О наилучших приближениях в комплексной области.

С. Н. МЕРГЕЛЯН (Ереван).

Рассмотрим конечную область D со связным дополнением, совпадающую с множеством внутренних точек своего замыкания. Пусть функция $f(z)$ регулярна в D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ а $\varrho_n(f, D)$ означает нижнюю грань чисел

$$\max_{z \in D} |f(z) - P_n(z)|$$

по всевозможным полиномам степени n. Как показал М. В. КЕЛДЫШ [1] при этом $\varrho_n(f, D) \to 0$, рпи $n \to \infty$, причем скорость убывания чисел ϱ_n тесно связана со свойствами $f(z)$ на границе D, так же как это имеет место в случае наилучших приближений на отрезке $[0, 1]$. Однако, в отличие от наилучших приближений в вещественной области, основные вопросы которых хорошо изучены, в случае комплексой области на скорость убывания $\varrho_n(f, D)$ влияют в равной мере со свойствами $f(z)$ свойства границы области D.

В случае, когда область D ограничена аналитической кривой известно, что из соотношения

$$\varrho_n(f, D) < \frac{\text{Const}}{n^{k+\alpha}} \qquad (k \text{ — целое, } 0 < \alpha < 1) \tag{1}$$

следует, что $f^{(k)}(z)$ удовлетворяет в $\overline{D}$ условию Липшица порядка α и наоборот из этого обстоятельства следует неравенство (1). Таким образом в случае аналитических областей зависимость $\varrho_n(f, D)$ от $f(z)$ аналогична зависимости $E_n(f)$ от свойств $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Однако, уже в случае некоторых из областей с гладкой границей эта аналогия исчезает и влияние границы D на скорость убывания $\varrho_n(f, D)$ создаёт специфические особенности теории наилучших приближений в комплексной области.

В настоящей статье, не останавливаясь на всевозможных вопросах в этом направлении, мы рассмотрим лишь несколько характерных задач.

§ 1. Области с гладкой границей.

Пусть D произвольная конечная область с односвязным дополнением; через Z_R $(R > 1)$ обозначим линию уровня функции Грина $G(z)$ дополнения к D с особенностью на бесконечности:

$$Z_R: \quad G(z) = \log R;$$

D_R — конечная область ограниченная Z_R. Пусть также $f(z)$ аналитична в D_R и не превосходит там по модулю единицы.

Лемма 1. *Если диаметр D равен единице, то найдутся две абсолютные постоянные C_1 и C_2 для которых неравенство*

$$\varrho_n(f, D) < \frac{C_1}{(R-1)^{C_2} R^n} \qquad (C_2 \leqq 3)$$

выполняется при всех $R > 1$ и $n = 1, 2, 3 \ldots$.

Доказательство легко вывести, составляя интерполяционный полином Фейера с равномерно распределенными узлами, оценивая остаточный член представимый в виде интеграла Коши и учитывая, что, во-первых,

$$\text{длина } Z_R < \frac{C_3}{R-1},$$

и, во-вторых, расстояние любой точки Z_R до $\Gamma = \overline{D} - D$ превосходит $C_4 (R-1)^2$, где C_3, C_4 — абсолютные постоянные.

Через $d(\zeta, R)$, где $\zeta \in \Gamma$, обозначим расстояние ζ до Z_R. Поведение $d(\zeta, R)$ при значениях R, близких к единице, зависит основном от особенностей границы области D в окрестности точки ζ. Приведем формулировку одного результата Варшавского, которым мы воспользуемся в дальнейшем.

Пусть в окрестности $|z| \leqq \alpha$ точки $z = 0$ граница Γ состоит из двух дуг Γ_+ и Γ_-, уравнения которых в полярных координатах суть

$$\varphi = \Phi_+(\varrho), \qquad \varphi = \Phi_-(\varrho) \qquad (\Phi_+ < \Phi_-)$$

соответственно. Пусть также существуют пределы

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho \frac{d\Phi_+}{d\varrho}, \qquad \lim_{\varrho \to 0} \varrho \frac{d\Phi_-}{d\varrho}.$$

Через $w = w(z)$ обозначим функцию, конформно отображающую область D на круг $|w - 1| < 1$ так что $z = 0$ переходит в $w = 0$; $\Theta(\varrho) = \Phi_-(\varrho) - \Phi_+(\varrho)$

Лемма 2. (С. ВАРШАВСКИЙ [2]) *Если*

$$\int_0^a \left[\left(\frac{d\Phi_+}{d\varrho} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi_-}{d\varrho} \right)^2 \right] \frac{\varrho \, d\varrho}{\Theta(\varrho)} < \infty,$$

то в окресности точки $z = 0$ имеем

$$|w(z)| = c \exp\left\{ -\pi \int_{|z|}^{a} \frac{dr}{r\Theta(r)} + O(1) \right\}$$

где C — независит от z.

Это утверждение дает возможность в ряде случаев исследовать поведение конформно отображающих функций в замкнутой области, а также оценить расстояние линий уровня функции Грина до граничной точки, в зависимости от поведения границы вблизи этой точки. Отсюда в частности следует

Лемма 3. *Если область D ограничена конечным числом гладких дуг с непрерывно вращающейся касательной, составляющих между собой углы с внешним раствором, не превышающим π, то при всяком $\varepsilon>0$*

$$d(\zeta, R)<C(R-1)^{1-\varepsilon},$$

где C не зависит от ζ и $R<R(\varepsilon)$.

