О сходимости тригонометрических рядов.

Д. МЕНЬШОВ (Москва).

Введение. Настоящая статья содержит краткий обзор работ по теории тригонометрических рядов, выполненных автором за последнее время. В первых двух параграфах (§ § 1 и 2) рассматриваются ряды Фурье от непрерывных функций; в последних двух параграфах (§§ 3 и 4) — произвольные тригонометрические ряды.

§. I. Как известно, при изучении тригонометрических рядов мы встречаемся с большими трудностями. Повидимому, наибольшие трудности связаны с вопросом о сходимости рядов Фурье от суммируемых функций. Доказано, что существуют ряды Фурье от суммируемых функций, расходящиеся в каждой точке [**2**]. Однако остается открытым вопрос о сходимости почти всюду рядов Фурье от измеримых функций с суммируемым квадратом. Мы не можем даже ответить на вопрос о сходимости почти всюду ряда Фурье от любой непрерывной функции.

Известно, что существуют непрерывные функции, ряды Фурье которых расходятся в отдельных точках [**12**]. Однако во всех примерах таких непрерывных функций, которые известны до настоящего времени, мера множества точек расходимости соответствующих рядов Фурье всегда равняется нулю, хотя это множество, вообще говоря, может иметь мощнось континуума и даже может быть второй категории.

Интересно отметить, что все расходящиеся ряды Фурье от непрерывных функций, которые были сперва найдены, обладали тем свойством, что последовательности их частных сумм содержали равномерно сходящиеся подпоследовательности. Именно, метод построения таких рядов Фурье состоял в следующем: определяли тригонометрический ряд, расходящийся в отдельных точках, у которого последовательность частных сумм содержала подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $f(x)$. Отсюда, далее, заключали, что $f(x)$ непрерывна и что первоначально построенный тригонометрический ряд является рядом Фурье от этой функции $f(x)$.[1])

[1]) Приведенный здесь метод рассуждения принадлежит L. Fejér'y [**12**].

В связи с изложенным методом построения расходящихся рядов Фурье от непрерывных функций возник следующий вопрос: не будет ли последовательность частных сумм любого ряда Фурье от непрерывной функции всегда содержать равномерно сходящуюся подпоследовательность? Как выяснилось, эта гипотеза не оправдывается. Именно, оказалось, что существует ряд Фурье от непрерывной функции, у которого любая подпоследовательность частных сумм расходится по крайней мере в одной точке **[8]**. Однако можно доказать следующую теорему:

Теорема I. *Любую функцию $f(x)$, непрерывную для всех x и имеющую период 2π, можно представить, как сумму двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, обладающих теми же свойствами, как и функция $f(x)$, и таких что последовательность частных сумм ряда Фурье каждой из этих двух функций содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся для всех x* **[8]**.

Изложим вкратце идею доказательства этой теоремы. Для данной функций $f(x)$ мы определяем последовательность тригонометрических полиномов $T_l(x)$, $l=1, 2, \ldots$, и последовательность натуральных чисел n_l, $l=1, 2, \ldots$, следующим образом. Положим

$$T_1(x)=1,\ n_1=1.$$

Предполагая затем, что тригонометрические полиномы $T_s(x)$ и числа n_s уже определены для всех $s=1, 2, \ldots, l-1$, где $l>1$, обозначим через n_l наименьшее из натуральных чисел, превосходящих все числа n_s и ν_s, $s=1, 2, \ldots, l-1$, где ν_s есть порядок полинома $T_s(x)$, т. е.

$$T_s(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{j=1}^{\nu_s}(c_j\cos jx+d_j\sin jx).$$

Определим затем тригонометрический полином $T_l(x)$ так, чтобы для всех x выполнялось неравенство

$$|f(x)-T_l(x)|<\frac{1}{n_l 2^l}.$$

Таким образом мы определим шаг за шагом тригонометрические полиномы $T_l(x)$ и натуральные числа n_l для всех $l=1, 2, \ldots$.

Ясно, что ряд

$$\sum_{l=2}^{\infty}|T_l(x)-T_{l-1}(x)|$$

сходится равномерно для всех x и, кроме того,

$$T_1(x)+\sum_{l=2}^{\infty}[T_l(x)-T_{l-1}(x)]=f(x)$$

для любого x. Если положить

$$f_1(x)=T_1(x)+\sum_{j=1}^{\infty}[T_{2^{j+1}}(x)-T_{2^j}(x)],\ f_2(x)=\sum_{j=1}^{\infty}[T_{2^j}(x)-T_{2^{j-1}}(x)],$$

то можно доказать, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы I.

