Une remarque sur les approximations diophantiennes linéaires.

Par VOJTĚCH JARNÍK à Praha.

Tous les nombres de cette Note sont réels. En particulier, les minuscules a, b, c désignent des nombres entiers, n, m, k, r des nombres entiers positifs. Soit $S=\{\theta_1,\ldots,\theta_r\}$ un système de r nombres réels. Je vais donner quelques résultats simples concernant la solution approximative de l'équation

$$(1)\qquad a_1\theta_1+a_2\theta_2+\ldots+a_r\theta_r+a_0=0,\quad |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_r|>0$$

en nombres entiers. Pour caractériser le degré de précision avec laquelle cette équation peut être résolue, introduisons pour $t\geqq 1$ la fonction

$$(2)\qquad \psi_S(t)=\psi(t)=\min|a_1\theta_1+\ldots+a_r\theta_r+a_0|$$

où le minimum est pris pour a_i $(i=0, 1, 2,\ldots,r)$ variables sous la condition $0<\max(|a_1|,\ldots,|a_r|)\leqq t$. Si (1) n'a aucune solution, c'est-à-dire si l'on a $\psi(t)>0$ pour chaque $t\geqq 1$, nous allons dire que S est un système indépendant. On sait que $t^r\psi(t)<1$ pour chaque $t\geqq 1$. En particulier, pour $r=1$ on sait que si θ_1 est irrationnel (c'est-à-dire $\{\theta_1\}$ indépendant), on a toujours

$$0\leqq\liminf_{t\to+\infty} t\psi(t)\leqq\frac{1}{\sqrt{5}},\ ^{1)}\qquad \frac{1}{2}\leqq\limsup_{t\to+\infty} t\psi(t)\leqq 1\,;\ ^{2)}$$

donc, $\lim t\psi(t)$ n'existe pas. Pour $r>1$, on a un résultat analogue: une limite *positive* de $t^r\psi(t)$ ne peut pas exister. Plus précisément:

Théorème 1. *Si* $r\geqq 1$, $S=\{\theta_1,\ldots,\theta_r\}$,

$$\limsup_{t\to+\infty} t^r\psi_S(t)=B,\quad \liminf_{t\to+\infty} t^r\psi_S(t)=A>0,$$

on a $B>A$*; d'une manière plus précise,*

$$(3)\qquad \left(\frac{B}{A}\right)^{2^{r+1}}\geqq 2.$$

---

[1]) A. HURWITZ. Voir p. ex. J. F. KOKSMA, *Diophantische Approximationen* (Berlin, 1936), p. 31, Satz 13 a.

[2]) A. CHINČIN (KHINTCHINE). Voir p. ex. J. F. KOKSMA, l. c. [1]), p. 36, Satz 24.

Mais, contrairement au cas $r=1$, on peut avoir $\lim t^r \psi_S(t)=0$, si $r>1$.[3]) Pour classifier, dans ce cas, l'ordre maximum et minimum de $\psi_S(t)$, définissons:

Soit $\alpha(S)=\alpha$ la borne supérieure de tous les γ pour lesquels

$$\limsup_{t\to+\infty} t^\gamma \psi_S(t) < +\infty;$$

soit $\beta(S)=\beta$ la borne supérieure de tous les γ pour lesquels

$$\liminf_{t\to+\infty} t^\gamma \psi_S(t) < +\infty.$$

On a donc $r \leqq \alpha \leqq \beta \leqq +\infty$. En outre on a, pour $r=2$, le théorème suivant:

Théorème 2. *Soit $S=\{\theta_1, \theta_2\}$ un système tel que $2<\alpha<+\infty$; alors $\beta \geqq \alpha(\alpha-1) > \alpha$.*

Donc, le cas $\alpha=\beta$ ne peut se présenter que si l'on a ou bien $\alpha=\beta=2$ ou bien $\alpha=\beta=+\infty$.

Remarque. Pour $r>2$ on a un théorème analogue, mais moins satisfaisant: Soit $S=\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ $(r \geqq 2)$ un système tel que $(5r^2)^{r-1}<\alpha<+\infty$; alors $\beta \geqq \alpha^{\frac{r}{r-1}} - 3\alpha > \alpha$. Et la borne donnée par cette inégalité est assez précise. En effet: Soit $r>1$. Alors il existe une suite de systèmes $S_n\{\theta_{1,n}, \ldots, \theta_{r,n}\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ telle que l'on ait (en posant $\alpha_n=\alpha(S_n)$, $\beta_n=\beta(S_n)$)

$$\beta_n = n + O\left(n^{\frac{r-1}{r}}\right),\quad \beta_n=\alpha_n^{\frac{r}{r-1}}+O(\alpha_n) \text{ pour } n\to+\infty.$$

Les démonstrations de ces résultats seront publiées ailleurs. Théorème 2 est une conséquence immédiate du

Théorème 3. *Soit $S=\{\theta_1, \theta_2\}$ un système indépendant. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue et décroissante pour $t \geqq 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t\varphi(t)=0$. Alors: Si l'on a $\psi_S(t)<\varphi(t)$ pour chaque $t>\tau_0$, il existe à chaque T un $t>T$ tel que*

$$\psi_S(t) < \varphi\left(\frac{1}{6t\,\varphi(t)}\right).$$

En posant $\varphi(t)=t^{-\gamma}$, $1<\gamma<\alpha$, on obtient aussitôt le Théorème 2. D'autre part, en posant $\varphi(t)=\lambda t^{-2}$ $(\lambda>B)$, on obtient

Théorème 4. *Si $r=2$, on peut remplacer, dans le Théorème 1, l'inégalité* (3) *par l'inégalité $A \leqq 36B^3$ (qui est plus précise que* (3) *si B est petit).*

Passons maintenant aux démonstrations très simples des Théorèmes 1, 3.