Известно, что в случае когда область D ограничена гладкой кривой с ограниченной кривизной и функция $f(z)$ удовлетворяет в $\overline{D}$ условию Липшица порядка α, то, при любом $\varepsilon>0$

$$(3) \qquad \varrho_n(f, D)<\frac{\mathrm{Const}}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \qquad n>n(\varepsilon).$$

Ниже мы имеем в виду распространить это неравенство на произвольные области с гладкой границей. В случае дополнительных сведений о гладкости Γ неравенство (3) можно улучшить. Заметим, что если $P_n(z)$ — полином наилучшего приближения $f(z)$ в $\overline{D}$ степени n, то, с помощью интеграла Коши, легко получить неравенство

$$(*) \qquad \left|P^{(n)}_{n_k}(z)-P^{(n)}_{n_{k-1}}(z)\right|<C^n n!\,\frac{\varrho_{n_{k-1}}(f, D)\,(1+\alpha)^{n_k}}{(d(\zeta, 1+\alpha))^n}, \qquad \alpha \text{ — любое } (\alpha>0),$$

z принадлежит области B_ζ с границей, некасательной к Γ в ζ и принадлежащей $\overline{D}$.

Теорема 1. *Если область D ограничена гладкой кривой с непрерывно меняющейся касательной и $f(z)$ аналитична в D, непрерывна в $\overline{D}$, причем k-я производная $f(z)$ удовлетворяет с $\overline{D}$ условию Липшица порядка α, $0<\alpha\leqq 1$, то, при любом $\varepsilon>0$,*

$$\varrho_n(f, D)<\frac{C}{n^{k+\alpha-\varepsilon}}, \quad n>n(\varepsilon),$$

где C не зависит от n.

Доказательство достаточно провести для случая $k=0$. Общий случай выводится отсюда известным приемом.

Пусть ε_0 — произвольно малое фиксированное число; допустим, что проекция D на ось OX содержит интервал $(0,1)$ и прямые $x=a$, $x=b$ $(0<a<b<1)$ проведены так, что они не касаются границы D и, следовательно, пересекают ее в конечном числе точек.

Часть D, расположенную справа от $x=a$ обозначим через D_a, а часть D, расположенную слева от $x=b$, через D_b. Открытые множества D_a и D_b состоят, очевидно, из конечного числа односвязных областей, расположенных на положительном расстоянии друг от друга:

$$D_a=\sum_{i=1}^{n_1} D_a^{(i)}, \quad D_b=\sum_{i=1}^{n_2} D_b^{(i)}.$$

Через $z=z(s)$ обозначим параметрическое уравнение границы D, причем параметр s представляет длину дуги $\Gamma=\overline{D}-D$ от некоторой фиксированной точки $z_0=z(0)$ до $z(s)$. Число $\varrho<1$ выберем настолько близким к единице, чтобы угол, составленный внутренней нормалью к границе D в точке $z(s)$ с внутренней линией уровня Z_ϱ $(\varrho<1)$ в точке ближайшей к $z(s)$, отличался бы от $\frac{\pi}{2}$ менее, чем на некоторое $\omega>0$ для любого значения s. Кольцевую область, заключенную между Γ и Z_ϱ, обозначим через l. Часть l, расположенную между внутренней нормалью к Γ в $z(0)$ и внутренней нормалью к Γ в $z(s)$, проведенными до их пересечения с Z_ϱ, обозначим $\sigma(s)$.

Выберем $\delta=\delta(s)$ так, чтобы множество

$$\varDelta(s)=\sigma(s+\delta)-\overline{\sigma}(s)$$

представляло бы область, звездообразную относительно некоторой точки z_s при всех значениях s. $\varDelta(s)$ является криволинейным четырехугольником с углами, близкими к прямым и зависит от ϱ. Через J_s обозначим прямую, проходящую через $z(s)$ и ортогональную в $z(s)$ к Γ, через J'_s — прямую проходящую через $z\left(s+\frac{\delta(s)}{4}\right)$ и параллельную J_s. Очевидно, что числа ϱ, ω и $\delta(s)$ можно выбрать, кроме того, так, чтобы часть l, расположенная между J_s и J'_s, принадлежала бы пересечению областей $\varDelta(s)$ и $\sigma\left(s+\frac{\delta(s)}{2}\right)$ при всех s. Достаточно за число $\delta(s)$ взять длину отрезка J_s, расположенного между $z(s)$ и ближайшей к $z(s)$ точкой пересечения J_s с Z_ϱ; за z_s можно взять пересечение диагоналей в криволинейном четырехугольнике $\varDelta(s)$.

Рассмотрим одну из компонент D_a — например $D_a^{(1)}$; часть $\sigma(s)$, расположенную в $D_a^{(1)}$, обозначим $\sigma_1(s)$. Предположим, что $z(0)$ лежит вне $\overline{D}_a^{(1)}$; пусть S_0 — наибольшее из s, для которых $\sigma(s)$ не имеет общих точек с $D_a^{(1)}$, а S_1 — наименьшее из тех s, для которых пересечение l и $D_a^{(1)}$ совпадает с $\sigma_1(s)$. Через (s_0, s_1) обозначим наибольший интервал, обладающий тем свойством, что $\sigma(s_1)-\overline{\sigma}(s_0)$ принадлежит $D_a^{(1)}$. Часть $\sigma_1\left(s+\frac{\delta(s)}{2}\right)$, расположенную по ту же сторону от прямой J_s, что и J'_s, обозначим $\sigma_{11}(s)$ Множество точек, расположенных от $\sigma_{11}(s)$ на расстоянии, меньшем λ, обозначим $\sigma_{11\lambda}(s)$; совокупность точек, отстоящих от $\sigma_1(s)$ на расстояние, меньшее λ — $\sigma_{1\lambda}(s)$.