Теорема I является частным случаем более общей теоремы, которая формулируется следующим образом:

Теорема II. *Предположим, что $f(x)$ есть функция с периодом 2π, суммируемая на сегменте $[-\pi,\pi]$ и непрерывная в каждой точке некоторого сегмента $[a,b]$. Тогда эту функцию можно представить в виде суммы двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, обладающих теми же свойствами, как и функция $f(x)$, и таких, что последовательность частных сумм ряда Фурье каждой из этих двух функций содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на сегменте $[a,b]$* **[8]**.

§ 2. Как было уже упомянуто, существуют ряды Фурье от непрерывных функций, расходящиеся на множестве мощности континуума. Тогда возникает вопрос, нельзя ли „улучшить" сходимость любого ряда Фурье от непрерывной функции, изменяя эту функцию на множестве сколь угодно малой меры. Оказывается, что такое улучшение действительно возможно; а именно, оказывается, что любую непрерывную функцию можно изменить на множестве сколь угодно малой меры таким образом, что для полученной новой функции ряд Фурье будет равномерно сходиться на всем бесконечном интервале $-\infty<x<+\infty$ **[7]**.

Как доказал Н. Лузин **[3]**, любая измеримая функция, конечная почти всюду на некотором сегменте $[a,b]$, непрерывна на совершенном множестве $P\subset[a,b]$, мера которого больше $b-a-\varepsilon$, где ε — любое, наперед заданное положительное число. В таком случае из сказанного выше следует, что должна быть справедлива

Теорема III. *Любую измеримую функцию $f(x)$, конечную почти всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$, можно изменить на множестве сколь угодно малой меры таким, образом, чтобы полученная новая функция была непрерывна и чтобы ее ряд Фурье равномерно сходился на всем бесконечном интервале $-\infty<x<+\infty$* **[7]**.

Доказательство теоремы III опирается на две леммы, из которых первая нужна для доказательства второй.

Лемма 1. *Пусть заданы два натуральных числа q и ν, $\nu>8$, и какой-нибудь сегмент $[c,d]$. Положим*

$$\delta=\frac{d-c}{\nu q},\quad c_s=c+s\nu\delta,\quad a_s=c_s-\delta\qquad(s=0,1,2,\ldots,q).$$

Тогда

$$\left|\sum_{s=1}^{q}\int_{a_s}^{c_s}\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right|<L\qquad\left(c+\frac{d-c}{\nu}\leqq x\leqq d-\frac{d-c}{\nu},\ \ n=1,2,\ldots\right),$$

где L абсолютная постоянная.

Лемма 2. *Пусть заданы сегмент $[a, b]$, лежащий на $[-\pi, \pi]$, и некоторое действительное число γ. Тогда можно определить для каждого положительного числа ε и для каждого натурального числа $\nu>8$ функцию $\psi(x)$ и измеримое множество E, которые обладают следующими свойствами:*

1) *$\psi(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и изображается геометрически ломаной линией с конечным числом звеньев;*

2) $\psi(x)=0$ *для* $-\pi\leqq x\leqq a$ *и для* $b\leqq x\leqq\pi$;

3) $\operatorname{mes} E>(b-a)\left(1-\dfrac{3}{\nu}\right)$, $E\subset(a, b)$; [2])

4) $\psi(x)=\gamma\quad(x\in E)$;

5) $|\psi(x)|\leqq 2|\gamma|\nu\quad(-\pi\leqq x\leqq\pi)$;

6) $\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\,dt\right|<\varepsilon$ *для любых α и β, удовлетворяющих условию* $-\pi\leqq\alpha<\beta\leqq\pi$;

7) $\left|\int\limits_{a}^{b}\psi(t)\dfrac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\right|\leqq B|\gamma|\nu\qquad(-\infty<x<+\infty,\ \ n=1,2,\ldots)$,

где B есть абсолютная постоянная.

Приведем эскиз доказательства теоремы III. Прежде всего, в силу замечания, сделанного в начале § 2, эту теорему достаточно доказать для непрерывных функций $f(x)$. Тогда мы можем написать

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m(x)\qquad(-\pi\leqq x\leqq\pi),\tag{2, 1}$$

где $\Phi_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$, ступенчатые функции, т. е. каждая из них постоянна на любом из интервалов в конечном числе полученных подразделением сегмента $[-\pi, \pi]$. Мы можем предположить, кроме того, что

$$|\Phi_m(x)|<\frac{\sigma}{2^m}\qquad(-\pi\leqq x\leqq\pi,\ m=2, 3, \ldots),\tag{2, 2}$$

где σ есть любое, наперед заданное положительное число.

Обозначим через Δ_{jm}, $j=1, 2, \ldots, N_m$, интервалы постоянства функции $\Phi_m(x)$. Мы можем всегда предположить, что длина каждого из них меньше $\dfrac{\pi}{2}$.