Soit $S=\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ un système indépendant. La fonction $\psi(t)$ est donc positive et non croissante pour $t \geqq 1$, constante dans chaque intervalle

[3]) On a même le résultat suivant: Soit $r>1$; soit $\varphi(t)$ une fonction croissante et positive pour $t \geqq 1$. Alors il existe un système indépendant $S=\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ tel que $\lim \varphi(t)\psi_S(t)=0$ (A. Chinčin). Voir p. ex. J. F. Koksma, l. c. [1]), p. 69, Satz 8.

$m \leqq t < m+1$ et l'on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = 0$. Il existe donc une suite infinie de nombres naturels

(4) $$1 = t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$$

telle que $\psi(t) = \psi(t_n)$ pour $t_n \leqq t < t_{n+1}$, $\psi(t_{n+1}) < \psi(t_n)$. À chaque n, il existe $r+1$ nombres $a_{i,n}$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ tels que

(5) $$a_{1n}\theta_1 + \ldots + a_{rn}\theta_r + a_{0n} = \psi(t_n), \quad \max(|a_{1n}|, \ldots, |a_{rn}|) = t_n.$$

Evidemment, le plus grand diviseur commun est égal à un:

(6) $$(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{rn}, a_{0n}) = 1.$$

Démonstration du théorème 1. Soit $0 < A' < A \leqq B < B' < +\infty$; donc

(7) $$A' t^{-r} < \psi(t) < B' t^{-r},$$

si t est assez grand. Pour $t_n \leqq t < t_{n+1}$ on a $\psi(t) = \psi(t_n)$; donc, pour $t = t_n$ d'une part et pour $t \to t_{n+1}$ d'autre part on obtient de (7), si n est assez grand,

(8) $$A' t_n^{-r} < \psi(t_n) \leqq B' t_{n+1}^{-r}.$$

Posons $k = 2^{r+1}$ et considérons les $k+1$ nombres (différents deux-à-deux)

$$\psi(t_{n+i}) = a_{1,n+i}\theta_1 + \ldots + a_{r,n+i}\theta_r + a_{0,n+i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

Ces nombres sont situés dans l'intervalle $0 < \xi \leqq \psi(t_n)$. Parmi ces nombres il y en a donc deux dont la différence Δ est positive et plus petite que $\psi(t_n)/k$. On a $\Delta = c_1\theta_1 + \ldots + c_r\theta_r + c_0$; puisque $0 < \Delta < 1$, on a

$$0 < \max(|c_1|, \ldots, |c_r|) < 2t_{n+k},$$

donc $\psi(2t_{n+k}) \leqq \Delta < k^{-1}\psi(t_n)$. Mais (8) donne

$$\psi(2t_{n+k}) \geqq A' 2^{-r} t_{n+k}^{-r} > 2^{-r} A' \left(\frac{A'}{B'}\right)^{k-1} t_{n+1}^{-r}, \quad k^{-1}\psi(t_n) \leqq k^{-1} B' t_{n+1}^{-r},$$

donc

$$\left(\frac{A'}{B'}\right)^k < \frac{2^r}{k} = \frac{1}{2}.$$

Pour $A' \to A$, $B' \to B$ on obtient le théorème.

Démonstration du théorème 3. Soit $r = 2$; écrivons $\theta, \eta, a_n, b_n, c_n$ au lieu de $\theta_1, \theta_2, a_{1n}, a_{2n}, a_{0n}$. On a

(9) $$\max(|a_n|, |b_n|) = t_n, \quad a_n\theta + b_n\eta + c_n = \psi(t_n),$$

(10) $$(a_n, b_n, c_n) = 1.$$

Supposons que pour tous les t assez grands on ait

(11) $$\varphi\left(\frac{1}{6t\varphi(t)}\right) \leqq \psi(t) < \varphi(t);$$

il faut en déduire une contradiction. Pour $t_n \leqq t < t_{n+1}$ on a $\psi(t) = \psi(t_n)$. Pour $t = t_n$ d'une part et pour $t \to t_{n+1}$ d'autre part on obtient donc de (11)

(12) $$\varphi\left(\frac{1}{6t_n\,\varphi(t_n)}\right) \leqq \psi(t_n) \leqq \varphi(t_{n+1}),$$

si n est assez grand. Il s'ensuit que

(13) $$t_{n+1} \leqq \frac{1}{6t_n\,\varphi(t_n)}.$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$\psi(t_n) \leqq \varphi(t_{n+1}) < \varphi\left(\frac{1}{6t_n\,\varphi(t_n)}\right)$$

ce qui contredit à (12).

