Une caractérisation affine de l'ensemble des fonctions positives dans l'espace L^2.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

1. Il y a 12 ans, j'ai trouvé le théorème suivant[1]):

Soit $\mathfrak{R}$ *l'espace de Hilbert (séparable) ou un espace euclidien de dimension finie, et soit* $\mathfrak{P}$ *un sous-ensemble de* $\mathfrak{R}$ *Pour qu'on puisse réaliser* $\mathfrak{R}$ *par un espace* L^2 *de façon à faire correspondre à* $\mathfrak{P}$ *l'ensemble des fonctions positives dans* L^2, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

A. *Pour* $u, v \in \mathfrak{P}$ *on a* $(u, v) \geqq 0$, *et inversement:* $(u, v) \geqq 0$ *pour un* $u \in \mathfrak{R}$ *et pour tout* $v \in \mathfrak{P}$ *entraîne que* $u \in \mathfrak{P}$.

B. *Lorsque pour* $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{P}$ *on a* $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, *alors il existe des éléments* $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22} \in \mathfrak{P}$ *tels que* $u_1 = w_{11} + w_{12}$, $u_2 = w_{21} + w_{22}$, $v_1 = w_{11} + w_{21}$, $v_2 = w_{12} + w_{22}$.

Par un espace L^2 on entend ici l'espace des fonctions à carré sommable par rapport à une certaine distribution de masses positives dans l'intervalle (a, b). "Réaliser" veut dire "appliquer linéairement et isométriquement".

Le théorème subsiste aussi bien pour les espaces complexes que pour les espaces réels. Le cas complexe ne présentant pas de problèmes particuliers essentiels, nous nous bornerons dans la présente Note à l'étude des espaces réels.

Dans la démonstration de ce théorème je m'étais beaucoup servi des méthodes de la théorie générale des opérations linéaires de M. FRÉDÉRIC RIESZ[2]); dans cette théorie la condition **B** joue un rôle fondamental.

La propriété **A** entraîne les suivantes:

A₁. *Si* $u \in \mathfrak{P}$, *on a* $\lambda u \in \mathfrak{P}$ *pour* $\lambda \geqq 0$ *et, si* $u \neq 0$, λu *non* $\in \mathfrak{P}$ *pour* $\lambda < 0$.

A₂. *Si* $u, v \in \mathfrak{P}$, *on a aussi* $u + v \in \mathfrak{P}$.

---

[1]) B. SZ.-NAGY, On the set of positive functions in L_2, *Annals of Math.*, **39** (1938), p. 1—13. Un théorème voisin a été trouvé indépendemment par H. FREUDENTHAL, Teilweise geordnete Moduln, *Proceedings Acad. Amsterdam*, **39** (1936), p. 641—651.

[2]) F. RIESZ, Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Annals of Math.*, **41** (1940), p. 174—206. Rédaction revue d'un Mémoire précédent en hongrois, *Matematikai és Természettudományi Értesitő*, **56** (1937), p. 1—46.

$\mathbf{A}_3$. *Si $u_n \in \mathfrak{P}$ et si $u_n \to u$, on a aussi $u \in \mathfrak{P}$.*

$\mathbf{A}_4$. *Si $u_n, v_n \in \mathfrak{P}$ et si $u_n + v_n \to 0$, on a aussi $u_n \to 0$.* [3])

$\mathbf{A}_5$. *Tout élément $f \in \mathfrak{R}$ admet une décomposition en différence de deux éléments de $\mathfrak{P}$* [4])

Les propriétés $\mathbf{A}_1$—$\mathbf{A}_3$ sont celles d'un *ensemble conique fermé;* la propriété $\mathbf{A}_5$ est celle d'un *ensemble reproducteur.* Enfin, la propriété $\mathbf{A}_4$ est évidemment équivalente, pour tout ensemble conique, à la suivante:

$\mathbf{A}'_4$. *Il existe une constante K telle que $\|u\| \leqq K\|u+v\|$ pour tous $u, v \in \mathfrak{P}$.*

On exprimera ce fait en disant que l'ensemble conique $\mathfrak{P}$ est *normal.* (Ces dénominations sont empruntées à M. KREIN[5]).)

Tandis que **A** est une propriété *métrique,* ses conséquences $\mathbf{A}_1$—$\mathbf{A}_5$, ainsi que **B** sont des propriétés *affines,* c'est-à-dire invariantes par rapport à toute *affinité* (= application linéaire biunivoque et bicontinue) de l'espace $\mathfrak{R}$ sur lui-même ou sur un autre espace de Hilbert.

Or, dans le cas d'un espace $\mathfrak{R}_n$ de dimension finie n, les seules conditions $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_5$, **B** suffisent pour qu'il existe une affinité de $\mathfrak{R}_n$ sur l'espace des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ de sorte que $\mathfrak{P}$ ait pour image l'ensemble des vecteurs pour lesquels $x_i \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$.[6])

Le but de cette Note est d'étudier le même problème pour les espaces de dimension infinie. Nous établirons le

Théorème. *Les conditions $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_5$ et **B** sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une affinité de l'espace $\mathfrak{R}$ sur un espace L^2 telle que $\mathfrak{P}$ ait pour image l'ensemble des fonctions $f(x) \geqq 0$ dans L^2.*

C'est évidemment la *suffisance* de ces conditions qui reste à démontrer. Dans la démonstration, je ne ferai pas usage des résultats de mes précédents articles. D'autre part le théorème "métrique" cité n'est pas un simple corollaire du théorème que je viens d'énoncer.

