Sur un produit infini.

Par MIKLÓS MIKOLÁS à Budapest.

C'est une remarque de M. LÉOPOLD FEJÉR sur la formule de WALLIS:

$$\frac{2^2}{1.3}\cdot\frac{4^2}{3.5}\cdot\frac{5^2}{5.7}\cdots=\frac{\pi}{2},$$

qui nous conduisait à considérer, d'une manière plus générale, les produits de type

$$P=\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{a_\nu+a_{\nu+1}+\ldots+a_{\nu+p}}{p+1}\right)^{p+1}}{a_\nu.a_{\nu+1}\ldots a_{\nu+p}}\qquad (p\geqq 1),$$

$\{a_\nu\}$ étant une suite croissante de nombres positifs.

Nous démontrons d'abord la proposition suivante:

I. *Pour que le produit infini P converge, il faut et il suffit que la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a_{\nu+p}}{a_\nu}-1\right)^2$$

soit convergente.

Comme tous les facteurs de P sont supérieurs à 1, il suffira de montrer que notre condition est nécessaire et suffisante pour la convergence de

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a_\nu+a_{\nu+1}+\ldots+a_{\nu+p}}{(p+1)\sqrt[p+1]{a_\nu a_{\nu+1}\ldots a_{\nu+p}}}-1\right).$$

Écrivons

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\frac{p+1+x_1+x_2+\ldots+x_p}{(p+1)\sqrt[p+1]{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_p)}}-1\,;$$

le terme général de la série résulte en posant

$$x_i=\alpha_{i\nu}=\frac{a_{\nu+i}}{a_\nu}-1\qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

On a d'après la formule de Taylor,

$$F(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{2(p+1)^2}\left(p \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{p} x_i x_k\right) + \sum_{i,k,l=1}^{p} A_{ikl} x_i x_k x_l \tag{1}$$

où

$$A_{ikl} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} (\vartheta x_1, \ldots, \vartheta x_p) \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1);$$

on a donc pour $x_1 \to 0, \ldots, x_p \to 0$,

$$A_{ikl} \longrightarrow \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}(0, \ldots, 0) = c_{ikl}.$$

C'est-à-dire, $\xi > 0$ désignant un nombre assez petit, on aura pour $\sum_{i=1}^{p} |x_i| < \xi$,

$$|A_{ikl}| < 2 \operatorname{Max} |c_{ikl}| = 2K \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, p).$$

D'autre part, on a pour $x_1 \geqq 0, \ldots, x_p \geqq 0$,

$$p \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{p} x_i x_k \geqq \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2 - 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{p} x_i x_k = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \geqq \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2$$

et

$$p \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{p} x_i x_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{p} (x_i - x_k{}^2 + \sum_{i=1}^{p} x_i^2.$$

On obtient donc par (1):

$$\left| \frac{F(x_1, \ldots, x_p)}{\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{p} (x_i - x_k)^2} - \frac{1}{2(p+1)^2} \right| = \tag{2}$$

$$= \frac{\left| \sum_{i,k,l=1}^{p} A_{ikl} x_i x_k x_l \right|}{p \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{p} x_i x_k} \leqq \frac{2K \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^3}{\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2} = 2Kp \sum_{i=1}^{p} x_i < \varepsilon,$$

pourvu que $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, $\sum_{i=1}^{p} x_i < \operatorname{Min}\left(\xi, \frac{\varepsilon}{2pK}\right)$.

1. Supposons que P converge; on a alors

$$\lim_{\nu \to \infty} F(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu}, \ldots, \alpha_{p\nu}) = 0. \tag{3}$$

En écrivant

$$y_0 = 1, \; y_i = \sqrt[p+1]{1 + \alpha_{i\nu}} \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

on a l'identité de Hurwitz-Muirhead[1])

---

[1]) A. Hurwitz, Über den Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels, *Journal für die reine und angewandte Math.*, **108** (1891), pp. 266–268; R. F. Muirhead, Proofs that the aritmetic mean is greater than the geometric mean, *Math. Gazette* **2** (1904), pp. 283–287.

$$F(\alpha_{1\nu}, \ldots, \alpha_{p\nu}) = \frac{y_0^{p+1} + y_1^{p+1} + \ldots + y_p^{p+1}}{p+1} - y_0 y_1 \ldots y_p = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2(p+1)!}\Big[\sum ! \overline{(y_0^p - y_1^p)(y_0 - y_1)} + \sum ! \overline{(y_0^{p-1} - y_1^{p-1})(y_0 - y_1) y_2} +$$

$$+ \sum ! \overline{(y_0^{p-2} - y_1^{p-2})(y_0 - y_1) y_2 y_3} + \ldots + \sum ! \overline{(y_0 - y_1)(y_0 - y_1) y_2 y_3 \ldots y_p}\Big]$$

où

$$\sum ! \overline{\varphi(y_0, y_1, \ldots, y_p)}$$

désigne la somme des $(p+1)!$ quantités résultant de $\varphi(y_0, y_1, \ldots, y_p)$ si l'on en permute les y_i.

