konvexen Bereichs $K(1)$ besitzt die Lemniskate keinen singulären Punkt.

Dieser Satz gilt für die Normale in jedem Punkt ζ der Lemniskate, der in der Kreisscheibe

$$|z-z_1|=\sigma r,\ \sigma\leqq 1,\ r=\frac{\operatorname{Min}|z_h-z_1|}{n} \qquad (h=2, 3,\ldots, m)$$

liegt.

Jeder im Kreisring KR

$$\frac{r}{2}\leqq |z-z_1|\leqq \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

liegende (zusammenhängende) Bogen der Lemniskate ist sternartig in bezug auf die inneren Punkte der Kreisscheibe K_1: $|z-z_1|\leqq \frac{r\sqrt{2}}{4}$.

Zum Beweis dieses Satzes können wir annehmen, daß $\zeta=0$ ist. Dann hat man nach Satz XV

$$Z'=\sum_{k=1}^{m} p_h z'_k = z_0+Z_0,\ z_0=p_1 z'_1,\ Z_0=\sum_{k=2}^{m} p_k z'_k$$

und

$$\varphi=\operatorname{arc}\frac{Z'-\zeta}{z_1-\zeta}=\operatorname{arc}\frac{Z'}{z_1}=\operatorname{arc}\frac{Z'}{z'_1}=\operatorname{arc}\frac{z_0+Z_0}{z_0}=\operatorname{arc}\left(1+\frac{Z_0}{z_0}\right),$$

weil $\operatorname{arc} z_1=\operatorname{arc} z'_1=\operatorname{arc} z_0$ ist.

Aus den Annahmen des Satzes XVIII folgt, daß

$$\left|\frac{z'_h}{z'_1}\right|=\left|\frac{z_1}{z_h}\right|\leqq\frac{\sigma p_1}{n-p_1} \quad\text{und}\quad \left|\frac{Z_0}{z_0}\right|\leqq\sum_{h=2}^{m}\frac{p_h}{p_1}\left|\frac{z'_h}{z'_1}\right|\leqq\sigma\frac{p_2+p_3+\ldots+p_m}{n-p_1}=\sigma$$

sind. Der Punkt $Z'=z_0+Z_0$ liegt also im Kreise K_0: $|z-z_0|\leqq\sigma|z_0|$.

Der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_0}$ und damit auch der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ bildet zum Vektor $\overrightarrow{\zeta Z'}$ einen nicht größeren Winkel φ als zu den Tangenten des Kreises K_0

von ζ aus. Daraus folgt daß $\sin\varphi \leqq \sigma$ ist. Damit ist der erste Absatz von XVIII bewiesen.

Liegt der Punkt ζ innerhalb von $K(1)$, so ist $Z' = z_0 + Z_0 \neq 0$, weil

$$\left|\frac{z'_h}{z'_1}\right| = \left|\frac{z_1}{z_h}\right| < \frac{p_1}{n-p_1} \text{ und deshalb } \left|\frac{Z_0}{z_0}\right| < 1 \text{ ist.}$$

Daraus folgt, daß ζ kein singulärer Punkt der Lemniskate ist. Damit ist der zweite Absatz von XVIII bewiesen.

Der Kreis $|z-z_1| = r$ liegt offenbar im Bereich $K(\sigma)$. Daraus folgt die Richtigkeit des dritten Absatzes von XVIII.

Liegt der Punkt ζ der Lemniskate im Kreisring KR, so bilden die zugehörige Normale und der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ einen Winkel $\varphi \leqq \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Die Tangente t von $L_n(\varrho)$ im Punkt ζ und der Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ bilden also einen Winkel $\psi \geqq \frac{\pi}{2} - \varphi \geqq \frac{\pi}{4}$. Für den Abstand d dieser Tangente vom Mittelpunkt z_1 aus gilt also die Ungleichung

$$d = |\zeta - z_1| \sin\psi \geqq \frac{r}{2} \sin\psi \geqq \frac{r}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{4}.$$

Die Tangente t geht also durch keinen inneren Punkt S der Kreisscheibe K_1.

Wir bezeichnen mit Γ einen (zusammenhängenden) Bogen der Lemniskate im Kreisring KR, mit P einen beliebigen Punkt von Γ und mit g_S die von einem inneren Punkt S der Kreisscheibe K_1 ausgehende Halbgerade durch P.

Die Halbgerade g_S berührt den Bogen Γ nicht, P ist kein singulärer Punkt der Lemniskate. Die gemeinsamen Punkte von Γ und g_S bleiben also getrennt und ihre Anzahl A verändert sich nicht, während der Punkt P den Bogen Γ beschreibt. Wäre nun $A > 1$, so bestände Γ aus A miteinander nicht zusammenhängenden Teilbogen. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des vierten Absatzes von XIX.