---

[2]) Мы обозначаом через (a, b) открытый интервал, причем предполагаем, что $a<b$.

Положим

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_m = \sum_{\mu=1}^{m} N_\mu \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2, 3}$$

и обозначим через (b_k, b_k'), $b_k < b_k'$, $k = 1, 2, \ldots$, все интервалы Δ_{jm}, $1 \leqq j \leqq N_m$, $m = 1, 2, \ldots$, перенумерованные таким образом, чтобы выполнялось неравенство $l < k$, если $(b_l, b_l') = \Delta_{i\mu}$, $(b_k, b_k') = \Delta_{jm}$ и, в то же время, $\mu < m$ или $\mu = m$, $i < j$. Тогда ясно, что каждая из функций $\Phi_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, равна постоянной величине γ_k на интервале (b_k, b_k'), где k есть любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\nu_{m-1} < k \leqq \nu_m$.

Возьмем теперь последовательность натуральных чисел n_k, $k = 1, 2, \ldots$, точные значения которых будут определены ниже, и будем рассматривать натуральное число m, как функцию от k, определяемую из неравенства

$$\nu_{m-1} < k \leqq \nu_m. \tag{2, 4}$$

Положим

$$\varepsilon_k = \frac{1}{n_k k^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2, 5}$$

$$N_m' = \left(\left[\frac{2\pi}{\sigma} \right] + 1 \right) 2^{m+3}, \tag{2, 6}$$ [3]

откуда следует, что

$$8 < N_m' < \frac{\pi}{\sigma}\, 2^{m+5}. \tag{2, 7}$$

Так как $[b_k, b_k'] \subset [-\pi, \pi]$, $k = 1, 2, \ldots$, то для любого натурального k мы можем определить на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию $\psi_k(x)$ и измеримое множество E_k, удовлетворяющие всем условиям, 1)—7), перечисленным в лемме 2, в которых нужно взять $\psi_k(x)$, E_k вместо $\psi(x)$, E и $[b_k, b_k']$, γ_k, ε_k, N_m' вместо $[a, b]$, γ, ε, ν. Затем мы определяем функции $\psi_k(x)$ вне сегмента $[-\pi, \pi]$, как периодические функции с периодом 2π.

Принимая во внимание свойства функций $\psi_k(x)$ и $\Phi_m(x)$, мы можем доказать, что

$$\psi_k(x) = \Phi_m(x) \qquad (x \in E_k,\ k = 1, 2, \ldots), \tag{2, 8}$$

где натуральное число m есть функция от k, определяемая из неравенства (2, 4).

Из определения функций $\psi_k(x)$ следует, что эти функции имеют период 2π и абсолютно непрерывны на любом конечном интервале. В таком случае ряд Фурье от каждой из функций $\psi_k(x)$ сходится равномерно к этой функции на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Следовательно,

---

[3]) Мы обозначаем через $\left[\frac{2\pi}{\sigma}\right]$ целую часть от $\frac{2\pi}{\sigma}$. При этом мы предполагаем, что $\sigma < 2\pi$.

$$\psi_k(x) = J_{nk}(x) + \varepsilon_{nk}(x) \quad (k=1, 2, \ldots, n=1, 2, \ldots), \tag{2, 9}$$

где

$$J_{nk}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \psi_k(x) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt$$

и $\varepsilon_{nk}(x)$ стремиться равномерно к нулю на интервале $(-\infty, +\infty)$, когда $n \to \infty$ и k сохраняет постоянное значение.

Определение функций $\psi_k(x)$ и множеств E_k зависит от выбора натуральных чисел n_k, $k=1, 2, \ldots$. Определим теперь эти числа следующим образом. Положим $n_1=1$. Предположим затем, что числа n_l уже определены для всех натуральных l, удовлетворяющих условию $1 \leq l < k$, где $k > 1$. Из предыдущего следует, что функция $\psi_l(x)$ определена на интервале $(-\infty, \infty)$, если задано число n_l. Следовательно, в нашем случае функции $\psi_l(x)$ определены для всех l, удовлетворяющих условию $1 \leq l < k$. Тогда, в силу равенства (2, 9), для тех же l и для всех натуральных чисел n будут определены функции $\varepsilon_{nl}(x)$, причем, как мы знаем, для каждого фиксированного l эти функции стремятся равномерно к нулю на интервале $(-\infty, +\infty)$, когда $n \to \infty$. Отсюда следует, что мы можем определить натуральное число n_k, для которого удовлетворяются условия:

$$\left| \sum_{l=1}^{k-1} \varepsilon_{nl}(x) \right| < \frac{1}{k} \qquad (-\infty < x < +\infty, \ n > n_k) \tag{2, 10}$$

$$n_k > n_{k-1}. \tag{2, 11}$$

Таким образом, мы определяем число n_k, если уже орределеиы числа n_l для l, удовлетворяющих неравенству $1 \leq l < k$. Следовательно, отправляясь от числа n_1, мы можем определить шаг за шагом все числа n_k, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда будут определены все функции $\psi_k(x)$ и все множества E_k, причем эти функции и множества будут обладать всеми упомянутыми выше свойствами.