2. Nous supposerons dans ce qui suit que $\mathfrak{P}$ satisfasse aux conditions du théorème. Soient

$\mathfrak{P}^*$: *l'ensemble des $f \in \mathfrak{R}$ tels que $(u, f) \geqq 0$ pour tout $u \in \mathfrak{P}$,*

$\mathfrak{P}^{**}$: *l'ensemble des $u \in \mathfrak{R}$ tels que $(u, f) \geqq 0$ pour tout $f \in \mathfrak{P}^*$.*

Il est manifeste que $\mathfrak{P}^*$ est aussi un ensemble conique fermé; en particulier $\pm f \in \mathfrak{P}^*$ entraîne $f = 0$ parce que, $\mathfrak{P}$ étant un ensemble reproducteur, le seul élément orthogonal à $\mathfrak{P}$ est 0.

---

[3]) En effet, puisque $(u_n, v_n) \geqq 0$, on a $\|u_n + v_n\|^2 \geqq \|u_n\|^2 + \|v_n\|^2$.

[4]) Dans un espace complexe, on a la décomposition $f = (u - v) + i(w - t)$ avec $u, v, w, t \in \mathfrak{P}$.

[5]) M. KREIN, Propriétés fondamentales des ensembles coniques normaux dans l'espace de Banach, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS,* **28** (1940), p. 13—17.

[6]) Cf. B. SZ.-NAGY, Sur les lattis linéaires de dimension finie, *Commentarii Math. Helvetici,* **17** (1944), p. 209—213.

Il est aussi manifeste que $\mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{P}^{**}$. Montrons que tout élément v de $\mathfrak{P}^{**}$ appartient aussi à $\mathfrak{P}$ et que, par conséquent, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{**}$.

Soit u_0 l'élément de $\mathfrak{P}$ qui est le plus proche de v (un tel élément existe puisque $\mathfrak{P}$ est convexe et fermé). Lorsque u_0 est différent du sommet 0 de $\mathfrak{P}$, $v-u_0$ est nécessairement orthogonal à la génératrice λu_0 $(\lambda \geqq 0)$ de $\mathfrak{P}$ passant par u_0,

$$(v-u_0,\, u_0) = 0; \tag{1}$$

(1) subsiste d'ailleurs évidemment aussi lorsque $u_0 = 0$. De plus, $v-u_0$ fait un angle droit ou obtus avec tout vecteur issu de u_0 et dirigé vers un élément u de $\mathfrak{P}$:

$$(v-u_0,\, u-u_0) \leqq 0. \tag{2}$$

En ajoutant (1) à (2), il résulte que

$$(v-u_0,\, u) \leqq 0$$

pour tout $u \in \mathfrak{P}$, donc $u_0 - v \in \mathfrak{P}^*$. Comme v était un élément de $\mathfrak{P}^{**}$, on aura par conséquent

$$(u_0 - v,\, v) \geqq 0. \tag{3}$$

Il résulte de (1) et (3) que

$$(v-u_0,\, v-u_0) = (v-u_0,\, v) - (v-u_0,\, u_0) \leqq 0,$$

donc $v-u_0 = 0$, $v = u_0 \in \mathfrak{P}$. C. Q. F. D.

Cela étant, nous rappelons les théorèmes suivants de KREIN[7]) et de GROSBERG et KREIN[8]):

Soit $\mathfrak{K}$ un ensemble conique fermé (conditions $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3$) dans un espace de Banach $\mathfrak{B}$. Soit $\overline{\mathfrak{K}}$ le sous-ensemble de l'espace conjugué $\overline{\mathfrak{B}}$ formé des fonctionnelles linéaires de $\mathfrak{B}$ qui assument des valeurs non-négatives sur $\mathfrak{K}$.

a) *Pour que $\overline{\mathfrak{K}}$ soit un ensemble reproducteur dans $\overline{\mathfrak{B}}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{K}$ soit normal* (condition $\mathbf{A}_4$ ou $\mathbf{A}_4'$).

b) *Pour qu'il existe une constante C telle que tout $f \in \overline{\mathfrak{B}}$ admette une décomposition $f = g - h$ $(g, h \in \overline{\mathfrak{K}})$ avec $\|g\| + \|h\| \leqq C\|f\|$, il faut et il suffit que $\mathfrak{K}$ soit normal.*

Appliquons ces théorèmes à l'espace $\mathfrak{R}$, identique à son conjugué, et d'abord aux ensembles $\mathfrak{K} = \mathfrak{P}$, $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{P}^*$, puis aux ensembles $\mathfrak{K} = \mathfrak{P}^*$, $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{P}^{**} = \mathfrak{P}$. Comme $\mathfrak{P}$ est normal par hypothèse, $\mathfrak{P}^*$ est reproducteur et il existe une constante C^* telle que

(4) *tout $f \in \mathfrak{R}$ admet une décomposition $f = g - h$ $(g, h \in \mathfrak{P}^*)$ telle que*
$$\|g\| + \|h\| \leqq C^* \|f\|.$$

Puisque $\mathfrak{P}^{**} = \mathfrak{P}$ est reproducteur par hypothèse, $\mathfrak{P}^*$ est normal; et puisque

---

7) *Loc. cit.* 5), théorème 2.

