Remarques sur l'approximation des fonctions continues.

Par J. FAVARD à Paris.

1. On sait fort peu de choses sur l'approximation orientée dans les espaces fonctionnels réticulés. En dehors de quelques évidences, seuls sont connus un petit nombre de résultats dûs presque tous à M. L. FEJÉR[1]); ils concernent les séries de cosinus (ou de sinus) des fonctions positives monotones (ou concaves) dans l'intervalle $0 < x < \pi$.

Dans cette note nous allons nous occuper d'un problème analogue, mais avec des données interpolatrices, c'est-à-dire que sont connues les valeurs de la fonction sur un ensemble dénombrable de valeurs de la variable, dense sur le segment où la fonction est définie.

Le résultat que nous avons en vue se déduit d'une remarque sur la suite des polynomes de Bernstein donnant le théorème qui nous intéresse dans le cas des points divisant le segment en parties égales.

Chemin faisant nous indiquons une voie nouvelle pour établir un résultat que j'ai déjà donné[2]) sur les fonctions dont les différences divisées d'un ordre donné restent bornées ou ne changent pas de signe.

2. Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, définie et continue, par exemple, pour $0 \leqq x \leqq 1$; pour n entier naturel posons:

$$\Delta_n^1(k) = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$\Delta_n^2(k) = \Delta_n^1(k+1) - \Delta_n^1(k) = f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et, en général,

$$\Delta_n^p(k) = \Delta_n^{p-1}(k+1) - \Delta_n^{p-1}(k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-p).$$

Désignons par $x_0, x_1, \ldots$ des valeurs différentes de la variable, comprises dans le segment: $0 \leqq x \leqq 1$; en posant $[x] = f(x)$, les différences divisées

1) L. FEJÉR. Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe, *Zeitschrift für angewandte Math. und Mech.*, **13** (1933), pp. 80–88; On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series, *Journal of Math. and Phys.*, **13** (1934), pp. 1–17.

2) J. FAVARD, Sur une généralisation de la condition de Lipschitz d'ordre un, *Mathematica, Timişoara*, **18** (1942), pp. 26–36.

d'ordre $1, 2, \ldots, p$ sont définies de proche en proche par:

$$[x_0, x_1] = \frac{[x_0]-[x_1]}{x_0-x_1}; \ldots; [x_0, x_1, \ldots, x_p] = \frac{[x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}]-[x_1, x_2, \ldots, x_p]}{x_0-x_p};$$

ce sont des fonctions symétriques des noeuds, et si la dérivée d'ordre p de $f(x)$ existe et est continue, on a

$$[x_0, x_1, \ldots, x_p] = \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}$$

où ξ désigne un nombre compris entre les x_i $(0 \leqq i \leqq p)$.

On trouve immédiatement

$$\left[\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right] = n\Delta_n^1(k), \ldots, \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p}{n}\right] = \frac{n^p}{p!}\Delta_n^p(k), \ldots.$$

Enfin la relation

$$[x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p, x_{p+1}](x_{p+1}-x_0) = [x_0, \ldots, x_p](x_i-x_0) + \\ + [x_1, \ldots, x_{p+1}](x_{p+1}-x_i)$$

montre qu'étant donné un ensemble quelconque de noeuds, les différences divisées d'ordre p sont comprises entre les bornes inférieure et supérieure des différences divisées formées avec $p+1$ points consécutifs; de cette remarque et de la continuité de la fonction, on déduit que si, pour p donné, les quantités

$$\frac{n^p}{p!}\Delta_n^p(k) \qquad (k=0, \ldots, n-p;\ n \geqq p)$$

restent bornées en module, ou gardent un signe constant, il en est de même des différences divisées $[x_0, x_1, \ldots, x_p]$, quelles que soient les valeurs x_i.

3. On sait que, lorsque n augmente indéfiniment, la suite des polynomes de Bernstein

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

converge uniformément vers $f(x)$ dans le segment $0 \leqq x \leqq 1$; un calcul simple donne

$$B_n'(f) = n\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n^1(k)\binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-k-1},$$

c'est-à-dire que $B_n'(f)$ est le polynome de Bernstein d'ordre $n-1$ d'une fonction qui, au point $\frac{k}{n-1}$, prend la valeur $n\Delta_n^1(k) = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. De là on passe immédiatement à la dérivée d'ordre p $(\leqq n)$

$$B_n^{(p)}(f) = n(n-1)\ldots(n-p+1)\sum_{k=0}^{n-p} \Delta_n^p(k)\binom{n-p}{k} x^k(1-x)^{n-k-p} =$$

$$= p!\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-p}\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \ldots, \frac{k+p}{n}\right]\binom{n-p}{k} x^k(1-x)^{n-k-p}.$$

Ces relations montrent immédiatement qu'une fonction telle que

$$\Delta_n^p(k) \geqq 0 \qquad (k=0,\ldots,n-p\,;\; n \geqq p)$$

peut être approchée par une suite de polynomes ayant une dérivée d'ordre p positive; en particulier toute fonction monotone, ou concave, ou convexe peut être approchée par une suite de polynomes monotones, ou concaves, ou convexes à partir de la suite des données $\left\{ f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$.

