Über vertauschbare Matrizen.

Von B. GYIRES in Debrecen.

In der vorliegenden Arbeit geben wir einen sehr einfachen Beweis für zwei Sätze von FROBENIUS, die von ihm ohne Beweis angeführt wurden[1]. Diese beiden Sätze beziehen sich auf die Vertauschbarkeit von quadratischen Matrizen n-ter Ordnung, die sich auf Diagonalgestalt transformieren lassen. Sei A eine solche Matrix aus einem beliebigen kommutativen Körper, worüber wir nur annehmen, daß er alle Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des charakteristischen Polynoms

$$(x-\alpha_1)^{e_1} \ldots (x-\alpha_r)^{e_r} \qquad (\alpha_i \neq \alpha_k \text{ für } i \neq k) \tag{1}$$

von A enthält. Unsere Voraussetzung, daß A eine auf Diagonalgestalt transformierbare Matrix ist, kommt bekanntlich darauf hinaus, daß

$$m(x) = (x-\alpha_1) \ldots (x-\alpha_r) \tag{2}$$

das Minimalpolynom von A ist[2]. Wir wollen noch die Bezeichnung

$$m_i(x) = \frac{m(x)}{x-\alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{3}$$

einführen. Die erwähnten Sätze lauten dann:

Satz 1. *Läßt sich die Matrix A auf Diagonalgestalt transformieren und hat sie das Minimalpolynom* (2), *so ist die allgemeine Form einer mit A vertauschbaren Matrix*

$$\sum_{i=1}^{r} m_i(A) B_i m_i(A), \tag{4}$$

wobei die B_i beliebige Matrizen n-ter Ordnung sein können.

Satz 2. *Hat das charakteristische Polynom der Matrix A lauter einfache Nullstellen, so läßt sich A nur mit denjenigen Matrizen vertauschen, die Polynome von A (mit skalaren Koeffizienten) sind.*

---

[1]) G. FROBENIUS, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für die reine und angew. Math.*, **84** (1878), S. 1–63, insbesondere S. 28.

[2]) Siehe z. B. SCHREIER–SPERNER, *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra.* II (Leipzig, 1935), S. 83.

Im folgenden soll die Matrix

$$\begin{pmatrix} M_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{k_u} \end{pmatrix},$$

wobei M_{k_i} eine quadratische Matrix k_i-ter Ordnung bedeutet, der Kürze halber mit $(M_{k_1}, \ldots, M_{k_u})$ bezeichnet werden. Ferner bezeichne $(1)_h$ und $(0)_h$ die Einheitsmatrix bzw. die Nullmatrix h-ter Ordnung.

Zur obigen Matrix A ordnen wir die Diagonalmatrix

$$D = (\alpha_1 (1)_{e_1}, \ldots, \alpha_r (1)_{e_r}) \tag{5}$$

(ebenfalls n-ter Ordnung) zu. Die Aussage, daß sich A auf Diagonalgestalt transformieren läßt, ist bekanntlich gleichbedeutend mit der Existenz einer regulären Matrix T, wofür

$$A = TDT^{-1} \tag{6}$$

gilt. Wählen wir nun eine solche T fest. Die mit A vertauschbaren Matrizen sind offenbar identisch mit allen TVT^{-1}, wobei V eine beliebige, mit D vertauschbare Matrix bezeichnet. Diese V lassen sich aber nach (5) in der Form $(M_{e_1}, \ldots, M_{e_r})$ schreiben mit beliebigen Matrizen M_{e_i} von der Ordnung e_i. Somit haben wir bewiesen den folgenden

Hilfssatz: *Die Matrizen*

$$T(M_{e_1}, \ldots, M_{e_r})\, T^{-1} \tag{7}$$

(wobei M_{e_i} eine beliebige Matrix e_i-ter Ordnung bezeichnet), und nur diese, sind mit A vertauschbar.