§. 8. Die Wendepunkte der Lemniskaten.

Ist der Nullpunkt ein Wendepunkt der Lemniskate (23) und ist die x-Achse die zugehörige Wendetangente, so ist $x = 0$ eine mindestens dreifache Nullstelle des Polynoms

$$g(x) \equiv G(x, 0) \equiv F(x, 0) - F(0, 0) \equiv \prod_{k=1}^{n} [(x-x_k)^2 + y_k^2] - \prod_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Daraus folgt, daß $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ und $g''(0) = 0$ sind. Wegen der

Identitäten

$$\frac{g''(x)}{g(x)} \equiv \left[\frac{g'(x)}{g(x)}\right]' + \left[\frac{g'(x)}{g(x)}\right]^2, \quad \frac{g'(x)}{g(x)} \equiv 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x-x_k}{(x-x_k)^2+y_k^2},$$

$$\left[\frac{g'(x)}{g(x)}\right]' \equiv 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2-(x-x_k)^2}{[(x-x_k)^2+y_k^2]^2}$$

bestehen also die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2-y_k^2}{r_k^4} \equiv \sum_{k=1}^{n} (x_k'^2 - y_k'^2) = 0, \tag{27}$$

$$\sum x_k' = 0, \quad x_k' = \frac{x_k}{r_k^2}, \quad y_k' = \frac{y_k}{r_k^2}, \quad r_k^2 = x_k^2 + y_k^2.$$

Hieraus erhält man den Satz

XIX. *Ist ζ ein Wendepunkt der Lemniskate*

$$|f(z)| = |(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)| = |f(\zeta)| \neq 0,$$

bezeichnet t bzw. f die Wendetangente bzw. die Normale der Lemniskate im Punkt ζ und bezeichnet W_t bzw. W_f den rechtwinkligen Doppelwinkelraum vom Scheitel ζ mit der Winkelhalbierenden t bzw. f, so besitzt die Lemniskate im Innern beider Winkelräume mindestens je einen Mittelpunkt, oder ihre Mittelpunkte liegen alle auf den gemeinsamen Schenkeln von W_t und W_f.

Bezeichnet z_k' das Spiegelbild des Mittelpunktes z_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ an einem Kreis $|z-\zeta| = R$, so besitzt das Punktsystems $z_1', z_2', \dots, z_n'$ in bezug auf die Achsen t und f dasselbe Trägheitsmoment.

Bezeichnet $\bar{H}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ die Menge der Punkte der Ebene, von denen die konvexe Hülle H der Mittelpunkte einer Lemniskate unter einem Winkel $\geqq \frac{\pi}{4}$ erscheint, so enthält der Bereich $\bar{H}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ jeden Wendepunkt der Lemniskate.

Der erste und zweite Absatz von XIX folgen aus der ersten Gleichung von (27). Der Wert $x_k^2 - y_k^2$ ist nämlich positiv bzw. negativ, wenn der Punkt z_k im Innern von $W_t \equiv W_x$ bzw. $W_f \equiv W_y$ liegt.

Wäre nun ein Wendepunkt ζ außerhalb von $\bar{H}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ gelegen, so enthielte das Winkelraum W_f den Bereich H und damit jeden Mittelpunkt der Lemniskate im Innern, weil H von der Normalen f geschnitten wird (Satz XVI). Dies ist aber nach dem ersten Absatz unmöglich. Damit ist der Satz XIX bewiesen.

Hieraus folgt der Satz[13]) von WALSH: Enthält eine Kreisscheibe vom Halbmesser r jeden Mittelpunkt einer Lemniskate, so enthält die

[13]) A. a. O.

konzentrische Kreisscheibe vom Halbmesser $r \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$ die Wendepunkte der Kurve.

§. 9. Konvexe Züge der Lemniskaten.

Nach einem Satz[14]) von A. KNESER ist eine endliche, geschlossene und stetige Tangenten besitzende ebene Kurve, die keine singuläre Punkte und keine Wendepunkte besitzt, eine konvexe Kurve. Ein Zug einer Lemniskate ist also eine konvexe Kurve, wenn er keinen mehrfachen Punkt und keinen Wendepunkt besitzt.

