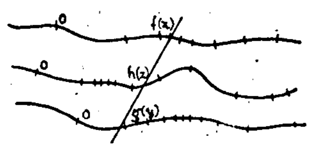
Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen.

Von J. ACZÉL in Szeged.

Einleitung.

Die Aufgabe, Differentialgleichungen für die Funktionen $z=z(x, y)$ anzugeben, deren Erfüllung notwendig und hinreichend ist, damit z durch eine Fluchtentafel darstellbar sei[1]), wurde von GRONWALL, KELLOGG und BARROW[2]) erledigt. DUPORCQ[3]) ermittelte eine Charakterisierung durch Funktionalgleichungen. Seine Funktionalgleichungen enthielten außer den veränderlichen Werten der Variabeln x, y, z auch deren konstante Werte. (Wir werden im Folgenden nicht von Funktionalgleichungen dieser Art sprechen, sondern von solchen, in denen nur veränderliche Werte der Variabeln vorkommen.)



Figur 1.

In § 1 geben wir Differentialgleichungen an, die notwendig und hinreichend sind, damit sich die Funktion durch solche Fluchtentafeln darstellen läßt, deren sämtliche Träger Gerade

---

[1]) Eine Fluchtentafel besteht bekanntlich aus drei geraden oder krummen Linien (den Trägern) deren jede in eine Skala (die Leiter) eingeteilt ist, die die drei Veränderlichen x, y und z darstellen (undzwar pflegen aus praktischen Gründen die Träger der zwei unabhängigen Veränderlichen meist an den beiden Rändern der Figur Platz zu nehmen). Die Verbindungslinie zweier Punkte an den beiden unabhängigen Skalen soll aus der dritten Leiter den Funktionswert herausschneiden (Figur 1). Die drei Skalen bedeuten offensichtlich drei Funktionen ($S_1=f(x)$, $S_2=g(y)$, $S_3=h(z)$): jede die betreffende Bogenlänge als Funktion der zugehörigen Veränderlichen x bzw. y bzw. z. — In der Praxis sind diese Funktionen immer streng monoton, dies wollen wir auch hier annehmen.

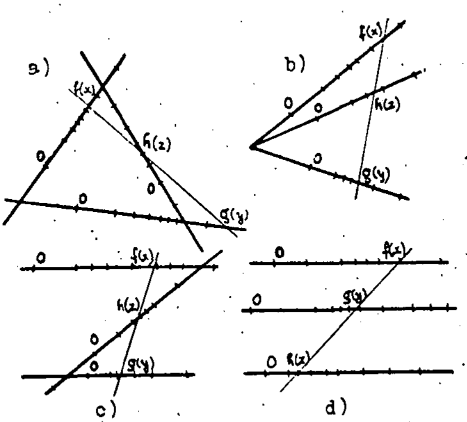
[2]) T. H. GRONWALL, Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés, *Journal de Math. pures et appliquées*, (6) **8** (1912), S. 59 - 102 O. D. KELLOGG, Nomograms with points in alignment, *Zeitschrift für Math. und Phys.*, **63** (1915), S. 159—173. — D. F. BARROW, Expressing a function of three variables in nomograph form, *Duke Math. Journal*, **15** (1948), S. 433—437.

[3]) M. E. DUPORCQ, Sur la théorie des abaques à alignement, *Bulletin des Sciences Math.*, (2) **22** (1898), S. 287—291.

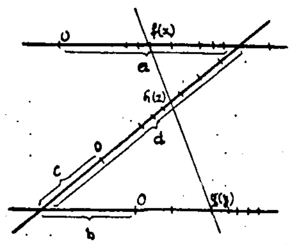
sind (Figur 2, Figur 3 und Figur 4). Da die Gültigkeit einer Fluchtentafel bei einer projektiven Transformation unverändert bleibt, können offenbar die vier Typen von geraden Nomogrammen auf jene zwei der Figur 3 und 4 reduziert werden[4]). Die Rechnungen bei diesen zwei Figuren zeigen auch, daß alle geraden Nomogramme dadurch charakterisiert sind, daß zu ihnen drei (streng monotone) Funktionen $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ angegeben werden können, derart, daß

$$F(x)+G(y)=H(z). \tag{1}$$

Die von uns anzugebenden Differentialgleichungen sind (einander äquivalent[5]) und) alle Folgen der einen schon von P. Saint Robert[6]) gefundenen Differentialgleichung dritter Ordnung (9), ihr Interesse liegt aber darin, daß sie den expliziten Ausdruck der Funktionen $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ aus $z=z(x,y)$ (und aus ihren Ableitungen) ermöglichen [(10)].