Comme chaque terme entre crochets est évidemment positif, on trouve en particulier par (3) que, pour $\nu \to \infty$,

$$(y_i^p - y_0^p)(y_i - y_0) = (\sqrt[p+1]{1+\alpha_{i\nu}} - 1)^2 \big[1 + (1+\alpha_{i\nu})^{\frac{1}{p+1}} + \ldots + (1+\alpha_{i\nu})^{\frac{p-1}{p+1}}\big] \to 0$$

et par conséquent,

$$\lim_{\nu \to \infty} \alpha_{i\nu} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Faisant usage de (2), on voit donc que l'inégalité

$$\left(\frac{1}{2(p+1)^2} - \varepsilon\right) \sum_{\nu=N}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_{i\nu}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{p} (\alpha_{i\nu} - \alpha_{k\nu})^2\right] < \sum_{\nu=N}^{\infty} F(\alpha_{1\nu}, \ldots, \alpha_{p\nu})$$

subsiste pour $N = N(\varepsilon)$ suffisamment grand.

Il en résulte que les séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{i\nu}^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a_{\nu+i}}{a_\nu} - 1\right)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

sont convergentes.

2. Réciproquement, si $\Sigma \alpha_{p\nu}^2$ converge, on aura aussi

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{i\nu}^2 < \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{p\nu}^2 < \infty, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_{i\nu} - \alpha_{k\nu})^2 < \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{p\nu}^2 < \infty \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p).$$

Comme $\alpha_{i\nu} \to 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, on peut appliquer (2), ce qui donne

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} F(\alpha_{i\nu}, \ldots, \alpha_{p\nu}) < M\left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{i\nu}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{p} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_{i\nu} - \alpha_{k\nu})^2\right) < \infty,$$

$M > 0$ désignant une constante convenable. Donc P converge, c. q. f. d.

Dans le cas où $\{a_\nu\}$ est une progression arithmétique, on peut trouver pour P une expression fermée:

II. *Soit* $a_\nu = \varkappa\nu + \lambda$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, $(\varkappa, \lambda) = 1$. *Pour* p *pair* $(p = 2\varrho)$

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{a_0}{a_{2\varrho-1}}\right)^1 \left(\frac{a_1}{a_{2\varrho-2}}\right)^2 \ldots \left(\frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho}\right)^\varrho \tag{5}$$

et pour p impair,

$$\frac{1}{P}=\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right)\cdot\mathfrak{S}\left(\frac{3}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right)\cdots\mathfrak{S}\left(\frac{p}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right) \tag{6}$$

où

$$\mathfrak{S}(t,\gamma)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{(\nu+\gamma)^2}\right).\text{ [2]}$$

Soit p pair, $p=2\varrho$; on peut alors écrire

$$\prod_{\nu=0}^{N}\frac{a_\nu a_{\nu+1}\ldots a_{\nu+2\varrho-1}a_{\nu+2\varrho}}{a_{\nu+\varrho}^{2\varrho+1}}=\frac{a_0a_1^2\ldots a_{2\varrho-1}^{2\varrho}a_{2\varrho}^{2\varrho+1}\ldots a_N^{2\varrho+1}a_{N+1}^{2\varrho}\ldots a_{N+2\varrho-1}^{2}a_{N+2\varrho}}{a_\varrho^{2\varrho+1}a_{\varrho+1}^{2\varrho+1}\ldots a_{N+\varrho-1}^{2\varrho+1}a_{N+\varrho}^{2\varrho+1}}.$$