8) J. GROSBERG et M. KREIN, Sur la décomposition des fonctionnelles en composantes positives, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, **25** (1939), p. 723—726 (théorème 1).

$\mathfrak{P}^*$ est normal, il existe une constante C telle que

(5) *tout* $f \in \mathfrak{R}$ *admet une décomposition* $f = u - v$ $(u, v \in \mathfrak{P})$ *telle que*
$$\|u\| + \|v\| \leqq C\|f\|.$$

L'ensemble $\mathfrak{P}^*$ satisfait donc à toutes les conditions $\mathbf{A}_1$—$\mathbf{A}_5$. On verra que la condition **B** est aussi vérifiée par $\mathfrak{P}^*$.

3. En écrivant $f \geqq g$ lorsque $f - g \in \mathfrak{P}$, on introduit dans $\mathfrak{R}$ une relation d'ordre avec des propriétés évidentes. Par $\mathbf{A}_4'$ et par (5), il existe des constantes K et C de façon que

$\mathbf{A}_4''$: $f \geqq g \geqq 0$ *entraîne* $\|g\| \leqq K\|f\|$.

$\mathbf{A}_5''$. *tout* $f \in \mathfrak{R}$ *admet une décomposition* $f = g - h$ *telle que* $g \geqq 0$, $h \geqq 0$, $\|g\| + \|h\| \leqq C\|f\|$.

L'ensemble $\mathfrak{P}^*$ engendre une relation d'ordre analogue: $f \geqq^* g$ lorsque $f - g \in \mathfrak{P}^*$.

Nous allons montrer que, pour chacune de ces relations d'ordre, *chaque ensemble majorable admet un plus petit majorant et chaque ensemble minorable admet un plus grand minorant.*

Commençons par l'établir pour l'ordre $\geqq^*$. Il suffit de montrer que chaque ensemble $\{f\}$ d'éléments $f \geqq^* 0$ admet un plus grand minorant. La construction suivante suit la méthode de F. RIESZ[2]).

Soit $u \geqq 0$. Envisageons toutes les sommes $s = \sum_1^m (u_i, f_i)$ où m est arbitraire, les f_i sont tirés arbitrairement de $\{f\}$ et les u_i sont tels que $u_i \geqq 0$, $\sum_1^m u_i = u$. Variant sous ces conditions, la somme s (étant toujours $\geqq 0$) admet une borne inférieure $L(u) \geqq 0$. On a évidemment

(6) $L(u) \leqq (u, f)$ pour tout $f \in \{f\}$,

(7) $L(u) \geqq (u, g)$ pour tout g tel que $g \leqq^* f$, quel que soit $f \in \{f\}$.

Les relations $L(\lambda u) = \lambda L(u)$ $(\lambda > 0)$ et $L(u+v) \leqq L(u) + L(v)$ sont immédiates.

Faisant usage (ici pour la première fois) de la propriété **B** de $\mathfrak{P}$ qui se généralise d'ailleurs sans peine sous la forme:

"*lorsque* $\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{k=1}^n v_k$ $(u_i, v_k \in \mathfrak{P};\ m \geqq 2,\ n \geqq 2)$, *il existe des* $w_{ik} \in \mathfrak{P}$ *tels que* $u_i = \sum_{k=1}^n w_{ik}$, $v_k = \sum_{i=1}^m w_{ik}$",

on démontre que $L(u)$ est même additive:
$$L(u) + L(v) = L(u+v) \quad \text{pour} \quad u, v \geqq 0.$$

En posant $L(u-v) = L(u) - L(v)$, la fonctionnelle L s'étend à tout l'espace $\mathfrak{R}$, tout en restant homogène et additive. En choisissant la décomposition $h=u-v$ comme en (5), on aura

$$|L(h)|=|L(u)-L(v)|\leqq L(u)+L(v)\leqq (u,f)+(v,f)\leqq C\|f\|\,\|h\|,$$

quel que soit $f\in\{f\}$.

La fonctionnelle linéaire $L(h)$ est donc bornée; par conséquent il existe un élément $f_0\in\mathfrak{R}$ tel que $L(h)=(h,f_0)$. Par (6) et (7), $f_0\leqq^* f$ pour tout $f\in\{f\}$, et $f_0\geqq^* g$ pour tout autre g tel que $g\leqq^* f$ pour tout $f\in\{f\}$, ce qui exprime justement que f_0 est le plus grand minorant de $\{f\}$.

Désignons les opérations de prendre le plus grand minorant et le plus petit majorant par les signes $\wedge^*$, $\vee^*$. Tout système fini $\{f_k\}_1^n$ est majorable et minorable (en effet, et décomposant chaque f_k en g_k-h_k où $g_k, h_k\geqq^* 0$, on aura $-\sum_i h_i\leqq^* f_k\leqq^*\sum_i g_i$), donc on peut toujours former

$$\bigvee_k{}^* f_k=f_1\vee^* f_2\vee^*\ldots\vee^* f_n,\quad \bigwedge_k{}^* f_k=f_1\wedge^* f_2\wedge^*\ldots\wedge^* f_n.$$

L'espace $\mathfrak{R}$ devient donc, par la relation $\geqq^*$, un *„lattice" vectoriel σ-complet*[9]). On a en particulier

$$(f\vee^* g)+(f\wedge^* g)=f+g, \tag{8}$$

d'où il s'ensuit, comme l'avait observé F. RIESZ[10]), que la condition **B** est vérifiée aussi par $\mathfrak{P}^*$.