Figur 2.



$$\frac{a-f(x)}{d-c-h(z)}=\frac{g(y)+b}{h(z)+c}$$

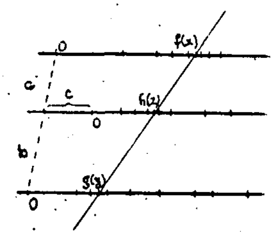
$$F(x)=\log\,[a-f(x)]$$

$$G(y)=-\log\,[g(y)+b]$$

$$H(z)=\log\left(\frac{d}{h(z)+c}-1\right)$$

$$F(x)+G(y)=H(z)$$

Figur 3.



$$\frac{f(x)-h(z)-c}{a}=\frac{h(z)+c-g(y)}{b}$$

$$F(x)=bf(x)$$

$$G(y)=ag(y)$$

$$H(z)=(a+b)h(z)+(a+b)c$$

$$F(x)+G(y)=H(z)$$

Figur 4.

4) Es genügt offenbar sogar, wenn man sich auf Nomogramme mit äquidistanten parallelen Trägern beschränkt. — Alle diese Tatsachen machen aber natürlich die geraden Nomogramme von anderen Typen gar nicht überflüßig; oft geben diese günstigere Darstellungsmöglichkeiten (z. B. leichter konstruierbare und ablesbare Skalenfunktionen) als die scheinbar einfachste parallele Fluchtentafel.

5) Siehe J. Aczél, Einige, aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen (zu erscheinen in *diesen Acta*, sowie auch J. Aczél—St. Fenyő, Über die Theorie der Mittelwerte, *diese Acta*, **11** (1948), S. 239–245. Aus letzterer Arbeit ist es auch ersichtlich, zur Lösung welcher Frage die Differentialgleichungen des § 1 den Verf. ursprünglich begegneten. — Damit die Differentialgleichungen des § 1 überhaupt einen Sinn haben, setzen wir die Funktionen $z(x,y)$, $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ differenzierbar, meist sogar zweimal oder dreimal differenzierbar voraus.

6) P. Saint Robert, De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante, *Memorie delle R. Accad. di Scienze di Torino*, (2) **25** (1871), S. 53–72.

In § 2 behandeln wir Spezialfälle, in denen einige der Skalen einander ähnlich sind und wir charakterisieren die Funktionen, die durch Nomogramme dieser Art darstellbar sind, mittels Angabe von Randbedingungen zu den Differentialgleichungen des § 1, bzw. mittels Spezialisierung dieser Differentialgleichungen, bzw. mittels Funktionalgleichungen. [In diesen Spezialfällen fallen mehrere der Funktionen [(10)] $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ zusammen. Für diese erhalten wir in dieser Weise mehrfache Ausrechnungsmöglichkeiten.] Eine dieser Funktionalgleichungen (§ 2d) ist mit einer von L. FEJÉR gestellten Frage[7]) eng verbunden.

In § 3 werden einige Probleme aufgeworfen.

§ 1.

Wir beweisen den folgenden

Satz. *Damit es zur Funktion $z(x, y)$ drei streng monotone (und differenzierbare) Funktionen $F(t)$, $G(t)$ und $H(t)$ derart gibt, daß die Relation*

$$(1) \qquad F(x)+G(y)=H(z), \quad d.\ h. \quad z=H^{-1}[F(x)+G(y)]$$

gilt, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktion z in ihren beiden Veränderlichen streng monoton (und differenzierbar) ist und einem der folgenden acht äquivalenten Differentialgleichungen genügt: [5])

$$(2)\ \frac{z_x}{z_y}=\frac{f(x)}{g(y)},^{8)} \quad (3)\ z_x=\frac{f(x)}{h(z)}, \quad (4)\ z_y=\frac{g(y)}{h(z)}, \quad (5)\ \frac{f(x)}{z_x}=\frac{g(y)}{z_y}=h(z),$$

$$(6)\ \frac{z_{xy}}{z_y}-\frac{z_{xx}}{z_x}=X(x), \quad (7)\ \frac{z_{xy}}{z_x}-\frac{z_{yy}}{z_y}=Y(y), \quad (8)\ \frac{z_{xy}}{z_x z_y}=Z(z),$$

$$(9)\ \frac{z_{xxy}}{z_x}-\frac{z_{xx}z_{xy}}{z_x^2}=\frac{z_{xyy}}{z_y}-\frac{z_{xy}z_{yy}}{z_y^2}{}^{6)}, \ d.h.\ z_x^2(z_{xy}z_{yy}-z_{xyy}z_y)=z_y^2(z_{xx}z_{xy}-z_xz_{xxy}).$$

