Zum Begriff der rekursiven reellen Zahl.

Von RÓZSA PÉTER in Budapest.

§ 1. Unter rekursiven Funktionen werde ich primitiv-rekursive zahlentheoretische Funktionen verstehen, d. h. solche, die für nicht-negative ganze Argumente definiert sind, und aus 0 und $n+1$ ausgehend durch endlich viele Substitutionen und Rekursionen der Form

$$\varphi(0, a_1, \ldots, a_r) = \alpha(a_1, \ldots, a_r),$$
$$\varphi(n+1, a_1, \ldots, a_r) = \beta(n, a_1, \ldots, a_r, \varphi(n, a_1, \ldots, a_r))$$

entstehen, wobei α und β bereits definierte Funktionen sind. Eine Beziehung zwischen den Variablen $a_1, \ldots, a_r$ heißt rekursiv, wenn es eine rekursive Funktion $\beta(a_1, \ldots, a_r)$ gibt, welche für ein beliebiges r-Tupel $a_1, \ldots, a_r$ dann und nur dann verschwindet, wenn unter $a_1, \ldots, a_r$ die betreffende Beziehung besteht.

Man kann beweisen, daß die Funktionen und Beziehungen, die in der elementaren Zahlentheorie eine Rolle spielen, rekursiv sind[1]).

In den Folgenden werde ich die bekannte Tatsache benutzen, daß die Beziehungen

$$a = b, \; a \geqq b$$

und die Funktionen

$$a+n, \; n \cdot a, \; \max(a_1, \ldots, a_r), \; \sigma(n), \; n \dot{-} 1, \; \left[\frac{a}{n}\right]$$

rekursiv sind; hierbei ist $\sigma(n)$ die Teilersumme von n,

$$n \dot{-} 1 = \begin{cases} n-1, & \text{falls } n > 0 \\ 0 & \text{falls } n = 0, \end{cases}$$

und

$$\left[\frac{a}{n}\right] = \begin{cases} \text{die in } \dfrac{a}{n} \text{ enthaltene größte ganze Zahl, falls } n \neq 0, \\ 0, \text{ falls } n = 0; \end{cases}$$

---

[1]) Siehe TH. SKOLEM, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise, *Videnskapsselskapets Skrifter, I. Mat.-Naturw. Klasse,* **6** (1923), S. 3–38; K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatshefte für Math. und Phys.,* **38** (1931), S. 173—198.

ferner, daß die Rekursivität der Funktionen $\alpha_1(n)$, $\alpha_2(n)$ und der Beziehung $\mathrm{B}(n)$ die Rekursivität der durch

$$\varphi(n) = \begin{cases} \alpha_1(n), & \text{falls } \mathrm{B}(n) \text{ besteht,} \\ \alpha_2(n) & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierten Funktion $\varphi(n)$ nach sich zieht.

Der Einfachheit halber werde ich mich in den folgenden Erweiterungen des Rekursivitätsbegriffes auf nicht-negative Zahlen beschränken; das ist aber unwesentlich.

§ 2. Die Werte einer rekursiven Funktion lassen sich an einer jeden Stelle in endlich vielen Schritten berechnen. So ist es naheliegend, die „vagen" Begriffe der „Konstruktivität", „Effektivität", in den verschiedenen Gebieten der Mathematik, mit Hilfe der rekursiven Funktionen zu präzisieren.

SPECKER[2]) nennt eine Folge

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

von positiven rationalen Zahlen rekursiv, wenn

$$a_n = \frac{\alpha(n)}{\beta(n)},$$

wobei α und β rekursiv sind, und $\beta(n) \geqq 1$ ist.

Man sagt, eine solche Folge konvergiere rekursiv, falls es eine rekursive Funktion $\nu(m)$ gibt, so daß für $n, n^* \geqq \nu(m)$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{m}$$

gilt. Eine positive reelle Zahl r heißt nach SPECKER rekursiv, falls eine rekursive Folge rationaler Zahlen rekursiv gegen r konvergiert.

Diese Begriffsbildung ist aber nicht befriedigend, da sie nicht gewisse naheliegende Konstruktivitätsforderungen erfüllt. Nennen wir in der Tat mit SPECKER die reelle Zahl r in einen rekursiven Dezimalbruch entwickelbar, falls

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots,$$

wobei $0 \leqq a_n \leqq 9$ für alle $n \geqq 1$, und a_n eine rekursive Funktion von n ist; und sagen wir, r definiere einen rekursiven Schnitt, falls

$$\frac{m}{n+1} > r$$

eine rekursive Beziehung zwischen m und n ist, so zeigt SPECKER, daß sich nicht jede rekursive reelle Zahl in einen rekursiven Dezimalbruch entwickeln läßt, und daß nicht jede Zahl, die sich in einen rekursiven Dezimalbruch entwickeln läßt, einen rekursiven Schnitt definiert.