La symétrie entre $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^*$ devenant ainsi complète, tous les résultats obtenus pour l'ordre $\geqq^*$ s'établissent du même coup aussi pour l'ordre $\geqq$. Nous n'aurons d'ailleurs à faire désormais qu'avec l'ordre $\geqq$ et avec les notions $\vee$, $\wedge$ correspondantes.

Parmi les règles de calcul avec ces signes, citons les évidentes

$$(f+h)\vee(g+h)=(f\vee g)+h,\quad (f+h)\wedge(g+h)=(f\wedge g)+h \tag{8a}$$

et l'analogue de (8), puis les lois *commutative* et *associative*, enfin les lois *distributives* $(f\vee g)\wedge h=(f\wedge h)\vee(g\wedge h)$, $(f\wedge g)\vee h=(f\vee h)\wedge(g\vee h)$.[11]) Ces dernières lois se généralisent d'ailleurs par induction en

$$(\bigvee_\alpha f_\alpha)\wedge h=\bigvee_\alpha (f_\alpha\wedge h),\quad (\bigwedge_\alpha f_\alpha)\vee h=\bigwedge_\alpha (f_\alpha\vee h), \tag{9}$$

$\{f_\alpha\}$ étant un système fini d'éléments quelconques.

Les éléments $f, g\geqq 0$ sont dits *disjoints* lorsque $f\wedge g=0$, ou ce qui revient au même grâce à (8), lorsque $f\vee g=f+g$. On a, d'une façon plus générale,

$$\bigvee_\alpha f_\alpha=\sum_\alpha f_\alpha \text{ pour des } f_\alpha\geqq 0 \text{ disjoints deux-à-deux,} \tag{10}$$

ce qu'on vérifie sans peine par induction, faisant usage aussi de (9).

---

[9]) Dans le sens de G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 2ième édition (New York, 1948), Chap. XV.

[10]) *Loc. cit.* [2]), en particulier p. 176–178.

[11]) Cf. FREUDENTHAL, *loc. cit.* [1]), ou BIRKHOFF, *loc. cit.* [9]), p. 219.

Remarquons enfin que si les f_α sont disjoints et si c_α, c'_α sont des nombres $\geqq 0$, l'équation $\Sigma c_\alpha f_\alpha = \Sigma c'_\alpha f_\alpha$ entraîne que $c_\alpha f_\alpha = c'_\alpha f_\alpha$, donc $c_\alpha = c'_\alpha$ lorsque $f_\alpha \neq 0$. En effet, chaque terme étant majoré par la somme, on a, faisant usage aussi de (9) et (10),

$$c_\alpha f_\alpha = c_\alpha f_\alpha \wedge \sum_\beta c'_\beta f_\beta = c_\alpha f_\alpha \wedge (\bigvee_\beta c'_\beta f_\beta) = \bigvee_\beta (c_\alpha f_\alpha \wedge c'_\beta f_\beta) = c_\alpha f_\alpha \wedge c'_\alpha f_\alpha \leqq c'_\alpha f_\alpha$$

et, d'une manière analogue, $c'_\alpha f_\alpha \leqq c_\alpha f_\alpha$. Donc $c_\alpha f_\alpha = c'_\alpha f_\alpha$.

4. L'espace $\mathfrak{R}$ étant supposé séparable, il existe dans $\mathfrak{P}$ un ensemble dénombrable partout dense, soit $\{f_\alpha\}_1^\infty$. En choisissant les $c_\alpha > 0$ convenablement, on peut rendre la série $\Sigma c_\alpha f_\alpha$ convergente; sa somme e appartient à $\mathfrak{P}$, $e \neq 0$. Un élément $f \geqq 0$ est dit borné par rapport à e, lorsqu'on a $f \leqq \Lambda e$ pour Λ suffisamment grand; chacun des f_α est borné, $f_\alpha \leqq c_\alpha^{-1} e$. Les éléments bornés par rapport à e sont donc denses dans $\mathfrak{P}$.

Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des éléments h tels que $0 \leqq h \leqq e$ et $h \wedge (e-h) = 0$. On a $0 \in \mathfrak{B}$, $e \in \mathfrak{B}$; avec $h_1, h_2 \in \mathfrak{B}$ on a $h_1 \wedge h_2 \in \mathfrak{B}$, $h_1 \vee h_2 \in \mathfrak{B}$ et, lorsque $h_1 \geqq h_2$, on a aussi $h_1 - h_2 \in \mathfrak{B}$.[12]) $\mathfrak{B}$ est donc une algèbre de Boole.

