Über den Zusammenhang der Krümmungsaffinoren in zwei eineindeutig aufeinander abgebildeten Finslerschen Räumen.

Von O. VARGA in Debrecen.

Entsprechen einander zwei Finslersche Räume in einer Abbildung umkehrbar eindeutig, so ist dieser Tatbestand damit äquivalent, daß ein und derselben Mannigfaltigkeit zwei verschiedene Finslersche Maßbestimmungen aufgeprägt sind. Wir wollen bei der Untersuchung des Zusammenhanges der Krümmungsaffinoren, die zu den beiden aufeinander abgebildeten Mannigfaltigkeiten gehören, von dieser Auffassung ausgehen. Der Zusammenhang der Krümmungsaffinoren wird dann durch diejenigen typischen Affinoren bestimmt, die bei der Bildung der Differenz der zwei verschiedenen Übertragungen auftreten.

1. Affinoren, die in der Differenz der beiden Übertragungen auftreten.

Seien $L(\xi, v)$ bzw. $\bar{L}(\xi, v)$ die verschiedenen Grundfunktionen zweier Finslerscher Maßbestimmungen, die zu derselben Linienelementmannigfaltigkeit $(\xi^\varkappa, v^\varkappa)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ gehören [1]).

Die invarianten Differenziale der Einheitsvektoren

$$(1,1) \qquad l^\varkappa = \frac{v^\varkappa}{L}, \quad \bar{l}^\varkappa = \frac{v^\varkappa}{\bar{L}}$$

sind durch

$$(1,2) \qquad \begin{aligned} \delta l^\varkappa &\stackrel{\text{def}}{=} \omega^\varkappa(d) = dl^\varkappa + \frac{1}{L} G^\varkappa_\varrho \, d\xi^\varrho, \\ \delta \bar{l}^\varkappa &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{\omega}^\varkappa(d) = d\bar{l}^\varkappa + \frac{1}{\bar{L}} \bar{G}^\varkappa_\varrho d\xi^\varrho \end{aligned}$$ [2])

[1]) ξ^ν bezeichnet die Koordinaten des Punktes, während v^ν die homogenen Koordinaten der Richtung sind.

[2]) Siehe E. CARTAN, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, **79** (Paris, 1934), S. 16, Formel XIII. Wir haben im Text G^ν_ϱ statt $\frac{\partial G^\nu}{\partial v^\varrho}$ gesetzt.

bestimmt. Wegen (1, 1) und (1, 2) ist der Zusammenhang von $\omega^\varkappa$ und $\overline{\omega}^\varkappa$ durch

$$(1,3) \qquad \overline{\omega}^\varkappa(d) = \frac{L}{\overline{L}}\,\omega^\varkappa + V^\varkappa_\varrho d\xi^\varrho + l^\varkappa d\left(\frac{L}{\overline{L}}\right)$$

gegeben, wobei für den Affinor $V^\varkappa_\varrho$

$$(1,4) \qquad V^\varkappa_\varrho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\overline{L}}\,(\overline{G}^\varkappa_\varrho - G^\varkappa_\varrho)$$

gilt.

Die zu $L(\xi, v)$ bezw. $\overline{L}(\xi, v)$ gehörigen Übertragungen sind durch Pfaffsche Formen ω^ν_ϱ bezw. $\overline{\omega}^\nu_\varrho$ der Gestalt

$$(1,5) \qquad \omega^\nu_\varrho(d) = A_{\lambda\varrho}{}^{\nu}\,\omega^\lambda(d) + \Gamma^{*\nu}_{\lambda\varrho}\,d\xi^\lambda$$

bestimmt und entsprechendes gilt natürlich für die überstrichenen Größen $\overline{\omega}^\nu_\varrho$[3]).