---

[2]) E. SPECKER, Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, *Journal of Symbolic Logic*, **14** (1949), S. 145–158.

Definiert dagegen r einen rekursiven Schnitt, so sieht man sowohl für rationales als auch für irrationales r leicht ein, daß sich r nicht nur in einen rekursiven Dezimalbruch entwickeln läßt, sondern auch folgendes gilt: Ist b_n eine beliebige rekursive Funktion von n, für die $b_1 \geqq 1$, $b_n \geqq 2$ $(n > 1)$, so läßt sich r in eine Reihe

$$r = a_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} + \ldots$$

mit

$$0 \leqq a_n \leqq b_n - 1 \qquad (n \geqq 1)$$

rekursiv, d. h. derart entwickeln, daß a_n eine rekursive Funktion von n ist.

§ 3. Da

$$\frac{m}{n+1} > r, \text{ das heißt } m > (n+1)r,$$

damit gleichbedeutend ist, daß m wenigstens um 1 größer ist, als die in $(n+1)r$ enthaltene größte ganze Zahl:

$$m \geqq [(n+1)r] + 1,$$

so folgt aus der Rekursivität von $[nr]$, daß r einen rekursiven Schnitt definiert.

Für positives rationales r ist $[nr]$ rekursiv; daher definiert ein positives rationales r immer einen rekursiven Schnitt.

Für irrationales r ist $[nr]$ dann und nur dann rekursiv, wenn in der Fakultätenentwicklung

$$r = a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{n!} + \ldots \quad \text{mit} \quad a_n \leqq n-1 \text{ für } n \geqq 1,$$

a_n eine rekursive Funktion von n ist[3]). Die Fakultätenentwicklung ist aber ein Spezialfall der Entwicklungen von r, die nach dem vorigen Punkt zu einem rekursiven a_n führen falls r einen rekursiven Schnitt definiert.

Demnach *definiert r dann und nur dann einen rekursiven Schnitt, wenn $[nr]$ rekursiv ist.*

§ 4. Man hat die rationalen und die irrationalen r gesondert zu betrachten, da es für den Beweis wesentlich ist, daß man in der Fakultätenentwicklung

$$r = a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{n!} + \ldots \quad \text{mit} \quad a_n \leqq n-1 \text{ für } n \geqq 1$$

entweder ein ν bestimmen kann, so daß für jedes $n \geqq \nu$ $a_n = n-1$ gilt (d. h.

---

[3]) R. Péter, Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, *Math. Annalen*, **110** (1934), S. 612–632; insbesondere Fußnote [9]). Da wurde noch nicht hervorgehoben, daß man die Fälle, wo r rational oder irrational ist, getrennt behandeln muß.

r rational ist), oder für jedes ν ein $n \geqq \nu$ bestimmen kann, für welches

$$a_n < n - 1$$

(was für ein irrationales r zutrifft). Läßt sich dagegen für die Koeffizienten der Fakultätenentwicklung einer Zahl r nicht entscheiden, ob über alle Grenzen ein n mit

$$a_n < n - 1$$

vorkommt, so kann man von der Rekursivität von a_n noch nicht auf eine „effektive" Rekursivität von $[n\, r]$ schließen. Denn z. B., da die Gleichung

$$\sigma(m) = 2m$$

(wobei $\sigma(m)$ wie gesagt die Teilersumme von m bedeutet), die vollkommenen Zahlen charakterisiert, so läßt sich nach unserem heutigen Wissen für

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{ falls } \sigma(2n+1) = 2(2n+1), \\ n \dot{-} 1 \text{ sonst}, \end{cases}$$

nicht entscheiden, ob es überhaupt ein n gibt, für welches $a_n < n - 1$; trotzdem für alle n $a_n \leqq n - 1$ gilt, und a_n eine rekursive Funktion von n ist. Wird mit den Werten von a_n als Koeffizienten die Reihe