Diese Gleichungen geben auch die explizite Form von $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ an:

$$F(t)=c\int f(t)\,dt=\int \exp\left[-\int X(t)\,dt\right]dt, \quad G(t)=c\int g(t)\,dt=\int \exp\left[-\int Y(t)\,dt\right]dt,$$

$$H(t)=c\int h(t)\,dt=\int \exp\left[-\int Z(t)\,dt\right]dt.$$

Beweis. Die Notwendigkeit und das Hinreichen der strengen Monotonie (und Differenzierbarkeit) von z zur strengen Monotonie (und Differenzierbarkeit) der Funktionen F, G, H bedarf keines Beweises.

Die Äquivalenz der angegebenen Differentialgleichungen untereinander erhellt sich sofort aus der Tatsache, daß der Gleichung (9) alle übrigen

---

[7]) Siehe J. HORVÁTH, Note sur un problème de L. FEJÉR, *Bulletin École Polytechnique Jassy*, **3** (1948), S. 164–168.

[8]) Diese Gleichung würde für einen Spezialfall unseres Problems (siehe § 2) von N. H. ABEL gefunden: Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen x und y wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Function von z, x und y ist, *Journal für reine und angew. Math.*, 1 (1826), S. 11–15.

äquivalent sind. Die Gleichung (5) ist eine einfache Zusammenfassung der Gleichungen (2), (3), (4). Durch Logarithmieren und Derivieren nach x bzw. nach y folgen aus (2) die Gleichungen (6) bzw. (7) und aus (4), bzw. (3) die Gleichung (8). Derivieren wir (6) bzw. (7) nach y bzw. x, so erhalten wir (9). Aber auch aus der Gleichung (8) folgt (9), indem wir die Jacobische Determinante der beiden Funktionen $z(x, y)$ und $w(x, y) = \frac{z_{xy}}{z_x z_y}$ bilden, die wegen der aus dem Bestehen der Gleichung (8) folgenden Abhängigkeit der Funktionen z und w gleich 0 ist, und dies ist eben die Gleichung (9). Da alle gemachten Schlüsse umkehrbar sind, so ist die Äquivalenz unserer Gleichungen vollständig bewiesen. Unsere Betrachtungen zeigen auch, daß

$$X(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}, \quad Y(t) = -\frac{g'(t)}{g(t)}, \quad Z(t) = -\frac{h'(t)}{h(t)}. \tag{10}$$

Zum Beweise der Notwendigkeit und des Hinreichens unserer Gleichungen für das Bestehen von (1) genügt es also die Notwendigkeit bzw. das Hinreichen *einer* dieser Gleichungen, etwa der Gleichung (2) zu beweisen.

Derivieren wir (1) nach x, bzw. nach y, so erhalten wir $F'(x) = H'(z) z_x$ und $G'(y) = H'(z) z_y$, woraus (2) [und auch (3) und (4)] folgt.

Umgekehrt folgt aus (2):

$$\begin{vmatrix} z_x & z_y \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[c\int f(x)\,dx + c\int g(y)\,dy\right] & \frac{\partial}{\partial y}\left[c\int f(x)\,dx + c\int g(y)\,dy\right] \end{vmatrix} =$$

$$= c z_x g(y) - c z_y f(x) = 0;$$

also $[c\int f(x)\,dx + c\int g(y)\,dy = H(z)]$, $F(x) + G(y) = H(z)$. Aus (10) folgt dann auch die letzte Aussage des Satzes.

§ 2.