Предположим, что существует полином $\pi_1(z)$ степени n со следующими свойствами:

1. $|\pi_1(z)-f(z)|<c_1 n^{-\alpha+\varepsilon_0}$, $\quad z\in\overline{\sigma}_1\left(s+\frac{\delta(s)}{2}\right)$,

2. $|\pi_1(z)|\leq M$, $\quad z\in\overline{\sigma}_{1\lambda_n}\left(s+\frac{\delta(s)}{2}\right)$, $\quad \lambda_n=\frac{1}{n^{1-\varepsilon_0}}$,

где M — не зависит от n и s.

Область $\Delta(s)$ звездообразна относительно z_s, поэтому функция

$$f_1(z) = f\left(z_s + \frac{z - z_s}{1+\lambda}\right)$$

аналитична в области $\Delta_\lambda(s)$, получаемой из $\Delta(s)$ растяжением относительно точки z_s в $1+\lambda$ раз. В силу леммы 3 существует постоянная $c_2 > 0$, для которой образ окружности $|w| = 1 + 2\lambda$ при отображении $|w| > 1$ на дополнение к $\overline{\Delta}(s)$ расположен целиком в $\Delta_{c_2}\lambda^{1-\varepsilon_0}(s)$ (нас интересуют лишь малые значения $\lambda > 0$).

Согласно лемме 1, найдется полином $\pi_2(z)$ степени n так, что

$$\max_{z \in Z_{1+\lambda}} |\pi_2(z) - f_1(z)| < \frac{c_4}{\lambda^{c_2}(1+\lambda)^n}$$

(под $z_{1+\lambda}$ понимаем линию уровня дополнения к $\overline{\Delta}(s)$). Одновременно в $\overline{\Delta}(s)$ будет выполнятся неравенство

$$|\pi_2(z) - f(z)| < \frac{c_4}{\lambda^{c_2}(1+\lambda)^n} + c_5\lambda^{\alpha(1-\varepsilon_0)},$$

так как при $z \in \overline{\Delta}(s)$

$$\left| f(z) - f\left(z_s + \frac{z - z_s}{1 + c_2\lambda^{1-\varepsilon_0}}\right)\right| < c_5\lambda^{\alpha(1-\varepsilon_0)}.$$

Покроем область $\Delta_{c_2}\lambda^{1-\varepsilon_0}(s)$ областью $G(k)$ а $\overset{\circ}{\varrho}_{11\lambda}(s)$ — областью $B(k)$ так, чтобы $G(k)$ и $B(k)$ находились бы на положительном расстоянии друг от друга, превышающем $k > 0$, а также расстоянии любой точки $B(k)$ до $\sigma_{11}\lambda(s)$, равно как и расстояние любой точки $G(k)$ до $\Delta_{c_2}\lambda^{1-\varepsilon_0}(s)$ превышало бы k (такое $k > 0$, не зависящее от $\lambda \leq \lambda_0$, найти, очевидно, можно).

Как известно, существует полином $\pi_3(z)$ степени n такой, что

$$|\pi_3(z) - \pi_1(z)| < c_7 q^n, \qquad z \in \sigma_{11}\lambda(s),$$
$$|\pi_3(z) - \pi_2(z)| < c_7 q^n, \qquad z \in G(k),$$

где $q < 1$ зависит от k.

Пусть теперь G — конечная область с односвязным дополнением, проекция которой на ось OY больше единицы, $f(z)$ регулярна в G, непрерывна в $\overline{G}$, $G_{1+\lambda}$ — область, ограниченная внешней линией уровня $Z_{1+\lambda}$ области G, $\pi_4(z)$, $\pi_5(z)$ — два полинома степени n со следующими свойствами:

1) $|\pi_4(z)| \leq M$ в той части $G_{1+\lambda}$, которая расположена выше прямой $y = a$, аналогично $|\pi_5(z)| \leq M$ в части $G_{1+\lambda}$, расположенной снизу от прямой $y = b$ $(b - a = 1)$; предполагаем, что отрезок $[a, b]$ принадлежит проекции G на ось OY причем $b = a + 1$.

2) В части $\overline{G}$, расположенной в полуплоскости $y \geq a$

$$|\pi_4(z) - f(z)| < \frac{c_8}{n^{\alpha - \varepsilon_0}}$$

в части же $\bar{G}$, расположенной в полуплоскости $y \leq b$

$$|\pi_5(z) - f(z)| < \frac{c_8}{n^{\alpha - \varepsilon_0}}.$$

Допустим дополнительно, что расстояние любой точки $Z_{1+\lambda}$ до $\overline{G}-G$ меньше $c_9\lambda^{1-\varepsilon_0}$ $\left(\lambda \geqq \lambda_n = \dfrac{1}{n^{1-\varepsilon_0}}\right)$.

Лемма 4. *Существует полином $\pi_6(z)$ степени n, для которого*

1. *в области* $G_{1+\lambda_n/2}$: $\quad |\pi_6(z)|\leqq 2M$,
2. *в области* $\overline{G}$: $|\pi_6(z)-f(z)| < \dfrac{c_{10}}{n^{\alpha-3\varepsilon_0}} \quad (n > n_0)$.

Доказательство основывается на методе усреднения академика М. В. Келдыша [1].

