Deux exemples singuliers d'équations différentielles.

Par J. DIEUDONNÉ à Nancy.

Il est assez généralement connu que la plupart des théorèmes d'existence classiques de CAUCHY pour une équation différentielle

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1}$$

où t est une variable réelle, $\mathbf{x}$ un vecteur dans un espace vectoriel E sur le corps $\mathbf{R}$, $\mathbf{f}$ une fonction continue dans un voisinage d'un point de $\mathbf{R}\times E$, à valeurs dans E, sont valables non seulement lorsque E est un espace de dimension *finie*, mais même lorsque E est un *espace de Banach* quelconque. Il y a toutefois deux propriétés classiques des équations (1) qui cessent d'être valables lorsque E n'est plus supposé de dimension finie, comme nous allons le montrer par des exemples.

1. La première de ces propriétés est le *théorème de Peano*, qui, lorsque $\mathbf{f}$ est *continue* au voisinage d'un point $(t_0, \mathbf{x}_0)$, affirme l'existence d'*au moins une intégrale* de (1) dans un voisinage de t_0, prenant la valeur $\mathbf{x}_0$ en ce point[1]).

Prenons pour E l'espace (c_0) de Banach, c'est-à-dire l'espace des suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqq 0}$ de nombres réels, telles que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, muni de la norme $\|\mathbf{x}\| = \sup\limits_n |x_n|$, qui en fait un espace de Banach. Pour tout $\mathbf{x} = (x_n)$ dans E, désignons par $\mathbf{y}$ la suite (y_n) définie par

$$y_n = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}.$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, donc $\mathbf{y} \in E$; si on pose $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, il résulte d'autre part de la continuité uniforme de la fonction $\sqrt{|x|}$ dans $\mathbf{R}$ que l'application $\mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x})$ est une application *continue* de l'espace E dans lui-même. Cependant, nous allons montrer que l'équation différentielle

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

n'admet *aucune* intégrale *à valeurs dans E*, égale à 0 au point $t = 0$. En effet, si $\mathbf{u}(t)$ était une telle intégrale, on pourrait écrire $\mathbf{u}(t) = [u_n(t)]$, où u_n est une

1) Cf. E. KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen* (Leipzig, 1930), p. 59.

fonction dérivable dans un voisinage de 0, satisfaisant à l'équation différentielle

$$u_n'(t) = \sqrt{|u_n(t)|} + \frac{1}{n+1} \tag{3}$$

et telle que $u_n(0) = 0$. Or, il est immédiat que chacune des équations (3) n'a qu'une seule intégrale satisfaisant à cette condition, comme on s'en assure par intégration effective; on vérifie ainsi que cette intégrale u_n est impaire et définie pour tout $t \in \mathbf{R}$, et que pour $t \geqq 0$, on a $u_n(t) \geqq \frac{t^2}{4}$. [2]) Cette dernière inégalité, valable pour tout n, montre aussitôt l'absurdité de notre hypothèse, car si $\mathbf{u}(t) \in E$ pour $t > 0$, il faut que la suite $[u_n(t)]$ tende vers 0 avec $1/n$ pour tout $t > 0$, ce qui n'est pas possible, comme nous venons de le voir.

2. Considérons maintenant une équation du type (1), où nous supposerons $\mathbf{f}$ définie et continue dans $I \times E$, où I est un intervalle d'extrémité finie t_0; nous supposerons en outre que dans $I \times E$, $\mathbf{f}$ est *localement lipschitzienne*, c'est-à-dire que pour tout point $(t, \mathbf{x})$ de $I \times E$, il existe un voisinage V de t, un voisinage W de $\mathbf{x}$ et un nombre $k > 0$ tels que $\|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_2)\| \leqq k \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ pour tout $s \in V$ et tout couple de points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ de W. Dans ces conditions, on démontre sans peine que pour tout $\mathbf{x}_0 \in E$, il existe un *plus grand* intervalle $J \subset I$, d'extrémité t_0, dans lequel existe une intégrale $\mathbf{u}$ de l'équation (1), à valeurs dans E et égale à $\mathbf{x}_0$ au point t_0, et cette intégrale est unique[3]). En outre, si $J \neq I$ et si la dimension de E est *finie*, on peut montrer que $\|\mathbf{u}(t)\|$ a une limite à droite égale à $+\infty$ à l'origine α de J. C'est cette dernière propriété qui, ainsi que nous allons le voir, ne subsiste plus lorsque E est de dimension *infinie*.