Einige interessanten Spezialfälle, in denen es zueinander ähnliche Leiter gibt, können folgenderweise charakterisiert werden:

a) Betrachten wir zuerst parallele Träger, wo die zwei unabhängigen Skalen einander ähnlich sind (Figur 5). Dies bedeutet offensichtlich

$$aF(x) + bF(y) = H(z), \text{ d. h. } z = H^{-1}[aF(x) + bF(y)]. \tag{11}$$

Man sieht unmittelbar, daß die in dieser Weise darstellbaren Funktionen vollständig charakterisiert werden wenn man einer unserer Differentialgleichungen (2)—(9) noch die Randbedingung

$$\frac{z_x(t, t)}{z_y(t, t)} = \text{konstant}\left(= \frac{a}{b}\right) \tag{12}$$

beilegt. Es ist also $f(t) = k g(t)$ und $X(t) = Y(t)$. Die Charakterisierung kann auch durch Spezialisierung der Gleichung (2) erfolgen:

$$(2') \qquad \frac{z_x}{z_y} = k\,\frac{f(x)}{f(y)}$$

Die Bedeutung der durch (11) angegebenen Funktionen besteht darin, daß eben aus ihnen durch „Mittelbildung" d. h. durch Lösung der Gleichung $z(m, m) = z(x, y)$, die Mittelwerte der Gestalt $m(x, y) = F^{-1}[(1-q)\,F(x) + q\,F(y)]$ gebildet werden können. [Daß diese wirklich Mittelwerte sind, ist klar: $m(t, t) = t$.] Dies sind die sogenannten „quasiarithmetischen Mittelwerte". Sie fallen mit den sogenannten „bisymmetrischen Mittelwerten" [9]) zusammen. [Siehe unter c)].

b) Sind alle drei Skalen einander ähnlich (Figur 6), so haben wir

$$(13) \qquad aF(x) + bF(y) + c = F(z), \text{ d. h. } z = F^{-1}[aF(x) + bF(y) + c].$$

Es wurde an einer anderen Stelle[9]) bewiesen, daß diese Funktionen dadurch charakterisiert sind, daß sie „bisymmetrische Funktionen" sind, d. h. der Funktionalgleichung

$$(14) \qquad z[z(x_1, y_1), z(x_2, y_2)] = z[z(x_1, x_2), z(y_1, y_2)]$$

genügen. Mit Differentialgleichungen können die Funktionen der Form (13) auch charakterisiert werden[5]), indem wir einer der Differentialgleichungen (2)–(9) *die Randbedingungsgleichung im erweiterten Sinne*

$$(8') \qquad \frac{z_{xy}}{z_x z_y} = \frac{z_{xy}[z(x, y), z(x, y)]}{z_y[z(x, y), z(x, y)]} - \frac{z_{xx}[z(x, y), z(x, y)]}{z_x[z(x, y), z(x, y)]},$$

oder

$$(8'') \qquad \frac{z_{xy}}{z_x z_y} = \frac{z_{xy}[z(x, y), z(x, y)]}{z_x[z(x, y), z(x, y)]} - \frac{z_{yy}[z(x, y), z(x, y)]}{z_y[z(x, y), z(x, y)]}$$

und die eigentliche Randbedingung (12) beifügen. [Es ist also $X(t) = Y(t) = Z(t)$.] Statt (12) kann wieder die spezielle Differentialgleichung (2′) vorausgesetzt werden, dies macht aber (8′) oder (8″) nicht überflüssig. Unsere Differentialgleichungen (2)—(9) sowie die Bedingungsgleichungen (12), (8′) und (8″) wurden auch aus der Funktionalgleichung (14) *direkt* abgeleitet[5]).

c) Sind die drei Skalen nicht nur ähnlich, sondern sogar gleich, und fallen auch ihre Anfangspunkte in eine Gerade (Figur 7), so erhalten wir:

$$(15) \qquad (1-q)\,F(x) + q\,F(y) = F(z), \text{ d. h. } z = F^{-1}[(1-q)\,F(x) + q\,F(y)].$$

Diese Funktionen sind die quasiarithmetischen Mittelwerte. Sie sind[9]) durch die Funktionalgleichung (14) der Bisymmetrie und durch

$$(16) \qquad z(t, t) = t$$

charakterisiert. Mit Differentialgleichungen geschieht die Charakterisierung, indem wir einer der Gleichungen (2)—(9) außer der Randbedingung (12) noch die zweite Randbedingung (16) hinzunehmen (beide geben die Werte

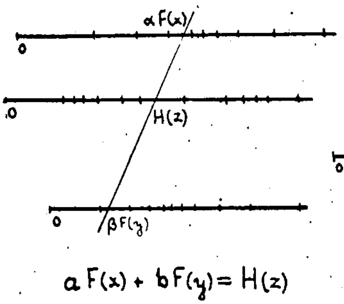
---

[9]) Siehe J. Aczél, On mean values, *Bulletin of the American Math. Society*, **54** (1948), S. 392—400.