Пользуясь свойствами функций $\psi_k(x)$, мы можем доказать, что ряд с общим членом $\psi_k(x)$ равномерно сходится на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Тогда функция $G(x)$, определяемая из равенства

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \tag{2, 12}$$

будет непрерывна для всех x. Кроме того, так как каждая из функций $\psi_k(x)$ имеет период 2π, то функция $G(x)$, обладает тем же свойством.

Полагая

$$\Omega_m = \sum_{k=\nu_{m-1}+1}^{\nu_m} E_k, \quad \Omega = \prod_{m=1}^{\infty} \Omega_m, \tag{2, 13}$$

мы получаем на основании свойств множеств E_k [см. условие 3) леммы 2] и неравенства (2, 7):

$$\operatorname{mes} \Omega > 2\pi - \sigma, \quad \Omega \subset [-\pi, \pi]. \tag{2, 14}$$

Далее, пользуясь свойствами функций $\psi_k(x)$ и $\Phi_m(x)$, мы можем доказать, что

$$G(x) = f(x) \qquad (x \in \Omega). \tag{2, 15}$$

Наконец, принимая во внимание равенство (2, 9), неравенство (2, 10) и свойства функций $\psi_k(x)$, мы можем доказать что ряд Фурье от функции $G(x)$ равномерно сходится на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Итак, для любого положительного числа σ мы можем определить множество Ω и функцию $G(x)$, непрерывную для всех x, для которых удовлетворяются условия (2, 14) и (2, 15), причем ряд Фурье от функции $G(x)$ равномерно сходится на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Иначе говоря, мы можем изменить функцию $f(x)$, определенную на сегменте $[-\pi, \pi]$, на множестве сколь угодно малой меры таким образом, чтобы для полученной новой функции $G(x)$ ряд Фурье сходился равномерно на $(-\infty, +\infty)$. Тем самым теорема III доказана.

§ 3. В этом параграфе мы будем рассматривать тригонометрические ряды общего вида, т. е. такие, которые не обязательно являются рядами Фурье от суммируемых функций. В том случае, когда мы имеем ряд Фурье от суммируемой функции, последовательность его частных сумм всегда содержит сходящуюся почти всюду подпоследовательность. В самом деле, если $S_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ являются частными суммами ряда Фурье от суммируемой функции, $f(x)$, то, как известно [1],

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} | S_n(x) - f(x) |^{1-\varepsilon} \, dx = 0,$$

где ε есть любое постоянное положительное число, меньшее единицы.[4]) Отсюда следует, что последовательность функций $S_n(x)$, $n=1, 2 \ldots$, сходится по мере и, следовательно, содержит сходящуюся почти всюду подпследнвательность.

Предположим теперь, что

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3, 1}$$

есть произвольный тригонометрический ряд, коэффициенты которого стремятся к нулю при $n \to \infty$. Возникает вопрос, содержит ли последовательность частных сумм такого ряда сходящуюся почти всюду подпоследовательность. Как выяснилось, это предположение не оправдывается; а именно, можно определить тригонометрический ряд (3, 1), удовлетворяющий условию

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0, \tag{3, 2}$$

у которого любая подпоследовательность частных сумм не сходится почти всюду к конечному пределу [9].

[4]) Иначе говоря, последовательность функций $S_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сильно сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$ относительно показателя $1-\varepsilon$ [11].

Интересно изучить те тригонометрические ряды, последовательности частных сумм которых содержат сходящиеся почти всюду подпоследовательности. В частности, можно спросить себя, каковы тригонометрические ряды, которые можно получить путем сложения таких рядов. Можно доказать, что любой тригонометрический ряд (3, 1) может быть представлен в виде суммы двух тригонометрических рядов

$$\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx) \tag{3, 3}$$

и

$$\frac{a_0''}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n''\cos nx+b_n''\sin nx), \tag{3, 4}$$

для каждого из которых последовательность частных сумм содержит подпоследовательнотсь, сходящуюся почти всюду к конечному пределу [5]). При этом, если коэффициенты первоначалного ряда (3, 1) стремятся к нулю при $n\to\infty$, то ряды (3, 3) и (3, 4) можно определить таким образом, чтобы их коэффициенты также стремились к нулю при $n\to\infty$.