f étant un élément borné, $0 \leqq f \leqq \Lambda e$, on montre[13]) qu'il existe une famille $\{e_\lambda\}$ $(0 \leqq \lambda \leqq \Lambda)$ d'éléments de $\mathfrak{B}$ telle que $e_0 = 0$, $e_\Lambda = e$, $e_\mu \geqq e_\lambda$ pour $\mu > \lambda$, et telle que $f = \int \lambda de_\lambda$ dans le sens que pour $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n+1} = \Lambda$ et pour $h_\alpha = e_{\lambda_{\alpha+1}} - e_{\lambda_\alpha}$, on a

$$\sum_1^n \lambda_\alpha h_\alpha \leqq f \leqq \sum_1^n \lambda_{\alpha+1} h_\alpha.\text{[13a])}$$

Lorsque $\lambda_{\alpha+1} - \lambda_\alpha \leqq \delta$, on aura donc

$$0 \leqq f - \sum_1^n \lambda_\alpha h_\alpha \leqq \sum_1^n (\lambda_{\alpha+1} - \lambda_\alpha) h_\alpha \leqq \delta \sum_1^n h_\alpha = \delta e.$$

En vertu de la condition A'_4 il en vient que

$$\|f - \Sigma \lambda_\alpha h_\alpha\| \leqq K\delta \|e\| < \varepsilon \qquad \text{pour } \delta \text{ assez petit.}$$

Les éléments de la forme $\Sigma \lambda_\alpha h_\alpha$ où les h_α sont des éléments de $\mathfrak{B}$, deux-à-deux disjoints et de somme égale à e, et où les coefficients λ_α sont non-négatifs, forment donc un ensemble $\mathfrak{L}$ partout dense parmi les éléments bornés par rapport à e, et alors partout dense aussi dans $\mathfrak{P}$.

---

[12]) Cf. FREUDENTHAL, *loc. cit.* [1])

[13]) Cf. FREUDENTHAL, *loc. cit.* [1]), ou BIRKHOFF, *lot. cit.* [9]). On peut se servir aussi de la méthode de F. RIESZ, *loc. cit.* [2]), Chap. VII, mais alors il faut d'abord observer que toute suite croissante bornée d'éléments de $\mathfrak{R}$ converge faiblement vers son plus petit majorant, ce qui est d'ailleurs une conséquence immédiate de notre construction du plus petit majorant. On peut montrer que la convergence est même forte.

[13a]) Les h_α sont disjoints. En effet, pour $\lambda < \mu \leqq \nu < \varrho$ on a $e_\mu - e_\lambda \leqq e_\mu$ et $e_\varrho - e_\nu \leqq e - e_\mu$, et par conséquent $(e_\mu - e_\lambda) \wedge (e_\varrho - e_\nu) \leqq e_\mu \wedge (e - e_\mu) = 0$.

Il est manifeste que $\mathfrak{L}$ contient avec l aussi λl $(\lambda \geqq 0)$; montrons que $\mathfrak{L}$ contient avec $l = \Sigma\lambda_\alpha h_\alpha$ et $l' = \Sigma\lambda'_\beta h'_\beta$ aussi $l + l'$. En effet, les éléments $h_{\alpha\beta} = h_\alpha \wedge h'_\beta \in \mathfrak{B}$ étant tous disjoints, on a par (9) et (10)

$$h_\alpha = h_\alpha \wedge e = h_\alpha \wedge (\vee_\beta h'_\beta) = \vee_\beta (h_\alpha \wedge h'_\beta) = \vee_\beta h_{\alpha\beta} = \sum_\beta h_{\alpha\beta}$$

et, d'une manière analogue, $h'_\beta = \sum_\alpha h_{\alpha\beta}$. Donc

$$(11) \qquad l = \sum_{\alpha\beta} \lambda_\alpha h_{\alpha\beta}, \quad l' = \sum_{\alpha\beta} \lambda'_\beta h_{\alpha\beta}, \quad l + l' = \sum_{\alpha\beta} (\lambda_\alpha + \lambda'_\beta) h_{\alpha\beta};$$

vu encore que $e = \vee_\alpha h_\alpha = \vee_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$, cela prouve que $l + l' \in \mathfrak{L}$.

Fixons un élément $g \in \mathfrak{B}$ et définissons une transformation de l'espace $\mathfrak{R}$ de la manière suivante.

Pour $l = \Sigma\lambda_\alpha h_\alpha \in \mathfrak{L}$ posons $P_g l = \Sigma\lambda_\alpha (g \wedge h_\alpha)$. Montrons que cette définition ne dépend pas de la représentation particulière de l, et que, sur $\mathfrak{L}$, la transformation est additive et positivement homogène. Envisageons à cet effet encore un élément $l' = \Sigma\lambda'_\beta h'_\beta \in \mathfrak{L}$. Faisant intervenir de nouveau les éléments $h_{\alpha\beta} = h_\alpha \wedge h'_\beta$, on aura par (9) et (10)

$$P_g l = \sum \lambda_\alpha (g \wedge h_\alpha) = \sum_\alpha \lambda_\alpha (g \wedge (\vee_\beta h_{\alpha\beta})) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \vee_\beta (g \wedge h_{\alpha\beta}) =$$
$$= \sum_\alpha \lambda_\alpha \sum_\beta (g \wedge h_{\alpha\beta}),$$

donc

$$(12) \qquad P_g l = \sum_{\alpha\beta} \lambda_\alpha (g \wedge h_{\alpha\beta}) \quad \text{et aussi} \quad P_g l' = \sum_{\alpha\beta} \lambda'_\beta (g \wedge h_{\alpha\beta}).$$

Si l'on a $l = l'$, il résulte des décompositions (11), en vertu d'une remarque faite à la fin du n° 3, que $\lambda_\alpha = \lambda'_\beta$ dès que $h_{\alpha\beta} \neq 0$, ce qui assure, grâce à (12), que $P_g l = P_g l'$. La définition de P_g est donc univoque. L'additivité est alors une conséquence immédiate de (11), et l'homogénéité pour des facteurs positifs est évidente.