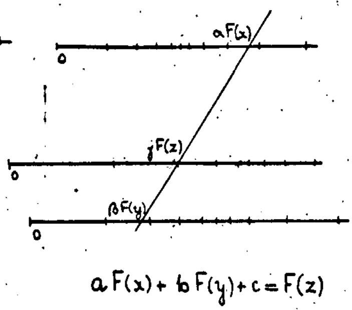
der Funktion bzw. ihrer Derivierten auf der Gerade $y=x$ an). (In unserem Falle kann offensichtlich (12) durch

$$(12') \qquad z_y(t,t) = \text{konstant}\ (=q)$$

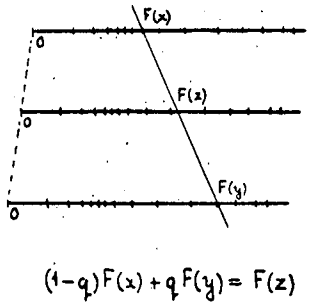
ersetzt werden.) Es wurde an anderer Stelle[5]) bewiesen, daß aus der Funktionalgleichung (14) nebst der Bedingung (16) *direkt* die Differentialgleichungen (2)—(9), sowie die Randbedingungen (12) und (12′) abgeleitet werden können [(2) ergibt sich auch hier in der Form (2′)]



Figur 5.



Figur 6.



Figur 7.

d) In Figur 8 wird das Nomogramm der Figur 7 noch weiter spezialisiert, indem auch noch die drei Träger äquidistant gezeichnet wurden. Dies bedeutet offenbar

$$(17) \qquad F(x)+F(y)=2F(z), \text{ d. h. } z=F^{-1}\left[\frac{F(x)+F(y)}{2}\right];$$

das sind die symmetrischen quasiarithmetischen Mittelwerte. Sie und nur sie[9]) erfüllen die Gleichungen (14), (16) und

$$(18) \qquad z(x,y)=z(y,x).$$

Bei der Charakterisierung durch Differentialgleichungen[5]) braucht man außer einer von unseren Differentialgleichungen und der Randbedingung (16), [statt (12)] die Randbedingung

$$(12'') \quad z_x(t,t)=z_y(t,t) \qquad \left[(2'') \quad \frac{z_x}{z_y}=\frac{f(x)}{f(y)}\right].$$

Übrigens folgt aus (16) und (18) die Gleichung (12′) mit $q=\frac{1}{2}$. Auch hier bleibt natürlich die Bemerkung am Ende von c) über die direkte Ableitbarkeit der Differentialgleichungen gültig.

(17) läßt sich auch in der Form $F^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)=z[F^{-1}(u), F^{-1}(v)]$ schreiben. Das Interesse in der Untersuchung dieser Gleichung wurde von L. Fejér[7]) gezeigt.

Natürlich kann man ähnlich wie wir es hier getan haben, auch die Fälle a) und b) symmetrisieren durch das „in die Mitte-Rücken" der z-Skala (und durch Gleichsetzung der Skaleneinteilung der zwei unabhängigen Träger).

e) Sind die drei Träger parallel und äquidistant, fallen die Anfangspunkte der Skalen in eine Gerade und sind die zwei unabhängigen Skalen einander gleich und die z-Skale ihnen ähnlich mit halbiertem Maßstabe (Figur 9), so bedeutet dies

$$F(x)+F(y)=F(z), \text{ d. h. } z=F^{-1}[F(x)+F(y)]. \tag{19}$$

Diese Funktionen sind, wie es gezeigt wurde[10]), dadurch charakterisiert, daß sie „assoziativ" sind, d. h. der Funktionalgleichung

$$z[z(x_1, x_2), x_3]=z[x_1, z(x_2, x_3)] \tag{20}$$

genügen. Wie wir es an anderer Stelle[5]) bewiesen haben, können die Funktionen (19) mit den aus (3) bzw. (4) spezialisierten Differentialgleichungen

$$(3') \quad z_x=\frac{f(x)}{f(z)} \quad \text{oder} \quad (4') \quad z_y=\frac{g(y)}{g(z)}$$

nebst der Randbedingung (12″) charakterisiert werden. Diese folgen auch *direkt* aus (20)[5]). [ABEL[8]) leitete aus dieser Funktionalgleichung (20) *und* der Symmetrie (18) die Gleichungen (2″) und (19) ab.]