Это утверждение является частным случаем более общей теоремы, для формулировки которой мы введем следующее определение. Будем называть тригонометрический ряд (3, 1) *универсальным*, если для любой измеримой функции $f(x)$, имеющей в каждой точке сегмента $[-\pi,\pi]$ определенное значение [6]) можно определить последовательность частных сумм $S_{n_i}(x)$, $i=1,2,\ldots$, этого ряда, с возрастающими номерами n_i, которая сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi,\pi]$.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема IV. *Всякий тригонометрический ряд* (3, 1) *есть сумма двух универсальных тригонометрических рядов* (3, 3) *и* (3, 4), *коэффициенты которых удовлетворяют условиям*

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n'|\leqq\limsup_{n\to\infty}|a_n|,\ \limsup_{n\to\infty}|a_n''|\leqq\limsup_{n\to\infty}|a_n|,$$

$$\limsup_{n\to\infty}|b_n'|\leqq\limsup_{n\to\infty}|b_n|,\ \limsup_{n\to\infty}|b_n''|\leqq\limsup_{n\to\infty}|b_n|\ \textbf{[9]}.$$

Ясно, что упомянутое выше утверждение является непосредственным следствием теоремы IV.

Доказательство теоремы IV опирается на три леммы, из которых первая нужна для доказательства второй.

---

[5]) Номера членов получаемых подпоследовательностей для рядов (3, 3) и (3, 4), вообще говоря, различны.

[6]) $f(x)$ может быть равна $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

Лемма 1. *Каковы бы ни были натуральные числа m и p, $m<p$, можно определить тригонометрические ряды*

$$1+\sum_{n=p}^{\infty}(a'_n\cos nx+b'_n\sin nx),$$

$$\cos mx+\sum_{n=p}^{\infty}(a''_n\cos nx+b''_n\sin nx),$$

$$\sin mx+\sum_{n=p}^{\infty}(a'''_n\cos nx+b'''_n\sin nx),$$

которые сходятся почти всюду к нулю и коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$|a'_n|<c,\ |b'_n|<c,\ |a''_n|<c,\ |b''_n|<c,\ |a'''_n|<c,\ |b'''_n|<c$$

при $n=p+1, p+2\ldots,$ *где c не зависит от m и p.*

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — любая измеримая функция, конечная почти всюду на сегменте $[-\pi,\pi]$. Для всякого положительного числа ε и для каждого натурального r можно определить тригонометрический полином*

(3, 5) $$T(x)=\sum_{n=r}^{\nu}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

и измеримое множество E, которые обладают следующими свойствами;

α) $|f(x)-T(x)|<\varepsilon \qquad (x\in E)$;

β) $\operatorname{mes} E>2\pi-\varepsilon,\ E\subset[-\pi,\pi]$;

γ) $|c_n|<\varepsilon,\ |d_n|<\varepsilon \qquad (n=r, r+1,\ldots,\nu)$.[7])

Лемма 3. *Какова бы ни была измеримая функция $f(x)$, имеющая в каждой точке сегмента $[-\pi,\pi]$ определенное значение, конечное или бесконечное, можно определить последовательность различных тригонометрических полиномов $\tau_\nu(x)$ $\nu=1, 2,\ldots,$ с рациональными коэффициентами, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{\nu\to\infty}\tau_\nu(x)=f(x)$$

почти всюду на $[-\pi,\pi]$.

Приведем эскиз доказательства теоремы IV. Перенумеруем все тригонометрические полиномы с рациональными коэффициентами в каком-нибудь порядке и обозначим их через

(3, 6) $$T_1(x),\ T_2(x),\ldots,\ T_m(x),\ldots$$

---

[7]) Доказательство этой леммы, отличное от доказательства автора, было также дано А. Н. Колмогоровым (доказательство не было опубликовано).

Определим рекуррентным образом две возрастающие последовательности неотрицательных целых чисел:

(3, 7) $$\mu_0,\ \mu_1, \ldots, \ \mu_m, \ldots$$

(3, 8) $$\nu_1,\ \nu_2, \ldots, \ \nu_m, \ldots$$

и последовательность действительных чисел

(3, 9) $$a_0',\ a_0'',\ a_n',\ a_n'',\ b_n',\ b_n'' \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

следующим образом. Положим

$$\mu_0 = 0,\ a_0' = a_0,\ a_0'' = 0$$

и допустим, что целое неотрицательное число μ_{m-1}, а также действительные числа a_n', a_n'', $n=0, 1, 2, \ldots, \mu_{m-1}$ и b_n', b_n'', $n=1, 2, \ldots, \mu_{m-1}$ [8]) уже определены, где m какое-нибудь натуральное число.