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{n!} + \ldots$$

gebildet, so konvergiert diese Reihe gegen eine Zahl r. Aber trotz der Rekursivität von a_n ist

$$[n\, r]$$

keinem bekannten rekursiven Funktion gleich, denn mit unserem heutigen Wissen können wir nicht einmal an der Stelle $n = 1$ den Wert von $[n\, r]$ bestimmen. Gibt es nämlich keine ungerade vollkommene Zahl, so ist

$$r = 0 + \frac{1-1}{1!} + \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \ldots = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = 1,$$

also

$$[1 \cdot r] = 1;$$

gibt es aber auch ungerade vollkommene Zahlen, so tritt hier an Stelle wenigstens eines — positiven — Gliedes 0, also ist

$$r < 1 \text{ und so } [1 \cdot r] = 0.$$

(Man kann freilich sagen, daß, falls es keine ungerade vollkommene Zahl gibt, $[n\, r] = n$, im entgegengesetzten Falle aber $[n\, r]$ gleich einer anderen, zur Zeit unbekannten rekursiven Funktion ist; dies ist aber offenbar nicht das, was man angemessenerweise von einer rekursiven Funktion verlangt.)

Es lassen sich freilich auch mit Hilfe anderer bisher unentschiedenen zahlentheoretischen Probleme ähnliche Beispiele konstruieren, und vermutlich werden zu jeder Zeit solche unentschiedene Probleme vorhanden sein.

§ 5. Daß hier die Entscheidbarkeit der Rationalität oder Irrationalität von r eine wichtige Rolle spielt, stellt sich auch aus den Folgenden heraus.

Es sei r eine rekursive positive reelle Zahl, d. h., es gebe eine Folge a_n rekursiver positiver rationaler Zahlen, die gegen r konvergieren, und zwar rekursiv, so daß es eine rekursive Funktion $\nu_1(m)$ gibt, für welche bei $n, n^* \geqq \nu_1(m)$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{m}$$

gilt.

r ist dann und nur dann irrational, wenn es zu einem beliebigen Bruch $\frac{p}{q}$ ein $k > 0$ und ein N gibt, so daß sich a_n für alle $n \geqq N$ um mehr als $\frac{1}{k}$ von $\frac{p}{q}$ unterscheidet.

Ich behaupte: *Wenn es in einem solchen konstruktiven Sinn besteht, daß es rekursive Funktionen $\varkappa(p, q) > 0$ und $\nu_2(p, q)$ gibt, so daß für alle positive ganze p und q, und für $n \geqq \nu_2(p, q)$*

$$\left| a_n - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{\varkappa(p, q)}$$

gilt, dann ist diese „rekursive Irrationalität" von r schon hinreichend dafür, daß r einen rekursiven Schnitt definiert.

Ich werde nämlich — unter Benutzung eines für andere Zwecke eingeführten Beweisgedankens von GOODSTEIN[4]) — zeigen, daß es unter diesen Bedingungen eine rekursive Funktion $\nu(m)$ gibt, so daß für $n \geqq \nu(m)$

$$[m\, a_n] = [m\, a_{\nu(m)}]$$

ist, woraus dann die Behauptung leicht folgt.

§ 6. Nehmen wir also an, daß die Bedingungen der vorigen Nummer erfüllt sind; und es sei

$$[m\, a_{\nu_1(2m)}] = \gamma_m .$$

γ_m ist freilich eine rekursive Funktion von m. Unterscheiden wir die beiden Fälle:

(1) $$0 \leqq m a_{\nu_1(2m)} - \gamma_m \leqq \frac{1}{2}$$

und

(2) $$m a_{\nu_1(2m)} - \gamma_m > \frac{1}{2}, \text{ das heißt } 0 < \gamma_m + 1 - m a_{\nu_1(2m)} < \frac{1}{2}.$$

Betrachten wir den Fall (1) Wird $\nu_1(2m)$ für n^* gewählt, so ist nach der Annahme für $n \geqq \nu_1(2m)$

---

4) R. L. GOODSTEIN, The strong convergence of the exponential function, *Journal London Math. Soc.*, **22** (1947), S. 200—205.

$$|a_n - a_{\nu_1(2m)}| < \frac{1}{2m}, \quad \text{also} \quad |ma_n - ma_{\nu_1(2m)}| < \frac{1}{2},$$

und dies ergibt mit (1)

$$|ma_n - \gamma_m| < 1.$$

Andererseits ist nach Annahme für $n \geqq \nu_2(\gamma_m, m)$

$$\left| a_n - \frac{\gamma_m}{m} \right| > \frac{1}{\varkappa(\gamma_m, m)}, \quad \text{also} \quad |ma_n - \gamma_m| > \frac{m}{\varkappa(\gamma_m, m)};$$

dies kann aber nach den Vorigen nur der Fall sein, falls

$$k_m = \frac{m}{\varkappa(\gamma_m, m)} < 1$$

ist.