Обозначим $\varphi(z,t) = \pi_4(z)$ при $t \geqq \frac{1}{2}(a+b)$ и $\varphi(z,t) = \pi_5(z)$ при $t < \frac{1}{2}(a+b)$, и

$$\varphi(x+iy) = \int\limits_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} \varphi(z,t)\,dt.$$

Пусть $\zeta = \xi + i\eta$. Формула

$$(5)\quad \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_{1+\lambda}} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{G_{1+\lambda}} \frac{\varphi\left(\zeta, \eta+\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\zeta, \eta-\frac{1}{2}\right)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta$$

выведена в [1].

Интеграл в правой части (5) разобьем на две части: по области G и по оставшейся области $G_{1+\lambda} - \overline{G}$. Прибавляя и вычитывая к числителю в дроби под интегралом в правой части (5) $f(\zeta)$ убеждаемся о том, что первое слагаемое не превосходит

$$\frac{c_{11}}{n^{\alpha-\varepsilon_0}}\iint\limits_{G}\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta - z|} \leqq \frac{c_{12}}{n^{\alpha-\varepsilon_0}}.$$

Второе слагаемое оцениваем на основании свойства 1, которому удовлетворяют полиномы $\pi_4(z)$ и $\pi_5(z)$

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{G_{1+\lambda}-\overline{G}}\int \frac{\varphi\left(\zeta, \eta+\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(\zeta, \eta-\frac{1}{2}\right)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta\right| < 2M\,\frac{1}{4\pi}\int\limits_{G_{1+\lambda}-\overline{G}}\int \frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z} \leqq$$

$$\leqq c_{13}\,\lambda^{1-\varepsilon_0}\log\frac{1}{\lambda}.$$

Но, очевидно

$$|\varphi(z) - f(z)| < \int\limits_{y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} |\varphi(z,t) - f(z)|\,dt \leqq \frac{c_8}{n^{\alpha-\varepsilon_0}}$$

так, что в области G

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_{1+\lambda_n}} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt - f(z) < \frac{c_8}{n^{\alpha-\varepsilon_0}} + c_{13}\,\frac{\log n}{n^{(1-\varepsilon_0)^2}} < \frac{c_{14}}{n^{\alpha-3\varepsilon_0}}.$$

Функция $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{z_{1+\lambda_n}} \dfrac{\varphi(t)}{t-z}\,dt$ аналитична в $G_{1+\lambda_n}$ и, как это следует из (5), ограничена там постоянной, не зависящей от n, поэтому можно найти полином $\pi_7(z)$ степени n так чтобы

$$\max_{z\in \overline{G}_{1+\lambda_n/2}} \left|\pi_7(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z_{1+\lambda_n}}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt\right| \leq \frac{c_{15}}{\left(\dfrac{1+\lambda_n}{1+\frac{\lambda_n}{2}}-1\right)^{c_2}\left(\dfrac{1+\lambda_n}{1+\frac{\lambda_n}{2}}\right)^{n}} < \frac{c_{16}}{n}.$$

Следовательно, полином $\pi_7(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы. Заметим, что предположение $b-a=1$ несущественно и было сделано для простоты. В случае $b-a\neq 1$ изменится лишь постоянная c_{10}, входящая в оценку множителем. Также несущественно то, что в качестве двух прямых взяты параллели оси OX, к этому случаю можно привести общий случай поворотом

После этого замечания мы можем применить лемму к случаю, когда в качестве G имеем область $\sigma_1\,(s+\delta)$ в качестве прямых $y=a$, $y=b$ — прямые J_s', J_s и полиномов $\pi_4(z)$, $\pi_5(z)$ — полиномы $\pi_1(z)$, $\pi_3(z)$ соответственно.

Таким образом, предполагая существование полинома $\pi_1(z)$ аппроксимирующего в $\bar{\sigma}_1\left(s+\dfrac{\delta}{2}\right)$ функцию $f(z)$ со скоростью $\text{const.}\, n^{-\alpha+\varepsilon_0}$ и ограниченного в определенной окрестности $\sigma_1\left(s+\dfrac{\delta}{2}\right)$, приходим к существованию полинома $\pi_7(z)$, приближающего $f(z)$ в $\bar{\sigma}_1(s+\delta)$ со скоростью $\text{const.}\, n^{-\alpha+3\varepsilon_0}$ и ограниченного в соответствующей окрестности $\bar{\sigma}_1(s+\delta)$.

Но легко видеть, что $\sigma_1(s_0)$ звездообразна относительно некоторой своей точки и для нее соответствующий полином $\pi_1(z)$ существует, то же можно утверждать и относительно $\sigma_1\left(s_0+\dfrac{\delta(s_0)}{2}\right)-\bar{\sigma}_1(s_0)$; далее разбиваем промежуток (s_0, s_1) на части, соответствующей длины:

$$s_0,\ s'=s_0+\frac{\delta(s_0)}{2},\ \ s''=s'+\frac{\delta(s')}{2},\ \ldots,\ s^{(k)}=s^{(k-1)}+\frac{\delta(s^{(k-1)})}{2}>S_1$$