Observons encore que $0 \leqq P_g l \leqq l$ pour tout $l \in \mathfrak{L}$, d'où il résulte, en vertu de la condition $\mathbf{A}'_4$, que

$$(13) \qquad \|P_g l\| \leqq K \|l\|.$$

Étendons la définition de P_g à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des différences $f = l - l'$ $(l, l' \in \mathfrak{L})$ en posant $P_g(l - l') = P_g l - P_g l'$. $\mathfrak{M}$ est évidemment une variété linéaire; $\mathfrak{L}$ étant dense dans $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$ sera dense dans $\mathfrak{R}$. L'additivité de P_g sur $\mathfrak{L}$ entraîne que P_g est univoque et additive aussi sur $\mathfrak{M}$; l'homogénéité est manifeste.

Faisant intervenir une fois de plus les décompositions (11), on aura $f = l - l' = \Sigma\mu_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$ où $\mu_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha - \lambda'_\beta$, donc

$$f = f^+ - f^- \text{ avec } f^+ = \Sigma\mu^+_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad f^- = \Sigma\mu^-_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}.$$ [14]

[14] Pour un nombre réel μ, on écrit $\mu^+ = \max(\mu, 0)$ et $\mu^- = -\min(\mu, 0)$.

Tous les éléments $k^+_{\alpha\beta}=\mu^+_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$, $k^-_{\alpha\beta}=\mu^-_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ étant disjoints, on a par (8a) et (10)

$$f\vee 0=(f^+-f^-)\vee 0=(f^+\vee f^-)-f^-=(\vee k^+_{\alpha\beta})\vee(\vee k^-_{\alpha\beta})-f^-=$$
$$=\Sigma(k^+_{\alpha\beta}+k^-_{\alpha\beta})-f^-,$$

donc $f\vee 0=(f^++f^-)-f^-=f^+$ et, pour une raison analogue, $f\wedge 0=-f^-$.

Il s'ensuit que pour toute autre décomposition $f=f'-f''$ où $f'\geqq 0$, $f''\geqq 0$, on a $f'\geqq f^+$ et $f''\geqq f^-$ et par conséquent $\|f^+\|\leqq K\|f'\|$, $\|f^-\|\leqq K\|f''\|$. Or il existe d'après (5) une décomposition $f=f'-f''$ pour laquelle $\|f'\|+\|f''\|\leqq C\|f\|$, d'où il résulte que

$$\|f^+\|+\|f^-\|\leqq CK\|f\|.$$

Les éléments f^+, f^- appartenant à $\mathfrak{L}$, on aura, vu aussi (13),

$$\|P_g f\|=\|P_g f^+-P_g f^-\|\leqq\|P_g f^+\|+\|P_g f^-\|\leqq K(\|f^+\|+\|f^-\|)\leqq CK^2\|f\|.$$

Puisque P_g est une transformation linéaire bornée sur la variété linéaire $\mathfrak{M}$ dense dans $\mathfrak{R}$, elle se prolonge par continuité sur l'espace entier $\mathfrak{R}$. Observons que $\|P_g\|$ reste inférieure à la quantité CK^2 qui *ne dépend pas* de l'élément $g\in\mathfrak{B}$.

Les transformations linéaires bornées P_g ainsi définies fournissent une *représentation* de l'algèbre de Boole $\mathfrak{B}$, ce qui veut dire que $P_0=0$, $P_e=I$, $P_{g_1\wedge g_2}=P_{g_1}P_{g_2}$, $P_{e-g}=I-P_g$.[15])

Il suffit d'établir ces relations pour les éléments $h\in\mathfrak{B}$ parce que leurs combinaisons linéaires sont denses dans $\mathfrak{R}$. Or on a $0\wedge h=0$, $e\wedge h=h$, $g_1\wedge(g_2\wedge h)=(g_1\wedge g_2)\wedge h$, enfin

$$(g\wedge h)+((e-g)\wedge h)=(g\wedge h)\vee((e-g)\wedge h)=(g\vee(e-g))\wedge h=e\wedge h=h,$$

ce qui prouve nos assertions.