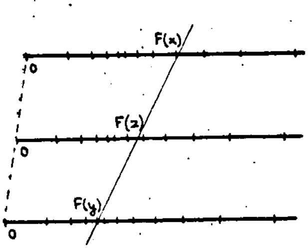
f) Sind die Träger parallel und äquidistant, fallen die Anfangspunkte in dieselbe Gerade und ist die z-Skala der x-Skala wieder mit halbem Maßstabe ähnlich, während die y-Skala einfach linear ist (Figur 10), so haben wir

$$F(x)+y=F(z), \quad \text{d. h.} \quad z=F^{-1}[F(x)+y]. \tag{21}$$

In einer in Vorbereitung stehenden Arbeit von J. MIKUSINSKI und dem Verf. wird gezeigt, daß diese Funktionen und nur diese die „Translationsgleichung" erfüllen:

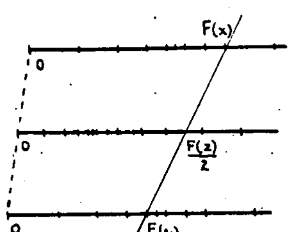
$$z(x, y_1+y_2)=z[z(x, y_1), y_2]. \tag{22}$$

Es wurde auch bewiesen[5]), daß die Funktionen (21) mit der [aus (22) direkt



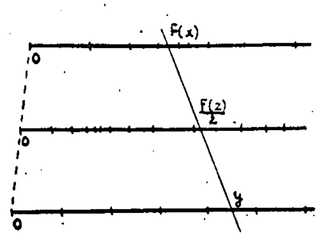
$\frac{F(x)+F(y)}{2}=F(z)$

Figur 8.



$F(x)+F(y)=F(z)$

Figur 9.



$F(x)+y=F(z)$

Figur 10.

---

[10]) J. ACZÉL, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bulletin de la Société Math. de France,* **76** (1948), S. 59–64.

ableitbaren] Differentialgleichung (23) $\frac{z_x}{z_y}=f(x)$ (von y unabhängig) *oder*

$$(24)\quad z_y=k(z)\quad \textit{oder}\quad (25)\quad \frac{z_{xy}}{z_x}=\frac{z_{yy}}{z_y}$$

und der Randbedingung (16′) $z(x,0)=x$ vollständig charakterisiert werden können.

§ 3.

Dem Leser wird es wohl auffallen, daß die Funktionstypen in § 1 (1) und § 2 a) (11) durch Funktionalgleichungen nicht charakterisiert wurden [da hier mehr als eine willkürliche Funktion auftritt, konnten wir ja *nicht* Funktionalgleichungen *desselben Typus* wie (14), (20), (22) erwarten], während in § 2 b) und e) eben die einer der ursprünglichen Differentialgleichungen (2)—(9) beigefügten charakteristischen *(eigentlichen)* Randbedingungen fehlten; dagegen gelang es uns in § 2 b), c), d), e), f) nicht mit der Spezialisierung *einer* der ursprünglichen Differentialgleichungen, *ohne Randbedingungen* auszukommen.

Es wäre kaum uninteressant diese Betrachtungen in dem Sinne zu verallgemeinern, daß jeder Funktionentypus in allen drei Weisen charakterisiert sei: A) durch eine Funktionalgleichung, B) durch eine spezialisierte Differentialgleichung, C) durch Beifügung von (eigentlichen) Randbedingungen zu einer ursprünglichen Differentialgleichung.

In manchen Spezialfällen ist es möglich, diese Lücken auszufüllen. Bezeichnen wir z. B. in § 2 e) die zweite Umkehrfunktion von $z=z(x,y)$ mit $y=z^{-1}(x,z)$. Falls die Funktion $e(x)=z^{-1}(x,x)$ existiert [wie man aus dem Beispiel der Funktion $z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$ sieht, muß sie nicht immer existieren; es ist leicht einzusehen, daß sie, falls existiert, konstant sein muß], so können wir die ursprünglich fehlende Charakterisierungsweise C) der Funktionen (19) ermitteln, indem wir der ursprünglichen Differentialgleichung (3) [*oder* (4)] die beiden Randbedingungen $z_x[x,e(x)]=1$ *und* $z_y[x,e(x)]=1$ beifügen. Die ähnliche Erledigung von Fällen, wo $e(x)$ nicht existiert, wäre hier besonders interessant.

(Eingegangen am 4. September 1949.)