и последовательно применяем описанный выше процесс усреднения к областям $\sigma_1(s_0)$, $\sigma_1(s')$, $\sigma_1(s'')$, ..., $\sigma_1(S_1)$ приходим, наконец, к полиному $\pi_8(z)$ степени n удовлетворяющему в области $\sigma_1(S_1)$ неравенству

$$(6)\qquad |\pi_8(z)-f(z)|<\frac{c_{17}}{n^{\alpha-c_{18}\varepsilon_0}}$$

а в $\overline{c}_{1\lambda_n c_{19}}(S_1)$

$$(7)\qquad |\pi_8(z)|\leq c_{20}M.$$

Проводя аналогичные рассуждения для каждой из компонент $D_a^{(i)}$ и имея в виду, что все они расположены на положительном расстоянии друг от друга, не зависящем от n, можем считать, что неравенства (6), (7) выполняются в части l_a области l, расположенной правее $x=a$. Также находим полином $\pi_9(z)$, приближающий $f(z)$ в части l_b области l расположенной левее $x=b$ со скоростью $c_{21}\,n^{-\alpha+c_{22}\varepsilon_0}$ и ограниченный в соответствующей окрестности l_b. Применим, наконец, процесс усреднения к областям l_a и l_b и полиномам $\pi_8(z)$ и $\pi_9(z)$.

Легко видеть, что, изменяя слегка доказательство формулы (5), можно получить для нашего случая формулу

(8)
$$\varphi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_{1+c_{22}\lambda_n}}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_\varrho}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{d_n}\frac{\varphi\left(\zeta,\eta+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta,\eta-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta$$

(d_n — область между $Z_{1+c_{22}}\lambda_n$ и Z_ϱ $(\varrho<1)$) (обозначения аналогичны обозначениям на стр. 203, расстояние между a и b положено, для простоты, равным единице). Пусть $z\in Z_{1+c_{22}\lambda_n}$; так как $|\varphi(z)-f(z)|<c_{23}\,n^{-\alpha+c_{21}\varepsilon_0}$ при $t\in Z_\varrho$ $(\varrho<1)$ то в силу аналитичности $f(z)$ в области D, имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_\varrho}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt\right|\le\frac{c_{25}(\varrho)}{n^{\alpha-c_{21}\varepsilon_0}}.$$

Двойной интеграл в правой части (8) оцениваем так же, как это делалось при доказательстве леммы 4 (стр. 203). Полином $\pi_{10}(z)$ степени n находим так, чтобы

$$\max_{z\in\overline{D}}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{Z_{1+c_{22}}\lambda_n}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt-\pi_{10}(z)\right|<\frac{c_{26}}{n}.$$

В результате имеем

$$\max_{z\in\overline{D}}\left|f(z)-\pi_{10}(z)\right|<\frac{c_{27}}{n^{\alpha-c_{28}\varepsilon_0}},$$

где c_{27} и c_{28} не зависят от n. Выбирая $\varepsilon_0<\dfrac{\varepsilon}{c_{28}}$ достаточно малым, приходим к доказательству теоремы.

Если $\omega(\delta)$ означает модуль непрерывности $f(z)$ в $\overline{D}$, то совершенно аналогично можно доказать следующее предложение.

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon>0$ существует постоянная $c>0$ так, что*

$$\varrho_n(f,D)<c\,\omega\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right),\qquad n>n(\varepsilon).$$

Рассмотрим теперь связь между скоростью наилучшего приближения и свойствами функций при некоторых дополнительных ограничениях на гладкость границы.

Через $\gamma(\delta)$ обозначим модуль непрерывности функции $z'(s)$ ($z(s)$ — параметрическое уравнение границы, s — длина дуги Γ).

Теорема 3. *Если*

$$\int_{\varepsilon}^{c} \frac{\gamma(x)}{x}\,dx > |\log\log\varepsilon|\;|\log\log\log\varepsilon|,$$

то, вообще говоря, найдется функция $\varphi(z)$ *класса* $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *так, что*

$$\limsup \frac{\rho_n(\varphi, D)\,n^{\alpha}}{(\log n)^{\alpha}} = \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим область D, для которой модуль непрерывности $z'(s)$ не превосходит $\gamma(\delta)$ и в некоторой окрестности точки $z=0$

$$\Theta(r) = \pi + \gamma(r)$$

(такие области, очевидно, существуют). С помощью леммы 2 легко получить неравенство

$$d(0, 1+r) > c'\,\frac{r}{|\log r|\;|\log\log r|}.$$

Предположим теперь что для некоторой функции $f(z)$ регулярной в D и непрерывной в $\overline{D}$ существует полином $P_n(z)$ степени n так, что

$$\rho_n(f, D) \leqq \max_{z\in\overline{D}} |f(z) - P_n(z)| < \mathrm{Const}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\alpha}.$$

Оценим модуль непрерывности $f(z)$ в D — $\omega(\delta)$:

$$(**)\qquad \begin{aligned} |f(z') - f(z'')| \leq & \sum_{k=1}^{m} |P_{2^k}(z') - P_{2^{k-1}}(z') - P_{2^k}(z'') + P_{2^{k-1}}(z'')| + \\ & + |P_1(z') - P_1(z'')| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |P_{2^k}(z') - P_{2^{k-1}}(z') - P_{2^k}(z'') + P_{2^{k-1}}(z'')|. \end{aligned}$$

Из (*) находим

$$|P'_{2^k}(z) - P'_{2^{k-1}}(z)| < \mathrm{Const}\left(\frac{k}{2^k}\right)^{\alpha}\frac{2^k}{k\log k} = \mathrm{Const}\,\frac{2^{k(1-\alpha)}}{k^{1-\alpha}\log k}.$$

Учитывая это, получаем

$$|f(z') - f(z'')| < \mathrm{Const}\left[\delta\sum_{k=2}^{m}\frac{2^{k(1-\alpha)}}{k^{1-\alpha}\log k} + \delta + \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{k^{\alpha}}{2^{k\alpha}}\right].$$