Nous prendrons pour E le même espace de Banach que dans le n°1. Désignons dans E par $\mathbf{e}_n$ la suite dont tous les termes sont égaux à 0 sauf le terme d'indice n, égal à 1; on peut alors écrire tout élément $\mathbf{x} = (x_n)$ de E sous la forme $\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbf{e}_n$. Posons, pour tout $\mathbf{x} = (x_n) \in E$

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) = [2(x_n + x_{n+1}) - 1]^+ (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n).$$

Il est clair que $\mathbf{f}_n$ est continue et lipschitzienne dans E, que $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) = 0$ pour $\|\mathbf{x}\| \leqq \frac{1}{4}$ et $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n$ pour $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{e}_n + (1-\lambda)\mathbf{e}_{n+1}$ (λ scalaire quelconque). D'autre part, pour tout entier $n > 0$, soit φ_n une fonction numérique $\geqq 0$, définie et continue dans l'intervalle $\frac{1}{n+1} \leqq t \leqq \frac{1}{n}$, égale à 0 aux extrémités de cet intervalle, et telle que $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,dt = 1$. Soit I l'intervalle ouvert $t \leqq 1$ dans $\mathbf{R}$; définissons dans $I \times E$ la fonction suivante $\mathbf{f}$, à valeurs dans E:

pour $t \leqq 0$, $\mathbf{x}$ quelconque dans E, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0$;

---

[2]) Cela résulte aussi de théorèmes généraux sur les équations différentielles (cf. Kamke, *loc. cit.*, p. 81—85).

[3]) Pour le cas où E est de dimension finie, voir Kamke, *loc. cit.*, p. 135–136.

$$\text{pour } \frac{1}{n+1} \leqq t \leqq \frac{1}{n} \text{ et } \mathbf{x} \in E, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \varphi_n(t)\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) \qquad (n \geqq 1).$$

Il est immédiat que $\mathbf{f}$ est continue et localement lipschitzienne en tout point $(t_0, \mathbf{x}_0)$ de $I \times E$ tel que $t_0 \neq 0$; montrons qu'il en est encore de même en un point de la forme $(0, \mathbf{a})$, où $\mathbf{a} = (a_n)$ est quelconque dans E. En effet, il existe par hypothèse un entier m tel que, pour $n \geqq m$, on ait $|a_n| \leqq \frac{1}{8}$; pour tout $\mathbf{x} = (x_n)$ tel que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqq \frac{1}{8}$, on a donc $|x_n| \leqq \frac{1}{4}$ pour $n \geqq m$, et par suite $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $n \geqq m$; on a donc $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0$ pour $0 \leqq t \leqq 1/m$ et $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqq \frac{1}{8}$, ce qui établit notre assertion.

Définissons maintenant une suite de fonctions $\mathbf{v}_n$ à valeurs dan E, des la façon suivante:

$$\mathbf{v}_1(t) = 0 \text{ pour } t < \tfrac{1}{2}; \quad \mathbf{v}_1(t) = \mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)\int_t^1 \varphi_1(s)\,ds \text{ pour } \tfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1;$$

$$\mathbf{v}_n(t) = 0 \text{ pour } t > \frac{1}{n},\ t < \frac{1}{n+1}; \quad \mathbf{v}_n(t) = (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n)\int_t^{1/n} \varphi_n(s)\,ds \text{ pour } \frac{1}{n+1} \leqq t \leqq \frac{1}{n}.$$

Pour tout t tel que $0 < t \leqq 1$, posons $\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}_n(t)$, somme qui a toujours un sens puisqu'elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls; pour $\frac{1}{n+1} \leqq t \leqq \frac{1}{n}$, on a $\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}_n + (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n)\int_t^{1/n} \varphi_n(s)\,ds$ d'où résulte aussitôt que $\|\mathbf{u}(t)\| \leqq 1$ pour $0 < t \leqq 1$, que $\mathbf{u}$ est dérivable en tout point de cet intervalle et qu'on a $\mathbf{u}'(t) = -\mathbf{f}[t, \mathbf{u}(t)]$ en vertu de la définition de $\mathbf{f}$; enfin, comme $\mathbf{u}(1/n) = \mathbf{e}_n$, $\mathbf{u}(t)$ ne tend vers aucune limite lorsque t tend vers 0, ce qui montre que 0 est l'origine du plus grand intervalle J d'extrémité 1 dans lequel existe une intégrale de $\mathbf{x}' = -\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ qui prend la valeur $\mathbf{e}_1$ au point $t = 1$; on a donc $J \neq I$, et $\mathbf{u}(t)$ reste *bornée* dans J, ce que nous voulions établir.

(Reçu le 22 août 1949)