Posons

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & b_n & c_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ a_{n+2} & b_{n+2} & c_{n+2} \end{vmatrix}, \quad E_n = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{vmatrix}.$$

J'affirme que $D_n = 0$, $E_n \neq 0$ si n est assez grand. En effet: En multipliant les équations

(14) $$a_{n+i}\theta + b_{n+i}\eta + c_{n+i} = \psi(t_{n+i}) \qquad (i = 0, 1, 2)$$

resp. par $a_{n+1}b_{n+2} - a_{n+2}b_{n+1}$, $a_{n+2}b_n - a_n b_{n+2}$, $a_n b_{n+1} - a_{n+1}b_n$ et en ajoutant, on obtient

$$|D_n| < 6t_{n+1}t_{n+2}\,\psi(t_n) \leqq 6t_{n+1}t_{n+2}\,\varphi(t_{n+1}),$$

donc, d'après (13), $|D_n| < 1$, $D_n = 0$.

D'autre part, si $E_n = 0$, on déduirait de (14) pour $i = 0, 1$:

$$|a_n c_{n+1} - a_{n+1}c_n| = |a_n\psi(t_{n+1}) - a_{n+1}\psi(t_n)| < 2t_{n+1}\psi(t_n) \leqq 2t_{n+1}\varphi(t_{n+1}) < 1$$

si n est assez grand, donc $a_n c_{n+1} - a_{n+1}c_n = 0$ et de même $b_n c_{n+1} - b_{n+1}c_n = 0$, donc $a_{n+1} = \tau a_n$, $b_{n+1} = \tau b_n$, $c_{n+1} = \tau c_n$, $|\tau| > 1$, ce qui contredit à (10).

Choisissons un k qui va rester fixe de sorte que

(15) $$D_n = 0, \; E_n \neq 0 \text{ pour chaque } n \geqq k.$$

Considérons la matrice infinie

(16) $$\begin{matrix} a_k & b_k & c_k \\ a_{k+1} & b_{k+1} & c_{k+1} \\ a_{k+2} & b_{k+2} & c_{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

En considérant trois lignes consécutives quelconques de cette matrice, on voit que la troisième ligne est une combinaison linéaire des deux premières lignes qui, à leur tour, sont linéairement indépendantes. Il s'ensuit qu'une ligne quelconque de la matrice (16) est une combinaison linéaire de ses deux premières lignes. Donc

(17) $$\begin{vmatrix} a_k & b_k & c_k \\ a_{k+1} & b_{k+1} & c_{k+1} \\ a_n & b_n & c_n \end{vmatrix} = 0 \text{ pour tout } n \geqq k.$$

En posant

$$A = a_k b_{k+1} - a_{k+1} b_k, \quad A_n = a_{k+1} b_n - a_n b_{k+1}, \quad B_n = a_n b_k - a_k b_n$$

et en désignant par $C_1, C_2, \ldots$ des nombres qui ne dépendent pas de n, on déduit des équations

$$a_i \theta + b_i \eta + c_i = \psi(t_i) \qquad (i = k, k+1, n)$$

et de (17) aussitôt

$$A\psi(t_n) + A_n \psi(t_k) + B_n \psi(t_{k+1}) = 0. \tag{18}$$

Ici $A = E_k$ ne dépend pas de n et l'on a

$$A \neq 0, \ |A_n| < C_1 t_n, \ |B_n| < C_1 t_n.$$

Si l'on avait $B_n = 0$, on aurait d'après (18) $A_n \neq 0$ (car $A \neq 0$), donc

$$|A\psi(t_n)| = |A_n \psi(t_k)| \geqq \psi(t_k),$$

ce qui est impossible si n est assez grand.

L'équation (18) et l'équation analogue avec $n+1$ au lieu de n donnent, si n est assez grand,

$$|B_{n+1} A_n - B_n A_{n+1}| = |A| \,.\, |B_{n+1} \psi(t_n) - B_n \psi(t_{n+1})| / \psi(t_k) <$$
$$< C_2 t_{n+1} \psi(t_n) \leqq C_2 t_{n+1} \varphi(t_{n+1}) < 1$$

(voir (12)), donc $B_{n+1} A_n - B_n A_{n+1} = 0$, $B_{n+1} \psi(t_n) - B_n \psi(t_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire

$$(B_{n+1} a_n - B_n a_{n+1})\theta + (B_{n+1} b_n - B_n b_{n+1})\eta + (B_{n+1} c_n - B_n c_{n+1}) = 0,$$

où $B_n \neq 0$, $B_{n+1} \neq 0$. Mais θ, η étant un système indépendant, il s'ensuit

$$B_{n+1} a_n - B_n a_{n+1} = B_{n+1} b_n - B_n b_{n+1} = B_{n+1} c_n - B_n c_{n+1} = 0,$$

d'où $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 0$, ce qui contredit à (15).

(Reçu le 17 septembre 1949.)