Оценивая суммы и полагая m равным целой части решения уравнения

$$2^x = \frac{x}{\delta}\log\log\log\frac{1}{\delta}$$

находим

$$(9)\qquad \omega(\delta) = \sup_{|z'-z''|\leqq\delta} |f(z') - f(z'')| < \mathrm{Const}\,\frac{\delta^{\alpha}}{\log\log\log\frac{1}{\delta}}.$$

Предположим теперь, что $\varphi(z)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, однако, дополнительному условию (9) не удовлетворяет (например, $\varphi(z) = z^{\alpha}$) тогда, согласно доказанному, должно выполняться соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sup \frac{\rho_n(\varphi, D)\,n^{\alpha}}{(\log n)^{\alpha}} = \infty.$$

Если, например $\gamma(r)=|\log r|^{-\lambda}$, то при $\lambda>1$ оценка $\varrho_n<\left(\frac{\log n}{n}\right)^\alpha$ верна, если же $\lambda=1$ или $\lambda<1$ то она уже перестает быть справедливой в общем случае. Пусть

$$\gamma(r)=\frac{c}{\log r|\,|\log\log r|\ldots|\log_q r|^\lambda}.$$

Теорема 4. *Если $\lambda=1$, то, вообще говоря, для некоторых $f(z)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$*

$$\varrho_n(f,D)>\mathrm{Const}\left(\frac{\log_q n}{n}\right)^\alpha$$

если же $\lambda<1$, то для некоторых $f(z)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, справедливо неравенство

$$\varrho_n(f,D)>\mathrm{Const}\left\{\frac{1}{n}\exp\left[\frac{1}{1-\lambda}(\log_q n)^{1-\lambda}\right]\right\}^\alpha.$$

Доказательство мы не приводим, так как оно подобно доказательству теоремы 3.

Пусть выполняется $\int\limits_0^c\frac{\gamma(x)}{x}\,dx<\infty$ и

$$\varrho_n(f,D)<\frac{\mathrm{Const}}{n^{k+\alpha}}\tag{10}$$

где k — целое, $0<\alpha\leq 1$.

Теорема 5. *Если $\alpha<1$, то $f^{(k)}(z)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ в $\overline{D}$, если же $\alpha=1$, то это заключение, как известно, неверно уже для аналитических областей. В случае $\alpha=1$ для того, чтобы $f^{(k)}(z)$ удовлетворяла бы условию Липшица первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^\infty n^k\varrho_n(f,D)<\infty.\tag{11}$$

Доказательство. С помощью леммы 2 легко показать, что при условии $\int\limits_0^c\frac{\gamma(x)}{x}\,dx<\infty$ найдется постоянная c, для которой неравенство

$$d(\xi,x)>c(x-1)\tag{12}$$

имеет место для всех граничных точек ξ. Отсюда заключаем, что

$$|P'_{2^n}(z)-P'_{2^{n-1}}(z)|\leqq 2^{n+1}\varrho_{2^{n-1}}(f,D).$$

Далее поступаем точно так же, как при доказательстве соответствующего результата в вещественной области (теорема С. Н. Бернштейна). Докажем теперь вторую часть теоремы, когда $\alpha=1$.

Условие (11) необходимо; полагая для простоты $k=0$ рассмотрим функцию

$$f(z)=\sum_{n=1}^\infty z^n(\alpha_n-\alpha_{n+1})=-(1-z)\sum_{n=2}^\infty\alpha_n z^{n-1}$$

в единичном круге, где $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq \ldots$ произвольная последовательность монотонно убывающих чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

Частичные суммы ее ряда Тейлора приближаются к ней в $|z| \leqq 1$ — со скоростью α_n, однако, $f(z)$ не удовлетворяет условию Липшица первого порядка, так как для любого сколь угодно большого N можно найти целое m и $\delta < \frac{1}{m}$ так, чтобы

$$|f(1) - f(1-\delta)| \geqq \delta \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (1-\delta)^k \geqq \delta \frac{\sum_1^m \alpha_k}{e} \geq \delta \frac{N}{e}.$$

Докажем достаточность условия (11). Учитывая (12), легко получить неравенство

$$|P^{(k)}_{2^n}(z') - P^{(k)}_{2^{n-1}}(z') - P^{(k)}_{2^n}(z'') + P^{(k)}_{2^{n-1}}(z'')| \leqq |z' - z''|\, 2.2^{n(k+1)} \varrho_{2^{n-1}}(f, D).$$

На основании (**) имеем

$$|f^{(k)}(z') - f^{(k)}(z'')| \leq c\delta \sum_{k=1}^{M} 2^{n(k+1)} \varrho_{2^{n-1}}(f, D) + c\delta + \sum_{M+1}^{\infty} 2^{nk} \varrho_{2^n}(f, D).$$

Выберем M, в зависимости от δ, так, чтобы

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} 2^{ik} \varrho_{2^i}(f, D) < \delta.$$

Отметим следующее предложение, на доказательстве которого мы не будем останавливаться.

Лемма. *Пусть $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq \ldots$ произвольная, монотонно убывающая к нулю, последовательность чисел, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — возрастающая поседовательность целых чисел. Для того, чтобы из сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ всегда следовала бы сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} n_i \alpha_{n_i}$, достаточно, чтобы существовало положительное число μ, такое, что для всех к,*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq 1 + \mu.$$

В частности, отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(k+1)} \varrho_{2^{n-1}}(f, D) < \infty,$$

т. е. $f^{(k)}(z)$ удовлетворяет условию Лупшица первого порядка.