Or J. DIXMIER vient de montrer que *toute représentation d'une algèbre de Boole par des transformations linéaires uniformément bornées d'un espace de Hilbert, est semblable à une représentation par des projections (orthogonales)*[16]). Cela veut dire qu'il existe une transformation linéaire bicontinue T de $\mathfrak{R}$ sur lui-même telle que les transformations $Q_g=TP_gT^{-1}$ sont des projections. Ce résultat est un corollaire du théorème de cet auteur affirmant que, pour une certaine classe de groupes embrassant tous les groupes abéliens, toute représentation bornée par des transformations linéaires dans l'espace de Hilbert, est semblable à une représentation par des transformations unitaires. La démonstration utilise des moyennes généralisées et est modelée

---

[15]) Puisque $g_1\vee g_2=e+(g_1-e)\vee(g_2-e)=e-(e-g_1)\wedge(e-g_2)$, on a
$$P_{g_1\wedge g_2}=I-(I-P_{g_1})(I-P_{g_2})=P_{g_1}+P_{g_2}-P_{g_1}P_{g_2}.$$

[16]) J. DIXMIER, Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications, *ces Acta*, **12 A** (1950), p. 213–227, en particulier pp. 222—223.

sur la démonstration donnée par l'auteur pour les groupes additifs des nombres entiers et des nombres réels.[17])

5. Les transformations P_h sont permutables ($P_h P_g = P_{h\wedge g} = P_{g\wedge h} = P_g P_h$), et il en est alors de même pour les projections Q_h. Par conséquent, il existe une résolution spectrale simultanée des Q_h, soit

$$Q_h = \int_0^1 h(x)\, dE_x,$$

où $\{E_x\}$ est une famille spectrale de projections et la fonction $h(x)$, correspondant à Q_h, est la fonction caractéristique d'un certain sous-ensemble de $[0, 1]$ qu'on peut d'ailleurs choisir un ensemble borélien.[18])

Soit $r(x)$ une fonction bornée borélienne quelconque; $R = \int_0^1 r(x)\, dE_x$ est alors une transformation linéaire bornée de $\mathfrak{R}$. Les combinaisons linéaires $\varphi = \mu_\alpha h_\alpha$ ($h \in \mathfrak{B}$) étant partout denses dans $\mathfrak{R}$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un tel φ qui approche l'élément $T^{-1}RTe$ à $\varepsilon/\|T\|$ près. On aura alors $\|RTe - T\varphi\| \leqq \varepsilon$. Comme on a $Q_h Te = TP_h e = Th$, il en résulte que

$$\int_0^1 (r(x) - \Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x))^2 d\|E_x Te\|^2 = \|(R - \Sigma \mu_\alpha Q_{h_\alpha})\, Te\|^2 = \|RTe - T\varphi\|^2 < \varepsilon^2.$$

Les combinaisons linéaires $\Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x)$ sont donc denses dans l'espace L^2 des fonctions à carré sommable par rapport à la fonction croissante $\varrho(x) = \|E_x Te\|^2$. On peut même supposer que les fonctions $h_\alpha(x)$ figurant dans la même combinaison linéaire soient telles que $h_\alpha(x)\, h_\beta(x) = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, presque partout par rapport à $\varrho(x)$. Cela résulte du fait que les éléments h_α figurant dans $\Sigma \mu_\alpha h_\alpha$ peuvent être choisis disjoints (voir n° 4) et que $h \wedge h' = 0$ entraîne $P_h P_{h'} = P_{h\wedge h'} = P_0 = 0$ et aussi $Q_h Q_{h'} = \int_0^1 h(x)\, h'(x)\, dE_x = 0$.

Pour $\varphi = \Sigma \mu_\alpha h_\alpha$ et $\varphi(x) = \Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x)$ on a, puisque $Th = Q_h Te$,

$$\|T\varphi\|^2 = \|\Sigma \mu_\alpha Q_{h_\alpha} Te\|^2 = \int_0^1 [\varphi(x)]^2\, d\varrho(x).$$

Cela exprime que la correspondance entre $T\varphi \in \mathfrak{R}$ et $\varphi(x) \in L^2$ est isométrique. Ces éléments étant denses respectivement dans $T\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ et dans L^2, la correspondance se prolonge par continuité aux espaces entiers: $Tf \longleftrightarrow f(x)$, linéarité et isométrie restant conservées T étant une affinité de $\mathfrak{R}$ sur lui-même, la correspondance $f \longleftrightarrow f(x)$ qui s'en dérive, est une affinité de $\mathfrak{R}$ sur L^2.

---

[17]) B. Sz.-Nagy, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *ces Acta*, **11** (1947), p. 152—157. Là, il est montre aussi que si l'espace $\mathfrak{R}$ est supposé séparable, on peut éviter de faire usage de l'axiome de Zermelo.

[18]) Cf. par ex. B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942), Chap. X.

Montrons que, dans cette affinité, les éléments $f \in \mathfrak{P}$ et les fonctions $f(x) \geqq 0$ se correspondent.

En effet, tout $f \in \mathfrak{P}$ est limite de sommes $\Sigma \lambda_\alpha h_\alpha$ avec $\lambda_\alpha \geqq 0$; la fonction correspondante $f(x)$ est alors la limite, dans L^2, des sommes $\Sigma \lambda_\alpha h_\alpha(x) \geqq 0$ et par conséquent aussi $f(x) \geqq 0$.

Soit, inversement, $f(x) \geqq 0$ dans L^2; on sait qu'elle est la limite de sommes $\Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x)$ où les $h_\alpha(x)$ sont des fonctions caractéristiques de certains sous-ensembles de $[0, 1]$ et $h_\alpha(x) h_\beta(x) = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, p. p. par rapport à $\varrho(x)$. On a alors $|f(x) - \Sigma \mu_\alpha h_\alpha(x)| \geqq |f(x) - \Sigma \mu_\alpha^+ h_\alpha(x)|$ p. p.; par conséquent, $f(x)$ est la limite aussi des sommes $\Sigma \mu_\alpha^+ h_\alpha(x)$. L'élément correspondant $f \in \mathfrak{R}$ est alors la limite des sommes $\Sigma \mu_\alpha^+ h_\alpha$ appartenant à $\mathfrak{P}$, donc aussi $f \in \mathfrak{P}$.