Мы будем пользоваться обозначениями

$$S_n'(x) = \frac{a_0''}{2} + \sum_{l=1}^{n} (a_l' \cos lx + b_l' \sin lx);$$

$$S_n''(x) = \frac{a_0''}{2} + \sum_{l=1}^{n} (a_l'' \cos lx + b_l'' \sin lx)$$

всякий раз, когда числа a_l', a_l'', b_l', b_l'', $l = 1, 2, \ldots, n$, уже определены, и мы положим, кроме того, $S_0'(x) = \frac{a_0'}{2}$, $S_0''(x) = \frac{a_0''}{2}$.

В силу леммы 2, в которой мы положим $f(x) = T_m(x) - S'_{\mu_{m-1}}(x)$, $\varepsilon = \frac{1}{m^2}$, $r = \mu_{m-1} + 1$, мы можем определить тригонометрический полином

(3, 10) $$\tau_m(x) = \sum_{n=\mu_{m-1}+1}^{\nu_m} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

и измеримое множество E_m, которые удовлетворяют условиям:

(3, 11) $$|T_m(x) - S'_{\mu_{m-1}}(x) - \tau_m(x)| < \frac{1}{m^2} \qquad (x \in E_m);$$

(3, 12) $$\operatorname{mes} E_m > 2\pi - \frac{1}{m^2}, \qquad E_m \subset [-\pi, \pi];$$

(3, 13) $$|\alpha_n| < \frac{1}{m^2}, \qquad |\beta_n| < \frac{1}{m^2} \qquad (n = \mu_{m-1} + 1, \ldots, \nu_m).$$

Положим, далее,

(3, 14) $$a_n' = \alpha_n,\ b_n' = \beta_n,\ a_n'' = a_n - \alpha_n,\ b_n'' = b_n - \beta_n \ (n = \mu_{m-1} + 1, \ldots, \nu_m).$$

[8]) Если $\mu_{m-1} = 0$, то числа b_n' и b_n'' не существуют.

Мы определим таким способом натуральное число $\nu_m > \mu_{m-1}$, измеримое множество E_m и действительные числа a'_n, b'_n, a''_n, b''_n, $n = \mu_{m-1} + 1, \ldots, \nu_m$. Снова применяя лемму 2, в которой теперь полагаем $f(x) = T_m(x) - S''_{\nu_m}(x)$, $\varepsilon = \frac{1}{m^2}$, $r = \nu_m + 1$, мы можем определить тригонометрический полином

$$(3, 15) \qquad \sigma_m(x) = \sum_{n=\nu_m+1}^{\mu_m} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

и измеримое множество G_m, удовлетворяющие условиям

$$(3, 16) \qquad | T_m(x) - S''_{\nu_m}(x) - \sigma_m(x) | < \frac{1}{m^2} \qquad (x \in G_m);$$

$$(3, 17) \qquad \operatorname{mes} G_m > 2\pi - \frac{1}{m^2}, \qquad G_m \subset [-\pi, \pi];$$

$$(3, 18) \qquad | \alpha_n | < \frac{1}{m^2}, \ | \beta_n | < \frac{1}{m^2} \qquad (n = \nu_{m-1} + 1, \ldots, \nu_m).$$

Положим, кроме того,

$$(3, 19) \quad a'_n = a_n - \alpha_n, \ b'_n = b_n - \beta_n, \ a''_n = \alpha_n, \ b''_n = \alpha_n \ (n = \nu_m + 1, \ldots, \mu_m).$$

Таким образом мы определяем натуральное число $\mu_m > \nu_m$, измеримое множество G_m и действительные числа a'_n, b'_n, a''_n, b''_n, $n = \nu_m + 1, \ldots, \mu_m$).

Отправляясь от чисел μ_0, a'_0, a''_0, мы определим шаг за шагом все числа μ_m и ν_m, образующие возрастающие последовательности (3, 7) и (3, 8), и все действительные числа (3, 9). В то же время мы определяем измеримые множества E_m, G_m, $m = 1, 2, \ldots$, действительные числа α_n, β_n, $n = 1, 2, \ldots$, и тригонометрические полиномы $\tau_m(x)$, $\sigma_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, для которых имеют место соотношения (3, 10) — (3, 19). Отметим еще, что мы имеем неравенства $\mu_{m-1} < \nu_m < \mu_m$, $m = 1, 2, \ldots$ Если воспользоватся леммой 3, то можно доказать, что тригонометрические ряды (3, 3) и (3, 4), коэффициентами которых служат определённые нами числа (3, 9), удовлетворяют всем условиям теоремы IV.