Что же касается общего случая областей с гладкой границей, не удовлетворяющих условию $\int_0^c \frac{\gamma(x)}{x} dx < \infty$, то для $f(z) \in \mathrm{Lip}\, \alpha$ дать оценку

$\varrho_n(f, D)$, относящуюся ко всему классу областей с гладкой границей и лучшую, нежели
$$\varrho_n(f, D) < \frac{\mathrm{Const}}{n^{\alpha-\varepsilon}}$$
нельзя, так как можно доказать следующее.

Пусть $\psi(\delta)$ — монотонная функция, убывающая к нулю при $\delta \to +0$ и при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяющая условию
$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta^{\varepsilon}}{\psi(\delta)} = 0.$$
Существует область D_1 с гладкой границей, такая, что скорость приближения $n^{-k-\alpha}$ (k — целое, $0 < \alpha < 1$) гарантирует для некоторых граничных точек ξ неравенство
$$|f^{(k)}(z') - f^{(k)}(z'')| < \mathrm{Const}\, |z' - z''|^{\alpha}\, \psi(|z' - z''|)$$
(z' и z'' принадлежат B_{ξ} (стр. 200)) и существует другая область D_2 также с гладкой границей и функция $f(z)$ так, что $\varrho_n(f, D) < n^{-k-\alpha}$, однако, для некоторых граничных точек ξ
$$\sup_{z', z'' \in B_{\xi}} |f^{(k)}(z') - f^{(k)}(z'')| > \mathrm{Const}\, \frac{|z' - z''|^{\alpha}}{\psi(|z' - z''|)}.$$
Доказательство этого утверждения подобно приведенному выше доказательству теоремы 3.

§ 2. Обратное неравенство для $\varrho_n(f, D)$.

Пусть D означает конечную область, ограниченную жордановой кривой Γ; через $d(\zeta; r)$ обозначим расстояние образа окружности $|w| = 1 + r$ при конформном отображении внешности единичного круга на дополнение к $\overline{D}$ до граничной точки ζ. Через B_{ζ} обозначим произвольную подобласть D обладающую только тем свойством, что отношение расстояния любой точки B_{ζ} до ζ к расстоянию той же точки до Γ ограничено сверху равномерно относительно всех точек B_{ζ}. Класс функций, регулярных в какой-либо области G, k-я производная которых удовлетворяет в $\overline{G}$ условию Липшица порядка $\alpha > 0$ обозначим $Z(G; k+\alpha)$.

Следует отметить, что под модулем непрерывности $f(z)$ в G $w(\delta)$ мы подразумеваем верхнюю грань величин $|f(z') - f(z'')|$ по всевозможным парам z', z'' принадлежащим $\overline{G}$ и таким, что z' можно соединить с z'' спрямляемой кривой, расположенной целиком в $\overline{G}$ и по длине не превосходящей δ; для некоторых областей это определение, очевидно, не совпадает с тем определением модуля непрерывности, которое дается в вещественной области; соответственно этому иной смысл, вообще говоря, вкладывается в удовлетворение условию Липшица в замкнутой области $\overline{G}$.

Теорема 6. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \varrho_n(f,D)}{\log d\left(\zeta,\frac{1}{n}\right)} = A,$$

то, при всяком $\varepsilon>0$, $f(z)\in Z(B_\zeta; A-\varepsilon)$, *если же* $A=\infty$ *то* $f(z)$ *неограниченно диференцируема в* $\overline{B}_\zeta$.

Доказательство. Для любого целого $k>0$ определим целое число n_k из условия

$$d\left(\zeta;\frac{1}{n_k}\right) \geqq \frac{1}{2^k} > d\left(\zeta;\frac{1}{n_k+1}\right). \tag{13}$$

Числа $\{n_k\}$ составляют, очевидно, возрастающую последовательность. Пусть z означает произвольную точку $\overline{B}_\zeta$, $r>0$, p — некоторое целое, а $P_m(z)$ — полином степени m, наименее уклоняющийся от $f(z)$ в $\overline{D}$.

Имеем, очевидно

$$P^{(p)}_{n_k}(z) - P^{(p)}_{n_{k-1}}(z) = \frac{p\,!}{2\pi i}\int\limits_{|t-z|=z} \frac{P_{n_k}(t) - P_{n_{k-1}}(t)}{(t-z)^{p-1}}\,dt. \tag{14}$$

Но из определения B_ζ следует, что существует $c_0>0$ так, что круг $|t-z|<c_0\,d(\zeta,\varepsilon)$ содержится целиком в области $D_{1+\varepsilon}$ ограниченной внешней линией уровня $Z_{1+\varepsilon}$. Известно, что если $\max\limits_{z\in\overline{D}}|Q_n(z)|=M$, то $\max\limits_{z\in D_\varrho}|Q_n(z)|\leqq M\varrho^n$ $(\varrho>1)$. Имея в виду, что

$$\max_{z\in\overline{D}}|P_{n_k}(z)-P_{n_{k-1}}(z)| < \varrho_{n_k}(f,D) + \varrho_{n_{k-1}}(f,D) \leqq 2\,\varrho_{n_{k-1}}(f,D)$$