Wir wollen nun die Differenz der beiden Pfaffschen Formen, als Form der ω^ν und $d\xi^\nu$ bestimmen. Wegen (1, 3) und der Eigenschaft

$$(1,6) \qquad A_{\lambda\varrho}{}^{\nu}\,v^\lambda = A_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\,v^\lambda = 0 \text{ [4])}$$

ergibt sich

$$(1,7) \qquad \varrho^\nu_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\omega}^\nu_\lambda - \omega^\nu_\lambda = E_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\,\omega^\varrho + F_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\,d\xi^\varrho,$$

wobei

$$(1,8) \qquad E_{\varrho\lambda}{}^{\nu} = \overline{A}_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\,\frac{L}{\overline{L}} - A_{\varrho\lambda}{}^{\nu},$$

$$(1,9) \qquad F_{\varrho\lambda}{}^{\nu} = V^\mu_\varrho\,\overline{A}_{\mu\lambda}{}^{\nu} + \overline{\Gamma}^{*\nu}_{\varrho\lambda} - \Gamma^{*\nu}_{\varrho\lambda}$$

gesetzt wurde. Wegen (1, 6) gilt für den in den unteren Zeigern symmetrischen Affinor (1, 8) insbesondere

$$(1,10) \qquad E_{\varrho\lambda}{}^{\nu}\,l^\varrho = E_{\lambda\varrho}{}^{\nu}\,l^\varrho = 0.$$

2. Der Zusammenhang der Krümmungsaffinoren.

Bei der Herleitung des Zusammenhanges der Krümmungsaffinoren verwenden wir die Cartansche Darstellung der Krümmungstheorie. In derselben sind die Krümmungsaffinoren die Koeffizienten der äußeren Formen

$$(2,1) \qquad \Omega^\lambda_\tau = -\,\omega^{\lambda\,\prime}_\tau + [\omega^\mu_\tau\,\omega^\lambda_\mu],$$

$$(2,1') \qquad \overline{\Omega}^\lambda_\tau = -\,\overline{\omega}^{\lambda\,\prime}_\tau + [\overline{\omega}^\mu_\tau\,\omega^\lambda_\mu].$$

Unter Beachtung von (1, 7) erhält man aus (2, 1) und (2, 1′)

$$(2,2) \qquad \overline{\Omega}^\lambda_\tau - \Omega^\lambda_\tau = -\,\varrho^{\lambda\,\prime}_\tau + [\varrho^\sigma_\tau\,\varrho^\lambda_\sigma] + [\varrho^\sigma_\tau\,\omega^\lambda_\sigma] - [\varrho^\lambda_\sigma\,\omega^\sigma_\tau].$$

---

[3]) Siehe E. Cartan, *loc. cit.*, S. 32.

[4]) Siehe E. Cartan, *loc. cit.*, S. 10 - 11.

Für die äußere Form zweiten Grades $\bar{\Omega}_\tau^\lambda$ gilt nun die Darstellung

$$(2,3)\qquad \bar{\Omega}_\tau^\lambda = \frac{1}{2} S_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} [\bar{\omega}^\nu \bar{\omega}^\mu] + P_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} [d\xi^\nu \omega^\mu] + \frac{1}{2} R_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} [d\xi^\nu d\xi^\mu]$$

und entsprechend für die nicht überstrichene Form [5]). Wir führen nun auf der rechten Seite von (2, 3) für die $\bar{\omega}^\nu$ die Ausdrücke (1, 3) ein. Wegen (1, 6) und den Beziehungen

$$S_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} l^\mu = P_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} l^\mu = 0 \;{}^{6})$$

erhält man so für die $\bar{\Omega}_\tau^\lambda$ eine äußere Form zweiten Grades in den ω^ν und $d\xi^\nu$. Eine formale Rechnung, die hier übergangen werden soll, ergibt dann für die linke Seite von (2, 2)

$$(2,4)\qquad \begin{aligned} \bar{\Omega}_\tau^\lambda - \Omega_\tau^\lambda = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{\bar{L}^2} \bar{S}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} - S_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}\right) [\omega^\nu \omega^\mu] + \\ & + \left(\frac{L}{\bar{L}} \bar{P}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} - P_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + \frac{L}{\bar{L}} \bar{S}_{\mu\varrho\tau}^{\cdot\cdot\cdot} V_\nu^\varrho\right) [d\xi^\nu \omega^\mu] + \\ & + \frac{1}{2} (\bar{R}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} - R_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + V_\mu^\varrho V_\nu^\sigma \bar{S}_{\varrho\sigma\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + V_{[\mu}^\sigma \bar{P}_{|\sigma|\nu]\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}) [d\xi^\nu d\xi^\mu]. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der rechten Seite von (2, 2) hat man außer (1, 8) und (1, 9) noch die beiden kovarianten Ableitungen eines Affinors zu benützen. Es bedeutet z. B. $\nabla_\mu E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\tau}$ die von E. Cartan definierte kovariante Ableitung des Affinors $E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\tau}$, [7]) während die zweite kovariante Ableitung durch