§ 4. Мы видели в прошлом параграфе, что сущдетвуют тригонометрические ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, у которых любая подпоследовательность частных сумм не сходится к конечному пределу почти всюду. В то же время мы видели, что существуют универсальные тригонометрические ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим теперь класс тригонометрических рядов, сходящихся почти всюду к конечному пределу. Прежде всего естественно поставить вопрос, какие функции могут быть суммами таких рядов. Как известно, для того, чтобы конечная почти всюду функция $f(x)$ была суммой сходящегося почти всюду тригонометрического ряда, необходимо, чтобы $f(x)$ была измеримой. Можно доказать, что это условие является также достаточным; а именно, можно доказать следующую теорему:

Теорема V. *Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, можно определить тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4, 1}$$

сходящийся к этой функции почти всюду на $[-\pi, \pi]$ [6]. [9])

Идея доказательства теоремы V состоит в следующем. Пользуясь теоремой III, а также рассуждениями, которые применяются при построении тригонометрического ряда, сходящегося почти всюду к нулю [5], мы можем определить для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, непрерывную функцию $F(x)$ такую, что

$$-\frac{1}{\pi} \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{d D_n(t-x)}{dt} dt = f(x) \tag{4, 2}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$, где

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Предположим, что ряд (4, 1) получается в результате почленного дифференцирования ряда Фурье от функции $F(x)$. Легко видеть, что

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \frac{d D_n(t-x)}{dt} dt = S_n(x),$$

где $S_n(x)$ есть сумма n первых членов ряда (4, 1). В таком случае, на основании (4, 2), ряд (4, 1) сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$, откуда следует доказательство теоремы V.

Будем теперь рассматривать тригонометрические ряды, имеющие почти всюду определенную сумму, конечную или бесконечную. Естественно поставить вопрос, будет ли справедлива теорема V, если в ее формулировке отказаться от требования конечности почти всюду функции $f(x)$. В частности, возникает вопрос, существует ли тригонометрический ряд, сходящийся почти всюду к $+\infty$. [10])

Ответа на эти вопросы до сих пор не было дано. Однако, если вместо обычной сходимости рассматривать сходимость по мере, то мы будем иметь положительный ответ на поставленные вопросы.

---

[9]) Эта теорема является обобщением теоремы Н. Лузина, который доказал, что для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, можно определить тригонометрический ряд, который суммируется к ней методом Poisson'а [4].

[10]) Этот вопрос был поставлен Н. Лузиным.

Введем следующие определения и обозначения. Будем говорить, что функция определена всюду на некотором множестве E, если она имеет определенное значение, конечное или равное $+\infty$ или $-\infty$, в каждой точке этого множества. Через $\{f_n(x)\}$ будем обозначать последовательность функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$, измеримых и конечных почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$.

Мы скажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере на сегменте $[a, b]$ к измеримой функции $f(x)$, определенной почти всюду на этом сегменте ($f(x)$ необязательно должна быть конечной почти всюду на $[a, b]$), если функции $f_n(x)$ можно представить в виде

$$f_n(x) = g_n(x) + \alpha_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $g_n(x)$ и $\alpha_n(x)$ конечны почти всюду на $[a, b]$,

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f(x)$$

почти всюду на этот сегменте и $\alpha_n(x)$ сходится по мере к нулю на $[a, b]$, когда $n \to \infty$.[11]

Можно доказать следующую теорему.

Теорема VI. *Для любой измеримой функции $f(x)$, определенной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд* (5, 1), *сходящийся по мере к $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющий условию*

(5, 3) $$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \ \lim_{n \to \infty} b_n = 0 \quad [10].$$

Это утверждение является частным случаем более общих теорем, для формулировки которых нам потребуются следующие определения. Мы скажем, что функция $F(x)$, определенная почти всюду на сегменте $[a, b]$, есть *верхний предел по мере на* $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$, если $F(x)$ измерима и удовлетворяет следующим условиям:

1) $$\lim_{n \to \infty} \operatorname{mes} \{E\,[f_n(x) > \varphi(x)].\, E\,[\varphi(x) > F(x)]\} = 0 \text{ [12]}$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определеной почти всюду на $[a, b]$;

2) $$\limsup_{n \to \infty} \operatorname{mes} \{E\,[f_n(x) > \psi(x)].\ E\,[F(x) > \psi(x)]\} > 0$$

для любой измеримой функции $\psi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E\,[F(x) > \psi(x)] > 0$.

---

[11]) Это определение совпадает с обычным определением сходимости по мере, если $f(x)$ конечна почти всюду на $[a, b]$.