и полагая $r=c_0\,d\left(\zeta,\frac{1}{n_k}\right)$, применим это к оценке разности стоящей под интегралом в (14):

$$\begin{aligned} |P^{(p)}_{n_k}(z) - P^{(p)}_{n_{k-1}}(z)| &\leqq \frac{p\,!}{2\pi}\int\limits_{|t-z|=c_0 d\left(\zeta;\frac{1}{n_k}\right)} \frac{2\,\varrho_{n_{k-1}}(f,D)\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}}{|z-t|^{p+1}}\,dt \leqq \\ &\leqq \frac{2e}{c_0^p}\,p\,!\,\frac{\varrho_{n_{k-1}}(f,D)}{\left[d\left(\zeta;\frac{1}{n_k}\right)\right]^p} \leqq \frac{2^{p+1}e}{c_0^p}\,p\,!\,\frac{\varrho_{n_{k-1}}(f,D)}{\left[d\left(\zeta;\frac{1}{n_{k-1}}\right)\right]^p}. \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть $[a]$ означает, как обычно, целую часть a, $\{a\}=a-[a]$. Положим $p=[A-\varepsilon]$. Т. к. $A>0$ и $\varepsilon>0$ достаточно мало, то $\{A-\varepsilon\}>0$. Из условий теоремы следует

$$|P^{(p)}_{n_k}(z) - P^{(p)}_{n_{k-1}}| < \frac{2^{p+1}e}{C_0^p}\,p\,!\left(d\left(\zeta,\frac{1}{n_{k-1}}\right)\right)^{\{A-\varepsilon\}} \leqq p\,!\,C^p\,\frac{1}{2^{k\{A-\varepsilon\}}}. \tag{16}$$

Следовательно, ряд

$$P_{n_0}^{(p)}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(P_{n_k}^{(p)}(z)-P_{n_{k-1}}^{(p)}(z)\right) \qquad (p=[A-\varepsilon])$$

представляющий в D $f^{(p)}(z)$, равномерно сходится в $\overline{B}_\zeta$, т. е. $f^{(p)}(z)$ непрерывна в $\overline{B}_\zeta$.

Оценим ее модуль непрерывности в замкнутой области $\overline{B}_\zeta$. Пусть z', z'' — точки $\overline{B}_\zeta$. Имеем

$$\left|f^{(p)}(z')-f^{(p)}(z'')\right| \leqq \sum_{k=1}^{\infty}\left|P_{n_k}^{(p)}(z')-P_{k-1}^{(p)}(z')-P_{n_k}^{(p)}(z'')+P_{n_{k-1}}^{(p)}(z'')\right|+ \tag{17}$$

$$+\left|P_{n_0}^{(p)}(z')-P_{n_0}^{(p)}(z'')\right|+\sum_{k=m+1}^{m}\left|P_{n_k}^{(p)}(z')-P_{n_{k-1}}^{(p)}(z')-P_{n_k}^{(p)}(z'')+P_{n_{k-1}}^{(p)}(z'')\right|.$$

Но общий член написанной только что суммы не превосходит

$$\max_{z\in\overline{B}_\zeta}\left|P_{n_k}^{(p+1)}(z)-P_{n_{k-1}}^{(p+1)}(z)\right|\int_{z'}^{z'} d\,s$$

где путь интегрирования лежит целиком в $\overline{B}_\zeta$. Первый сомножитель, аналогично вышеприведенному, легко оценить с помощью интеграла Коши, а относительно второго предположим, что $\int_{z'}^{z'} d\,s\leqq\delta$. В результате получим

$$\left|P_{n_k}^{(p)}(z')-P_{n_{k-1}}^{(p)}(z')-P_{n_k}^{(p)}(z'')+P_{n_{k-1}}^{(p)}(z'')\right|\leqq c^p\,p\,!\,\delta\,2^{k\,(1-\{A-\varepsilon\})}.$$

Но

$$\left|P_{n_0}^{(p)}(z')-P_{n_0}^{(p)}(z'')\right|<c^p\,\delta \qquad (c=\mathrm{Const}).$$

Общий же член последней суммы в правой части (17) оцениваем на основании (16).

Таким образом, имеем

$$\left|f^{(p)}(z')-f^{(p)}(z'')\right|<c^p\,p\,!\left(\delta\sum_{k=1}^{m}2^{k\,(1-\{A-\varepsilon\})}+\delta+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^{k\,\{A-\varepsilon\}}}\right).$$

Полагая теперь $m=\left[\dfrac{|\log\delta|}{\log 2}\right]$ и беря любые пары точек z', z'' из $\overline{B}_\zeta$ с соблюдением условия $\int_{z'}^{z''} d\,s\leqq\delta$, получаем $\omega(\delta)<\mathrm{Const}\;\delta^{\{A-\varepsilon\}}$ где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f^{(p)}(z)$ в B_ζ. Следовательно, включение $f(z)\in Z(\overline{B}_\zeta, A-\varepsilon)$ доказано при всяком $\varepsilon>0$.

Из вышеприведенных рассуждений видно, что при $A=\infty$ $f(z)$ неограниченно диференцируема в $\overline{B}_\zeta$.

Следствие. Таким образом, произвольно медленная скорость приближения $\varrho_n(f\ D)$ обеспечивает неограниченную диференцируемость аппроксимируемой функции в некоторых граничных точках, если только область расположена соответствующим образом около этих точек.

Цитированная литература.

[1] М. В. Келдыш, О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутых областях, *Мат. сборник*, **16** (1945), стр. 249—257.

[2] S. E. Warschawski, On conformal mapping of infinite strips, *Transactions American Math. Society*, **51** (1942), p. 280—335.

(Поступило 9/XI 1949 г.)