$$(2,5)\qquad \nabla^*_\mu E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\tau} = L \frac{\partial E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\tau}}{\partial v^\mu} + A_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\tau} E_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\sigma} - A_{\mu\varrho}^{\cdot\cdot\sigma} E_{\sigma\lambda}^{\cdot\cdot\tau} - A_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\sigma} E_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\tau}$$

bestimmt ist und entsprechendes gilt natürlich für einen Affinor beliebiger Valenz. Man erhält so für die rechte Seite von (2, 2) die Beziehung

$$(2,6)\qquad \begin{aligned} & (-\varrho_\tau^\lambda)' + [\varrho_\tau^\sigma \varrho_\sigma^\lambda] + [\varrho_\tau^\sigma \omega_\sigma^\lambda] - [\varrho_\sigma^\lambda \omega_\tau^\sigma] = \\ & = \frac{1}{2} (\Delta^*_{[\mu} E_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + E_{[\mu|\sigma|}^{\cdot\cdot\lambda} E_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\sigma}) [\omega^\nu \omega^\mu] + \\ & + (\Delta^*_\mu F_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\lambda} - \Delta_\nu E_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + A_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\sigma} F_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + E_{\mu\sigma}^{\cdot\cdot\lambda} F_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\sigma} - \\ & - E_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\sigma} F_{\nu\sigma}^{\cdot\cdot\lambda} + P_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\sigma} E_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\lambda}) [d\xi^\nu \omega^\mu] + \\ & + \frac{1}{2} (\Delta_{[\mu} F_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + F_{[\mu|\sigma|}^{\cdot\cdot\lambda} F_{\nu]\tau}^{\cdot\cdot\sigma} + R_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\sigma} E_{\sigma\tau}^{\cdot\cdot\lambda}) [d\xi^\nu d\xi^\mu], \end{aligned}$$

---

[5]) Siehe E. Cartan, *loc. cit.*, S. 33. Formel (41). Dort werden die drei Affinoren des Textes mit $S_{\tau\ \nu\mu}^{\ \lambda}$, $P_{\tau\ \lambda\mu}^{\ \lambda}$ und $R_{\tau\ \nu\mu}^{\ \lambda}$ bezeichnet.

[6]) Siehe E. Cartan, *loc. cit.*, S. 33.

[7]) Siehe E. Cartan, *loc. cit.*, S. 17—18. Dort steht $E_{\varrho\lambda\ /\mu}^{\ \ \tau}$ an Stelle der im Text benützten Bezeichnung.

wobei

$$P_{\mu\nu}{}^{\sigma} \overset{\text{def}}{=} P_{\mu\nu\zeta}{}^{\sigma} v^{\zeta}, \tag{2, 7}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{\sigma} \overset{\text{def}}{=} R_{\mu\nu\zeta}{}^{\sigma} v^{\zeta} \tag{2, 7'}$$

gesetzt wurde[8]).