Auf Grund dieses Hilfssatzes beweisen wir nun die Sätze 1, 2. Wir zeigen zuerst, daß die Matrix (4) mit A vertauschbar ist. Nach (3) gilt nämlich

$$(x - \alpha_i)\, m_i(x) = m_i(x)\,(x - \alpha_i) = m(x),$$

d. h.

$$(A - \alpha_i (1)_n)\, m_i(A) = m_i(A)\,(A - \alpha_i (1)_n) = m(A) = (0)_n.$$

Daraus folgt

$$A \cdot m_i(A) = m_i(A) \cdot A = \alpha_i m_i(A) \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

was die Vertauschbarkeit von (4) mit A augenscheinlich macht.

Um den Beweis des Satzes 1 zu vollenden, müßen wir nur noch zeigen, daß eine Matrix (7) immer auf die Form (4) gebracht werden kann. Für diesen Zweck berechnen wir zunächst die Matrix $m_i(A)$ auf Grund von (6), (5), (3), (2):

$$m_i(A) = T m_i(D)\, T^{-1} = T \prod_{k \neq i} (D - \alpha_k (1)_n)\, T^{-1}.$$

Ein Blick auf (5) zeigt, daß die Diagonalmatrix

$$\prod_{k \neq i} (D - \alpha_k (1)_n)$$

von Null verschiedene Elemente nur im i-ten „Diagonalkästchen“ enthält;

wo nämlich (in der Diagonale) lauter Elemente

$$\prod_{k \neq i} (\alpha_i - \alpha_k) = m_i(\alpha_i)$$

stehen. Mithin gilt

(8) $$m_i(A) = T((0)_{e_1}, \ldots, m_i(\alpha_i)(1)_{e_i}, (0)_{e_{i+1}}, \ldots, (0)_{e_r}) T^{-1}.$$

Nach dieser Vorbereitung können wir (7) leicht auf die Form (4) bringen. Vor allem läßt sich (7) in die Summe

$$\sum_{i=1}^{r} T((0)_{e_1}, \ldots, M_{e_i}, (0)_{e_{i+1}}, \ldots, (0)_{e_r}) T^{-1}$$

zerlegen und somit genügt es die Gültigkeit der Gleichung

$$T((0)_{e_1}, \ldots, M_{e_i}, \ldots, (0)_{e_r}) T^{-1} = m_i(A) B_i m_i(A)$$

mit einer geeigneten Matrix B_i zu zeigen. Die Matrix

$$B_i = T\left((0)_{e_1}, \ldots, \frac{1}{m_i(\alpha_i)^2} M_{e_i}, \ldots, (0)_{e_r}\right) T^{-1}$$

genügt aber nach (8) offensichtlich der letzten Gleichung (und hier ist $m_i(\alpha_i) \neq 0$, da die Nullstellen von $m(x)$ nach Voraussetzung lauter verschieden sind), womit der Beweis des Satzes 1 beendet ist.

Der Beweis des Satzes 2 ergibt sich noch einfacher aus unserem Hilfssatz. Nach der Annahme gilt jetzt $e_1 = \ldots = e_r = 1$ (und folglich $r = n$), woraus folgt, daß in diesem Falle jede mit A vertauschbare Matrix von der Form

$$T(c_1, \ldots, c_n) T^{-1}$$

ist. Um Satz 2 zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß sich für jede, beliebig vorgeschriebene Diagonalmatrix $(c_1, \ldots, c_n)$ ein Polynom

(9) $$f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

derart bestimmen läßt, daß die Gleichung

$$T(c_1, \ldots, c_n) T^{-1} = f(A)$$

gilt. Nach (6) gilt $f(A) = T f(D) T^{-1}$, und so besagt die letzte Gleichung dasselbe wie

$$(c_1, \ldots, c_n) = f(D) = b_0(1)_n + b_1 D + \ldots + b_{n-1} D^{n-1}.$$

Da aber D die Diagonalmatrix $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ bezeichnet, ist es klar, daß die letzte Gleichung mit der linearen Gleichungssystem

(10) $$f(\alpha_i) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

äquivalent ist. Das System (10) hat aber ersichtlich eine Lösung für die unbekannten Koeffizienten von $f(x)$, denn seine Determinante (als die durch die $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ bestimmte Vandermondesche Determinante) ist von Null verschieden. Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

(Eingegangen am 15. Januar 1949.)