En simplifiant par les facteurs $a_{2\varrho},\ldots,a_N$ à la puissance $2\varrho+1$, on obtient

$$\frac{1}{P}=\lim_{N\to\infty}\frac{a_0^1a_1^2\ldots a_{2\varrho-1}^{2\varrho}}{a_\varrho^{2\varrho+1}\ldots a_{2\varrho-1}^{2\varrho+1}}\cdot\frac{a_{N+1}^{2\varrho}\ldots a_{N+2\varrho-1}^{2}a_{N+2\varrho}^{1}}{a_{N+1}^{2\varrho+1}\ldots a_{N+\varrho}^{2\varrho+1}}=$$

$$=\frac{a_0^1a_1^2\ldots a_{\varrho-1}^{\varrho}}{a_\varrho^{\varrho}a_{\varrho+1}^{\varrho-1}\ldots a_{2\varrho-1}^{1}}\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{a_{N+\varrho+1}^{\varrho}\ldots a_{N+2\varrho-1}^{2}a_{N+2\varrho}^{1}}{a_{N+1}^{1}\ldots a_{N+\varrho-1}^{\varrho-1}a_{N+\varrho}^{\varrho}}=\left(\frac{a_0}{a_{2\varrho-1}}\right)^1\left(\frac{a_1}{a_{2\varrho-2}}\right)^2\cdots\left(\frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho}\right)^\varrho.$$

Soit p maintenant impair et posons $q_\nu=\varkappa\left(\nu+\frac{p}{2}\right)+\lambda$. On aura

$$\prod_{\nu=0}^{N}\frac{a_\nu a_{\nu+1}\ldots a_{\nu+p}}{\left(\frac{a_\nu+a_{\nu+1}+\ldots+a_{\nu+p}}{p+1}\right)^{p+1}}= \tag{7}$$

$$=\prod_{\nu=0}^{N}\frac{\left(q_\nu-\varkappa\frac{p}{2}\right)\left[q_\nu-\varkappa\left(\frac{p}{2}-1\right)\right]\cdots\left(q_\nu-\frac{\varkappa}{2}\right)\left(q_\nu+\frac{\varkappa}{2}\right)\cdots\left[q_\nu+\varkappa\left(\frac{p}{2}-1\right)\right]\left(q_\nu+\varkappa\frac{p}{2}\right)}{q_\nu^{p+1}}=$$

$$=\prod_{\nu=0}^{N}\left[1-\frac{\varkappa^2\left(\frac{p}{2}\right)^2}{q_\nu^2}\right]\cdot\prod_{\nu=0}^{N}\left[1-\frac{\varkappa^2\left(\frac{p}{2}-1\right)^2}{q_\nu^2}\right]\cdots\prod_{\nu=0}^{N}\left[1-\frac{\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2}{q_\nu^2}\right]$$

et par conséquent, [3]

$$\frac{1}{P}=\prod_{\nu=0}^{\infty}\left[1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\nu+\frac{p}{2}+\frac{\lambda}{\varkappa}\right)^2}\right]\cdot\prod_{\nu=0}^{\infty}\left[1-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\nu+\frac{p}{2}+\frac{\lambda}{\varkappa}\right)^2}\right]\cdots\prod_{\nu=0}^{\infty}\left[1-\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^2}{\left(\nu+\frac{p}{2}+\frac{\lambda}{\varkappa}\right)^2}\right]=$$

$$=\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right)\cdot\mathfrak{S}\left(\frac{3}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right)\cdots\mathfrak{S}\left(\frac{p}{2},\frac{\lambda}{\varkappa}+\frac{p}{2}\right).$$

C. q. f. d.

---

[2]) Ainsi, par exemple,

$$\mathfrak{S}(t,1)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{(\nu+1)^2}\right)=\frac{\sin\pi t}{\pi t},\quad\mathfrak{S}\left(t,\frac{1}{2}\right)=\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{(2\nu+1)^2}\right)=\cos\pi t.$$

[3]) La convergence des produits (7) est évidente.

Envisageons deux cas particuliers: $a_\nu = \nu + 1$ et $a_\nu = 2\nu + 1$ avec $p = 2\varrho - 1$. En faisant usage de (6), on obtient pour $\varrho \geqq 1$

$$(8) \quad \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+2\varrho)}{(\nu+\varrho+\frac{1}{2})^{2\varrho}} =$$

$$= (3.5\dots(2\varrho-1))^3 \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\varrho} \prod_{\substack{m,n=1 \\ m<n}}^{\varrho} \frac{1}{[(2m-1)^2-(2n-1)^2]^2},$$

$$(9) \quad \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{[2(\nu+\varrho)]^{2\varrho}}{(2\nu+1)(2\nu+3)\dots(2\nu+4\varrho-1)} =$$

$$= 3.5\dots(2\varrho-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\varrho} \prod_{n=1}^{\varrho-1} \left|1-\left(\frac{1}{2n}\right)^2\right| \left|1-\left(\frac{3}{2n}\right)^2\right| \dots \left|1-\left(\frac{2\varrho-1}{2n}\right)^2\right|.$$

Si $\varrho = 1$, le dernier produit doit être remplacé par 1; (9) se transforme alors en la formule de WALLIS.

(Reçu le 9 septembre 1949)