Ersetzt man die linke Seite von (2, 2) durch (2, 4), die rechte Seite durch (2, 6), so erhält man einen Ausdruck der Gestalt

$$Q_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda} [\omega^{\nu} \omega^{\mu}] + M_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda} [d\xi^{\nu} \omega^{\mu}] + N_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda} [d\xi^{\nu} d\xi^{\mu}] = 0. \tag{2, 8}$$

Entsprechende Wahl der $d\xi^{\nu}$ bezw. ω^{ν} zeigt, daß die drei, auf der rechten Seite von (2, 8) auftretenden äußeren Formen einzeln verschwinden müssen. Wegen der Relationen

$$\omega_{\varrho} l^{\varrho} = 0$$

folgt aus dem Verschwinden der ersten und zweiten äußeren Form, falls $Q_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda}$ und $M_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda}$ in den Zeigern ν, μ schiefsymmetrisch sind,

$$Q_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda} - Q_{\nu\zeta\tau}{}^{\lambda} v^{\zeta} \cdot l_{\mu} + Q_{\mu\zeta\tau}{}^{\lambda} v^{\zeta} \cdot l_{\nu} = 0 \tag{2, 9}$$

und

$$M_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda} - l_{\mu} M_{\nu\zeta\tau}{}^{\lambda} v^{\zeta} = 0, \tag{2, 10}$$

während das Verschwinden der dritten Form

$$N_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda} = 0 \tag{2, 11}$$

gibt. Aus den Relationen (1, 10) folgt aber bei Beachtung der expliziten Gestalt der Krümmungsaffinoren $S_{\mu\nu\tau}{}^{\lambda}$ und $P_{\mu\nu\tau}{}^{\lambda}$, daß

$$Q_{\nu\zeta\tau}{}^{\lambda} v^{\zeta} = M_{\nu\zeta\tau}{}^{\lambda} v^{\zeta} = 0$$

ist. Es reduzieren sich somit (2, 9) und (2, 10) auf

$$Q_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda} = 0 \tag{2, 9'}$$

und

$$M_{\nu\mu\tau}{}^{\lambda} = 0. \tag{2, 10'}$$

Die Berechnung der expliziten Ausdrücke für (2, 9′), (2, 10′) und (2, 11) führt zu den gesuchten Zusammenhängen der Krümmungsaffinoren

$$\frac{L^2}{\bar{L}^2} \bar{S}_{\mu\nu\tau}{}^{\lambda} - S_{\mu\nu\tau}{}^{\lambda} = \overset{*}{\Delta}_{[\mu} E_{\nu]\tau}{}^{\lambda} + E_{[\mu|\sigma|}{}^{\lambda} E_{\nu]\tau}{}^{\sigma}, \tag{2, 12}$$

$$\begin{aligned} \frac{L}{\bar{L}} \bar{P}_{\mu\nu\tau}{}^{\lambda} - P_{\mu\nu\tau}{}^{\lambda} + \frac{L}{\bar{L}} \bar{S}_{\mu\sigma\tau}{}^{\lambda} V_{\nu}^{\sigma} = \overset{*}{\Delta}_{\mu} F_{\nu\tau}{}^{\lambda} - \Delta_{\nu} E_{\mu\tau}{}^{\lambda} + \\ + A_{\mu\nu}{}^{\sigma} F_{\sigma\tau}{}^{\lambda} + E_{\mu\sigma}{}^{\lambda} F_{\nu\tau}{}^{\sigma} - E_{\mu\tau}{}^{\sigma} F_{\nu\sigma}{}^{\lambda} + P_{\mu\nu}{}^{\sigma} E_{\sigma\tau}{}^{\lambda}, \end{aligned} \tag{2, 13}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu\tau}{}^{\lambda} - R_{\mu\nu\tau}{}^{\lambda} + V_{\mu}^{\varrho} V_{\nu}^{\sigma} \bar{S}_{\varrho\sigma\tau}{}^{\lambda} + V_{[\mu}^{\varrho} \bar{P}_{|\varrho|\nu]\tau}{}^{\lambda} = \\ = \Delta_{[\mu} F_{\nu]\tau}{}^{\lambda} + F_{[\mu|\sigma|}{}^{\lambda} F_{\nu]\tau}{}^{\sigma} + R_{\mu\nu}{}^{\sigma} E_{\sigma\tau}{}^{\lambda}. \end{aligned} \tag{2, 14}$$

(Eingegangen am 12. Septemter 1949.)

---

[8]) Bei E. Cartan, *loc. cit.*, insbes. S. 13, mit $P_{\mu\nu 0}{}^{\sigma}$ und $R_{\mu\nu 0}{}^{\sigma}$ bezeichnet.