[12]) Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две какие-нибудь измеримые функции, определенные почти всюду на $[a, b]$, то мы будем обозначать, как обычно, через $E\,[\varphi_1(x) > \varphi_2(x)]$ множество всех точек на $[a, b]$, для которых $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

Функцию $G(x)$, определенную почти всюду на $[a, b]$, мы будем называть *нижним пределом по мере на* $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$, если $-G(x)$ есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности $\{-f_n(x)\}$.

Для верхних и нижних пределов по мере на $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$ можно доказать следующие утверждения:

A. Любая последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет хотя бы один верхний предел и хотя бы один нижний предел по мере на $[a, b]$.

B. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются верхними пределами по мере на $[a, b]$ для одной и той же последовательности $\{f_n(x)\}$, то $F_1(x) = F_2(x)$ почти всюду на $[a, b]$

C. Если $G_1(x)$ и $G_2(x)$ являются нижними пределеми по мере на $[a, b]$ для одной и той же последовательности $\{f_n(x)\}$, то $G_1(x) = G_2(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

D. Если $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ одной и той же последовательнсcти $\{f_n(x)\}$, то $G(x) \leqq F(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

E. Если верхний и нижний пределы по мере на $[a, b]$ послеговательности $\{f_n(x)\}$ равны функции $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$ то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x)$ на данном сегменте.

Будем называть функции $F(x)$ и $G(x)$ верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, если они являются такими пределами для частних сумм этого ряда. Можно доказать следующие теоремы:

Теорема VII. *Для любых двух измеримых функций $F(x)$ и $G(x)$, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и таких, что $G(x) \leqq F(x)$ почти всюду на этом сегменте, существует тригонометрический ряд* (4, 1) *обладающий следующими свойствами:*

1) *$F(x)$ и $G(x)$ являются верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ рядя* (4, 1).

2) *Какова бы ни была измеримая функция $\psi(x)$, определенная почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющая условию $G(x) \leqq \psi(x) \leqq F(x)$ почти всюду на этом сегменте, можно определить последовательност $S_{n_k}(x)$, $k=1, 2, \ldots$, частных сумм ряда* (4, 1) *с возрастающими индексами n_k, которая сходится к $\psi(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.*

3) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$.

Ясно, что теорема VI является частным случаем теоремы VII.

Теорема VIII. *Для любых измеримых функций $F(x)$, $G(x)$ и $\psi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, p$, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющих неравенствам*

$$G(x) \leqq \psi_i(x) \leqq F(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, p)$$

почти всюду на этом сегменте, можно определить тригонометрический ряд (4, 1) *который обладает следующими свойствами:*

1) $F(x)$ *и* $G(x)$ *являются верхним и нижним пределами по мере на* $[-\pi, \pi]$ *ряда* (4, 1).

2) *Для любого* $i=1, 2, \ldots, p$ *существует последовательность частных сумм* $S_{n_{ik}}(x)$, $k=1, 2, \ldots,$ *ряда* (4, 1) *с возрастающими индексами* n_{ik}, $k=1, 2, \ldots,$ *которая сходится к* $\psi_i(x)$ *почти всюду на* $[-\pi, \pi]$.

3) *Если какая нибудь последовательность частных сумм ряда* (4, 1) *с возрастающими иддексами сходится на множестве* E *положительной меры к функции* $\psi(x)$, $E \subset [-\pi, \pi]$, *то для одного из значений* $i=1, 2, \ldots, p$ $\psi(x)=\psi_i(x)$ *почти всюду на* E.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ [10].

Литература.

А. Колмогоров

[1] Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **7** (1925), стр. 23—28.

[2] Une série de Fourier divergente partout, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **183** (1926), стр. 1327—1328.

Н. Лузин

[3] Sur les propriétés de fonctions mesurables, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **154** (1912), стр. 1688—1690.

[4] *Интеграл и тригонометрический ряд* (1915), стр. 1—242.

Д. Меньшов

[5] Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **163** (1916), стр. 433—436.

[6] Sur la représentation des fonctions mesurables par des séries trigonométriques, *Мат. Сборник*, **9** (1941), стр. 669—692.

[7] Sur la convergence uniforme des séries de Fourier, *Мат. Сборник*, **11** (1942), стр. 69—96.

[8] Sur les sommes partielles des séries de Fourier des fonctions continues, *Мат. Сборник*, **15** (1944), стр. 385—432.

[9] О частных суммах тригонометрических рядов, *Мат. Сборник*, **20** (1947), стр. 197—238.

[10] О сходимости по мере тригонометрических рядов, *Доклады Акад. Наук СССР*, **59** (1948), стр. 849—852.

F. Riesz

[11] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Annalen*, **69** (1910), стр. 449—496.

L. Fejér

[12] Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, *Journal für die reine und angew. Math.*, **138** (1910), стр. 22—53.

(*Поступило 9/XI 1949 г.*)