Der Satz IX läßt sich also auf folgende Weise ergänzen:

XX. *Enthält die Kreisscheibe* $|z-a| \leq r$ *die Mittelpunkte einer Lemniskate* $L_n(\varrho)$ *und ist* $\varrho \geq r\left(1+\operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}\right) = r.\ 3.613\ldots$, *so ist die Lemniskate eine konvexe Kurve.*

Ist nämlich $\varrho \geq r\left(1+\operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}\right)$, so liegt die Lemniskate $L_n(\varrho)$ nach Satz X außerhalb des Kreises $|z-\alpha| \geq \varrho - r = r \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$. Sie besitzt also keinen singulären Punkt und keinen Wendepunkt.

Aus dem Satz XIX folgt

XXI. *Sind* $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *die Kerne einer Lemniskate* $L_n(\varrho)$ *und ist*

$$\varrho \leq r = \frac{\operatorname{Min} |z_h - z_1|}{2n} \quad (h = 2, 3, \ldots, m),$$

so besitzt die Lemniskate im Kreise K_1: $|z-z_1| \leq r$ *einen konvexen Zug* Z_1.

Es gibt Lemniskaten n-ten Grades, die von 2n-ter zyklischer und 4-ter geometrischer Ordnung sind.

Der Kreis K_1 hat mit keinem Kreis $|z-z_h| = r$ $(h = 2, 3, \ldots, m)$ einen Punkt gemeinsam, weil $2r < |z_h - z_1|$ ist. Die Kreisscheibe K_1 enthält also einen Zug Z_1 der Lemniskate im Innern. Sie ist offenbar ein Teil des Bereichs $K\left(\frac{1}{2}\right)$ von XIX. Die Normale f in einem Punkt ζ von Z_1 bildet also mit dem Vektor $\overrightarrow{\zeta z_1}$ einen Winkel $\varphi < \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Wir müssen nur zeigen, daß ζ kein Wendepunkt ist.

Wir können annehmen, daß der Punkt ζ mit dem Nullpunkt und die Normale f mit der reellen Achse zusammenfällt. Ist dann p_h die

---

[14]) A. KNESER, Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven, *Math. Annalen*, **41** (1893), S. 349—376. Vgl. GY. v. SZ. NAGY, Einige Sätze über ebene Elementarkurven, *diese Acta*, **5** (1931), S. 83—89.

Vielfachheit des Mittelpunktes $z_h = x_h + iy_h = r_h(\cos\varphi_h + i \sin\varphi_h)$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$, so läßt sich die Gleichung (27) des Wendepunktes $\zeta = 0$ in der Form

$$W \equiv \sum_{h=1}^{m}{}' \frac{p_h \cos 2\varphi_h}{r_h^2} = 0 \tag{28}$$

schreiben. In dieser Gleichung ist $\cos 2\varphi_1 > \frac{1}{2}$, weil $\varphi_1 < \frac{\pi}{6}$ ist.

Aus den Annahmen des Satzes XXI folgt, daß

$$W \geqq \frac{p_1 \cos 2\varphi_1}{r_1^2} - \sum_{h=2}^{m}{}' \frac{p_h |\cos 2\varphi_h|}{r_h^2} >$$

$$> \frac{p_1}{2r_1^2} - \sum_{h=2}^{m}{}' \frac{p_h}{r_h^2} = \frac{1}{r_1^2}\left[\frac{p_1}{2} - \sum_{h=2}^{m}{}' \frac{p_h r_1^2}{r_h^2}\right] = W_0 > 0,$$

weil

$$W_0 \geqq \frac{1}{r_1^2}\left[\frac{p_1}{2} - \frac{\Sigma p_h}{(2n-1)^2}\right] = \frac{1}{r_1^2}\left[\frac{p_1}{2} - \frac{n-p_1}{(2n-1)^2}\right] > 0.$$

Der Punkt ζ ist also kein Wendepunkt des Zuges Z_1.

Bezeichnet d den Minimalabstand zwischen je zwei Kernen einer Lemniskate $L_n(\varrho)$, $\varrho \leqq \frac{d}{2n}$, so besitzt die Kurve in jedem Kreise $|z - z_h| \leqq \varrho$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ einen konvexen Zug. Ist $m = n$ und liegen die n Kerne auf einem Kreis K, so wird die Lemniskate von K in genau $2n$ Punkten getroffen, weil der Kreis K mit jedem Zug mindestens zwei, mit der Lemniskate aber nach Satz I höchstens $2n$ Punkte gemeinsam hat. Damit ist der Satz XXI bewiesen.[15])

(Eingegangen am 15. September 1947.)

---

[15]) Der Satz XXI ist nicht genau. Vermutlich ist ein einkerniger Zug einer Lemniskate eine konvexe Kurve. Der letzte Paragraph der Arbeit von Walsh (a. a. O.) erwähnt mehrere offene Fragen über die Lemniskaten.