4. À titre d'application, montrons par exemple qu'une fonction continue telle que

$$|n^2 \Delta_n^2(k)| \leqq M_2$$

où M_2 désigne une constante, admet presque-partout une dérivée seconde bornée. Soit M_0 une borne supérieure de $|f|$, on a

$$|B_n(f)| \leqq M_0, \quad |B_n''(f)| \leqq M_2;$$

il s'ensuit que

$$|B_n'(f)| \leqq 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

Les polynomes $\{B_n'(f)\}$ forment donc une suite uniformément bornée et également continue en vertu de $|B_n''| \leqq M_2$; on peut donc en extraire une suite $B_\nu'(f)$ convergeant uniformément vers une limite qui est d'ailleurs la fonction $f'(x)$ dont l'existence est ainsi démontrée. On voit aussi que l'extraction conduisant de la suite $\{B_n'\}$ à la suite $\{B_\nu'\}$ n'est pas nécessaire, puisque toute suite convergente extraite de $\{B_n'\}$ doit converger vers $f'(x)$; la suite $\{B_n'\}$ converge donc uniformément vers $f'(x)$ qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre 1 à cause de $|B_n''| \leqq M_2$, ce qui achève la démonstration.

Par des considérations analogues, on voit plus généralement qu'une fonction $f(x)$ continue telle que

$$|n^p \Delta_n^p(k)| \leqq M_p,$$

admet presque partout une dérivée bornée d'ordre p.

Remarquons d'ailleurs que, dans la démonstration ci-dessus ($p=2$), la convergence de B_n' vers f' aurait pu être démontrée directement grâce à l'inégalité, meilleure que celle utilisée,

$$|B_n'(f)| \leqq \inf \left\{ 2M_0 + \frac{M_2}{2},\ 2\sqrt{M_0 M_2} \right\},$$

mais la démonstration du texte se généralise plus facilement pour p quelconque.

Lorsque $f(x)$ est telle que $\Delta_n^p(k) \geqq 0$, on peut montrer, d'une manière analogue, que $f(x)$ admet presque partout dans le segment: $\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ ($0<\varepsilon<\frac{1}{2}$), une dérivée bornée d'ordre $p-1$ croissante ($0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, aussi petit que l'on veut); ce théorème s'obtient à partir du résultat suivant:

Si une fonction $\varphi(x)$, continue pour $0 \leqq x \leqq 1$, admet des dérivées jusque à l'ordre p, la dernière non décroissante, alors les dérivées $\varphi^{(q)}(x)$ $(q < p)$ sont bornées dans le segment $\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$, par des nombres qui ne dépendent que de ε et du maximum de $|\varphi(x)|$.

5. Venons enfin au résultat que nous voulons obtenir. Donnons une suite de noeuds $\{s_k^n\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ avec

$$0 \leqq s_1^n < s_2^n < \ldots < s_n^n \leqq 1;$$

supposons cette suite dense dans le segment $0 \leqq x \leqq 1$. Pour une fonction $f(x)$ continue, la fonction $\varphi_n(x)$ telle que: $\varphi_n(s_k^n) = f(s_k^n)$ $(0 \leqq k \leqq n)$, linéaire entre s_k^n et s_{k+1}^n $(0 \leqq k \leqq n-1)$ et constante pour $0 \leqq x \leqq s_0^n$ et pour $s_n^n \leqq x \leqq 1$, tend uniformément vers $f(x)$ lorsque n augmente indéfiniment, on a donc

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Or $\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)$ est une combinaison linéaire de deux $f(s_k^n)$ au plus, par suite on peut écrire

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(s_k^n)\, A_k^n(x) \tag{1}$$

où les $A_k^n(x)$ sont des polynomes de degré n au plus qui ne dépendent que des s_k^n et tels que $A_k^n(x) \geqq 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$.[3]

Lorsque $f(x)$ est de plus monotone, φ_n l'est aussi et dans le même sens, ainsi que le polynome du second membre de (1).

Si l'on suppose maintenant la fonction $f(x)$ convexe (ou concave), la fonction $\varphi_n(x)$ définie comme ci-dessus, sauf dans les segments $0 \leqq x \leqq s_0^n$ et $s_n^n \leqq x \leqq 1$ où $\varphi_n(x)$ est le prolongement linéaire de sa détermination d'entre s_0^n et s_1^n, respectivement d'entre s_{n-1}^n et s_n^n, est, elle aussi, convexe (ou concave) et tend uniformément vers $f(x)$. Donc on a le théorème:

La suite $\{s_k^n\}$ étant donnée, on peut indiquer une suite de polynomes $\{B_k^n(x)\}$ telle que, pour toute fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$,

$$P_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(s_k^n)\, B_k^n(x)$$

tende uniformément vers $f(x)$, et que de plus, pour toute fonction $f(x)$ convexe (ou concave), $P_n(f; x)$ soit également convexe (ou concave).

Lorsque $f(x)$ admet une dérivée d'ordre $p > 1$, monotone dans l'intervalle $0 < x < 1$, je ne possède pas de méthode permettant, en général, de former, à partir de la connaissance des $f(s_k^n)$, une suite de polynomes à dérivée $p^{\text{ième}}$ monotone et tendant vers $f(x)$.

(Reçu le 3 novembre 1949)

[3]) J'ai donné ce résultat dans un article "Sur l'interpolation", *Bulletin de la Société Math. de France*, 67 (1939), pp. 102–113.