Ist demnach

$$n \geqq \max(\nu_1(2m), \nu_2(\gamma_m, m)),$$

so gilt

$$k_m < |ma_n - \gamma_m| < 1,$$

und daher fällt für solche n ein jedes ma_n in eine der offenen Intervallen

$$(\gamma_m + k_m, \gamma_m + 1), \ (\gamma_m - 1, \gamma_m - k_m).$$

Der Abstand des Anfangspunktes $\gamma_m + k_m$ des ersten Intervalls vom Endpunkt $\gamma_m - k_m$ des (links davon liegenden) zweiten Intervalls beträgt $2k_m$. Für genügend großes n unterscheiden sich aber die Glieder der Folge ma_n weniger als $2k_m$ voneinander; nach der Annahme ist ja für $n, n^* \geqq \nu_1(\varkappa(\gamma_m, m))$

$$|a_n - a_{n^*}| < \frac{1}{\varkappa(\gamma_m, m)}, \quad \text{also} \quad |ma_n - ma_{n^*}| < \frac{m}{\varkappa(\gamma_m, m)} = k_m.$$

Für hinreichend große Indizes können also die Glieder der Folge ma_n nur in *einem* der genannten beiden offenen Intervallen enthalten sein: ist nämlich

$$\nu_0(m) = \max(\nu_1(2m), \nu_2(\gamma_m, m), \nu_1(\varkappa(\gamma_m, m))),$$

so gilt entweder für alle $n \geqq \nu_0(m)$

$$\gamma_m + k_m < ma_n < \gamma_m + 1,$$

woraus

$$\gamma_m < ma_n < \gamma_m + 1, \quad \text{also} \quad [ma_n] = \gamma_m$$

folgt; oder aber gilt für alle $n \geqq \nu_0(m)$

$$\gamma_m - 1 < ma_n < \gamma_m - k_m$$

und demnach

$$\gamma_m - 1 < ma_n < \gamma_m, \quad \text{also} \quad [ma_n] = \gamma_m - 1.$$

Für $n \geqq \nu_0(m)$ ist daher der Wert von $[ma_n]$ jedenfalls unabhängig von n, und daher stets gleich dem zum Index $n = \nu_0(m)$ gehörigen Wert:

$$\text{für } n \geqq \nu_0(m) \text{ gilt } [ma_n] = [ma_{\nu_0(m)}].$$

Dieser Gedankengang läßt sich auch im Fall (2) genau wiederholen, wenn nur überall $\gamma_m + 1$ statt γ_m gesetzt wird; und so ergibt sich, daß es auch in diesem Fall eine rekursive Funktion $\nu_0'(m)$ gibt, so daß

$$\text{für } n \geqq \nu_0'(m) \quad [m a_n] = [m a_{\nu_0'(m)}] \quad \text{gilt.}$$

Wird also

$$\nu(m) = \max(\nu_0(m), \nu_0'(m))$$

gesetzt, so ist der Wert von $[m a_n]$ in beiden Fällen unabhängig von n und so tatsächlich

$$\text{für } n \geqq \nu(m) \quad [m a_n] = [m a_{\nu(m)}].$$

§ **7.** Daraus folgt aber, daß auch

$$[m r] = [m a_{\nu(m)}]$$

ist. Nach dem Ergebnis der vorigen Nummer ist ja für $n \geqq \nu(m)$

$$m a_n = [m a_n] + r_{m n} = [m a_{\nu(m)}] + r_{m n},$$

wo

$$0 \leqq r_{m n} < 1,$$

und so fällt der Grenzwert $m r$ der Folge $m a_n$ zwischen den folgenden Schranken:

$$[m a_{\nu(m)}] \leqq m r \leqq [m a_{\nu(m)}] + 1.$$

Hier kann wegen der Irrationalität von r keine Gleichheit bestehen; also ist tatsächlich

$$[m r] = [m a_{\nu(m)}].$$

Nun ist aber $[m a_{\nu(m)}]$ rekursiv, und so hat es sich erwiesen, daß auch $[m r]$ rekursiv ist.

Nach § 3 folgt daraus aber, daß r einen rekursiven Schnitt definiert, und so (nach § 2), daß die üblichen Reihenentwicklungen von r rekursiv sind. Dies gilt also für alle rekursive reelle Zahlen, die „rekursiv irrational" sind.

(Eingegangen am 3. Dezember 1949.)