Cela achève la démonstration de notre théorème.

6. L'existence d'un espace L^2 du type exigé étant ainsi établie, cherchons dans quelle mesure la fonction $\varrho(x)$ qui sert à le construire, est déterminée.

Appelons génératrice extrémale de $\mathfrak{P}$ toute demi-droite (issue de 0) portée par un élément $u \in \mathfrak{P}$, $u \neq 0$, qui n'admet d'autres décompositions $u = u_1 + u_2$ $(u_1, u_2 \in \mathfrak{P})$ que celles évidentes $u = ku + (1-k)u$ avec $0 \leqq k \leqq 1$. Il est évident que la fonction $u(x) \in L^2$ qui correspond à un tel élément doit être équivalente à une fonction s'annulant partout sauf en un seul point de mesure positive. À toute génératrice extrémale de $\mathfrak{P}$ correspond ainsi un point de discontinuité de la fonction monotone $\varrho(x)$. On arrive ainsi au résultat suivant:

La fonction $\varrho(x)$ doit avoir autant de sauts que $\mathfrak{P}$ a de génératrices extrémales; $\varrho(x)$ est une fonction pure des sauts (c'est-à-dire à partie continue constante) si et seulement si $\mathfrak{P}$ est engendré par ses génératrices extrémales.

Faisons correspondre à une fonction monotone le symbole (i, j) où $i = 0$ ou $i = 1$ selon que la partie continue est constante ou non, et où j désigne le nombre des sauts; $j = 0, 1, \ldots$ ou dénombrablement infini. Le type (i, j) de la fonction $\varrho(x)$ est déterminé, comme nous venons de l'observer, par des invariants affines de $\mathfrak{P}$. Or ce système d'invariants est aussi *complet*.

Cela résulte du fait que les espaces L^2 construits à l'aide de fonctions $\varrho(x)$, $\varrho'(x')$ du même type (i, j) peuvent être appliqués l'un sur l'autre d'une façon linéaire, isométrique et conservant l'ordre. S'il s'agit du type $(0, j)$, soient ξ_n, ξ_n' les points de discontinuité et u_n, u_n' les sauts correspondants de ϱ, ϱ'. L'application des deux espaces $f(x) \leftrightarrow f'(x')$, définie par

$$f(\xi_n)\sqrt{u_n} = f'(\xi_n')\sqrt{u_n'} \qquad (n = 0, 1, \ldots, j),$$

répond évidemment à nos exigences. Dans le cas du type opposé $(1, 0)$, envisageons l'inverse de $\varrho(x)$, soit $x(\varrho)$, définie dans l'intervalle fini ou infini (ϱ_1, ϱ_2). Soit $\varrho = \sigma(t)$ une fonction absolument continue, strictement croissante et appliquant l'intervalle $0 < t < 1$ sur l'intervalle $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$. En posant

$X(t)=x(\sigma(t))$, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\varrho(x)=\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\varphi(x(\varrho))\,d\varrho=\int_0^1\varphi(X(t))\frac{d\sigma(t)}{dt}dt$$

pour toute fonction $\varphi(x)$ intégrable par rapport à $\varrho(x)$, ou, ce qui revient au même, pour laquelle $\varphi(X(t))\sqrt{d\sigma/dt}$ est intégrable au sens usuel.

Faisant correspondre des fonctions analogues à $\varrho'(x')$, on voit que l'application $f(x)\leftrightarrow f'(x')$, définie par

$$f(X(t))\sqrt{d\sigma(t)/dt}=f'(X'(t))\sqrt{d\sigma'(t)/dt},$$

répond à nos exigences. Enfin, dans le cas mixte $(1,j)$ $(j>0)$, on procède en superposant les deux méthodes.

7. Appelons un espace linéaire topologique un "lattice" vectoriel *normal*, lorsqu'il est un "lattice" vectoriel[19]) et que de plus (i) $f_n\geqq 0$ et $f_n\to f$ entraînent $f\geqq 0$, (ii) $f_n\geqq g_n\geqq 0$, $f_n\to 0$ entraînent $g_n\to 0$.

Notre théorème admet le corollaire suivant:

Tout espace L^2 est, par l'ordre naturel des fonctions, un "lattice" vectoriel normal. Tout espace de Hilbert qui est en même temps un "lattice" vectoriel normal, est l'image affine et conservant l'ordre d'un espace L^2.

Remarque. Nous nous sommes bornés à l'étude des espaces de Hilbert séparables. Or le théorème et son corollaire pourraient être étendus aussi à des espaces non séparables et cela par une décomposition convenable de l'espace envisagé en espaces séparables, proposée à propos de certains problèmes voisins par WECKEN et KAKUTANI[20]).

(Reçu le 5 octobre 1949)

---

19) Cf. BIRKHOFF, *loc. cit.* 9).

20) F. WECKEN, Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren, *Math. Annalen*, **116** (1938), p. 422–455; S. KAKUTANI, Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, *Annals of Math.*, 42 (1941), p. 525–537.